

## К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

И. О. О с и п о в  
(Петрозаводск)

Плоская задача распространения упругих колебаний от точечного источника типа мгновенного импульса в анизотропной среде с четырьмя упругими постоянными рассмотрена В. А. Свежло [1], используя метод комплексных решений Смирнова — Соболева [2]. Рассмотрение этого вопроса представляет определенную трудность, поэтому полученные решения изучены лишь для сред, ограниченных определенными условиями для упругих постоянных. В связи с этим целесообразно вернуться к рассмотрению этих решений и на их основе детально изучить геометрическую форму волновых фронтов. Эти вопросы представляют самостоятельный интерес, а также будут необходимы при решении ряда других задач. Как и в работе [1], ограничимся изучением квазипродольных и квазипоперечных волн типа SV, так как изучение волн типа SH не представляет труда

1. Уравнения движения и их решения. Уравнения движения для анизотропной среды в плоском случае имеют вид

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \left( a = \frac{c_{11}}{\rho}, \quad b = \frac{c_{22}}{\rho} \right) \\ c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} & \left( d = \frac{c_{66}}{\rho}, \quad c = \frac{c_{66} + c_{12}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $c_{ij}$  — упругие постоянные,  $\rho$  — плотность среды.

Решение уравнений (1.1), характеризующее упругие колебания в безграничной анизотропной среде от точечного источника типа мгновенного импульса, помещенного в начале координат, имеет выражение [1]

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{k=1}^2 R \left\{ c \int_0^{\theta_k} \zeta \lambda_k w_k(\zeta) d\zeta \right\} \\ v(x, y, t) &= \sum_{k=1}^2 R \left\{ \int_0^{\theta_k} (a\zeta^2 + d\lambda_k^2 - 1) w_k(\zeta) d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь комплексные переменные  $\theta_k$  определяются соотношениями

$$1 - \theta_k \xi + \lambda_k \eta = 0 \quad (\xi = x/t, \quad \eta = y/t) \quad (1.3)$$

Величины  $\lambda_k$  определяются выражениями

$$\lambda_k = \left( \frac{[(b+d) - L\theta_k^2] + (-1)^k \sqrt{Q(\theta_k)}}{2bd} \right)^{1/2} \quad (k=1, 2) \quad (1.4)$$

$$Q(\theta_k) = [(b+d) - L\theta_k^2]^2 - 4bd(1 - a\theta_k^2)(1 - d\theta_k^2), \quad L = ab + d^2 - c^2$$

Функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  есть ветви алгебраической функции  $\lambda$ , однозначной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных. Функции  $w_1$  и  $w_2$  есть ветви произвольной аналитической функции  $w$ , однозначной на римановой поверхности. Упругие постоянные реальных сред рассматриваемого класса анизотропии удовлетворяют неравенствам

$$a > d, \quad b > d, \quad d > 0, \quad ab - (c-d)^2 > 0 \quad (1.5)$$

Вид поверхности Римана и геометрическая форма фронтов волн зависят от выполнения тех или иных условий

$$\begin{aligned} N_1 = (a-d)(b-d) - c^2 > 0, & \quad N_1 = (a-d)(b-d) - c^2 < 0 \\ N_2 = (a-d)b - c^2 > 0, & \quad N_2 = (a-d)b - c^2 < 0 \\ N_3 = (b-d)a - c^2 > 0, & \quad N_3 = (b-d)a - c^2 < 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Число и положение точек разветвления функций (1.4) на комплексных плоскостях в зависимости от соотношений упругих постоянных изучено в работе автора [3]; необходимо иметь в виду, что здесь

$$\theta_k = \frac{1}{\theta_k}, \quad \lambda_k = \theta_k n_k$$

При условии  $N_2 > 0$  точками разветвления для внешних радикалов (1.4) будут: точки  $\theta_1 = \pm 1/\sqrt{a}$  при  $k = 1$  и точки  $\theta_2 = \pm 1/\sqrt{d}$  при  $k = 2$ .

Точки разветвления для внутреннего радикала (1.4)

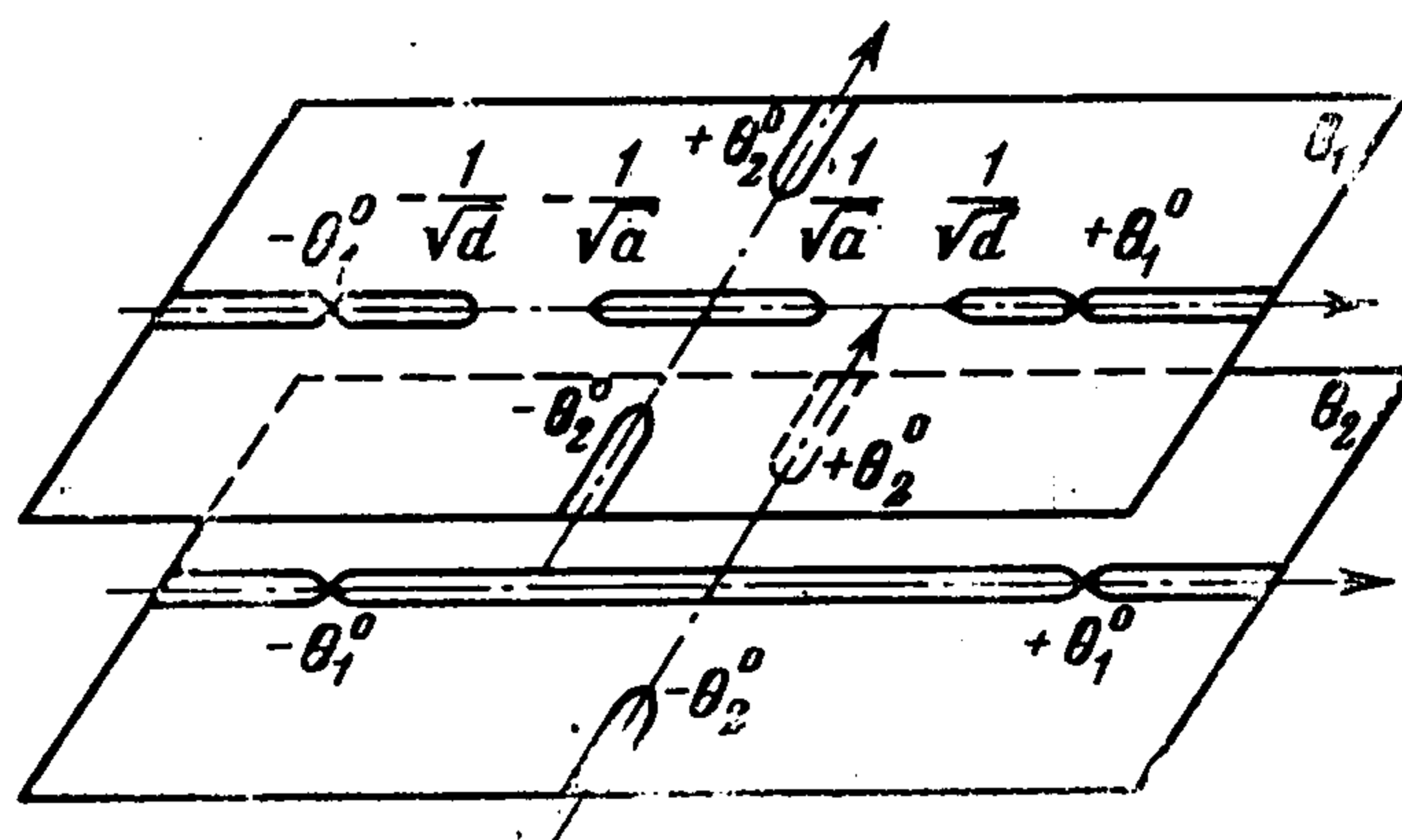
$$\theta_i^\circ = \pm \left( \frac{M \pm \sqrt{4bdc^2 [c^2 - (a-d)(b-d)]}}{K_1 K_2} \right)^{1/2} \quad (1.7)$$

$$K_1 = ab - (c-d)^2, \quad K_2 = ab - (c+d)^2$$

$$M = (b+d)N_1 - (b-d)(a-b)d$$

могут быть комплексными, мнимыми и вещественными. При условии  $N_1 > 0$  все четыре попарно комплексно-сопряженные, при  $N_1 < 0$  могут быть все четыре мнимыми или вещественными, или две вещественными и две мнимыми.

При условии  $N_2 < 0$  точками разветвления для внешних радикалов (1.4) будут: при  $k = 1$  точки  $\theta_1 = \pm 1/\sqrt{a}$  и  $\theta_1 = \pm 1/\sqrt{d}$ , при  $k = 2$  внешний радикал точек разветвления не имеет. Из точек разветвления (1.7) — две вещественные, две мнимые. Вещественные точки (1.7) при  $N_2 > 0$  и  $N_2 < 0$  находятся внутри интервалов  $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \infty)$ .



Фиг. 1

Если выполняется условие  $N_2 > 0$ , риманова поверхность строится согласно [1]. При  $N_2 < 0$  функция  $\lambda_1$  однозначна на комплексной плоскости  $\theta_1$  с разрезами  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ ,  $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \theta_1^\circ)$  и  $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$  вдоль вещественной оси и  $(\pm \theta_2^\circ, \pm i\infty)$  вдоль мнимой оси. Функция  $\lambda_2$  однозначна на комплексной плоскости  $\theta_2$  с разрезами  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  и  $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$  вдоль вещественной оси и  $(\pm \theta_2^\circ, \pm i\infty)$  вдоль мнимой оси. Склеив крест-накрест берега разрезов  $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$  и  $(\pm \theta_2^\circ, \pm i\infty)$  плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , получим риманову поверхность однозначного определения функции  $\lambda$  для случая  $N_2 < 0$  (фиг. 1).

Функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  принимают вещественные значения на берегах разрезов римановой поверхности  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$  и  $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$  при условии  $N_2 > 0$ ,  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ ,  $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \theta_1^\circ)$  и  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  при условии  $N_2 < 0$ . Фиксируем значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  на римановой поверхности условием, чтобы они были положительными при  $\theta_k = i\beta$ , где  $\beta$  — достаточно малая положительная величина.

Соотношения (1.3) дают соответствие между точками плоскости  $xu$  и плоскостями  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  римановой поверхности. Фронты волн могут быть получены как огибающие прямых (1.3) при вещественных значениях  $\theta_k$  и  $\lambda_k$

$$x_1 = -\frac{\lambda_1' t}{\lambda_1 - \theta_1 \lambda_1'}, \quad y_1 = -\frac{t}{\lambda_1 - \theta_1 \lambda_1'} \quad (1.8)$$

$$x_2 = -\frac{\lambda_2' t}{\lambda_2 - \theta_2 \lambda_2'}, \quad y_2 = -\frac{t}{\lambda_2 - \theta_2 \lambda_2'} \quad (1.9)$$

Нормальные скорости распространения волн имеют выражения [3]

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\theta_1^2 + \lambda_1^2}}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{\theta_2^2 + \lambda_2^2}} \quad (1.10)$$

Функции  $w_k$  есть ветви произвольной аналитической функции  $w$ , однозначной на двухлистной римановой поверхности, вид которой зависит от соотношения упругих постоянных. Чтобы решение (1.2) выражало упругие колебания в безграничной среде от точечного источника типа мгновенного импульса, необходимо функцию  $w$  выбирать так, чтобы вещественные части  $w_1$  и  $w_2$  обращались в нуль на берегах разрезов вещественного определения функций  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соответственно. В отличие от случая  $N_2 > 0$ , рассмотренного в работе [1], при условии  $N_2 < 0$  такими разрезами будут  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ ,  $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm\theta_1^\circ)$  и  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ .

В работе [1] свойство решения, связанное с выполнением условия  $N_2 < 0$ , не рассмотрено.

2. Геометрия волновых фронтов. Условия существования остроугольных кромок. Так как волновые фронты симметричны относительно координатных осей, достаточно изучить их участки, соответствующие верхним берегам разрезов плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  римановой поверхности на положительных вещественных полуосях. Выберем произвольные точки  $\theta_1$  и  $\theta_2$  на рассматриваемых участках берегов разрезов, этим точкам на фронтах волн будут соответствовать точки  $(\xi_1, \eta_1)$  и  $(\xi_2, \eta_2)$ . Обозначив  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  углы между отрицательной полуосью  $\eta$  и нормальными к фронтам в этих точках, будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\theta_1}{\lambda_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\theta_2}{\lambda_2} \quad (2.1)$$

Обозначив через  $\beta_1$  и  $\beta_2$  углы между отрицательной полуосью  $\eta$  и лучами, соединяющими выбранные точки на фронтах с началом координат, получим

$$\operatorname{tg} \beta_1 = -\lambda_1', \quad \operatorname{tg} \beta_2 = -\lambda_2' \quad (2.2)$$

$$\lambda_k' = \frac{\theta_k \psi_k}{2bd\lambda_k}, \quad \psi_k = (-1)^k \frac{K_1 K_2 \theta_k^2 - M}{\sqrt{Q(\theta_k)}} - L$$

При условии  $N_2 > 0$  точкам  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = 0$  соответствуют точки волновых фронтов  $\eta_1 = -\sqrt{b}$  и  $\eta_2 = -\sqrt{d}$  на оси  $\eta$ , точкам  $\theta_1 = 1/\sqrt{a}$  и  $\theta_2 = 1/\sqrt{d}$  — точки  $\xi_1 = \sqrt{a}$  и  $\xi_2 = \sqrt{d}$  на оси  $\xi$ . Значениям

$$0 \leq \theta_1 \leq \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \frac{1}{\sqrt{d}} \quad (2.3)$$

соответствуют участки фронтов, границами которых будут указанные точки на координатных осях. Геометрическая форма этих участков может быть изучена при помощи формул (2.1) и (2.2).

Производные правых частей (2.1) и (2.2) имеют вид

$$\left(\frac{\theta_k}{\lambda_k}\right)' = \frac{\Phi_k}{2bd\lambda_k} \quad (2.4)$$

$$\Phi_k = (b+d) + (-1)^k \frac{(b-d)^2 - M\theta_k^2}{\sqrt{Q(\theta_k)}}$$

$$\lambda_k'' = \frac{D_k}{4b^2d^2\lambda_k^3}, \quad D_k = 2bd(\psi_k + \theta_k\psi_k')\lambda_k^2 - \theta_k^2\psi_k^2$$

В свою очередь, производные функций  $\Phi_k$  и  $D_k$  имеют выражения

$$\Phi_k' = -\frac{(-1)^k 16bdc^2 N_1 \theta_k^3}{\sqrt{Q^3}} \quad (2.5)$$

$$D_k' = (-1)^k 48b^2d^2c^2 N_1 \theta_k \lambda_k^2 \frac{(b-d)^2 - K_1 K_2 \theta_k^4}{\sqrt{Q^5}}$$

Рассмотрим случаи, которые возможны при условии  $N_2 > 0$  согласно (1.6).

*Случай 1.* Упругие постоянные удовлетворяют условию  $N_1 > 0$ . При  $N_2 > 0$  на участках (2.3), как на участках вещественного определения функций (1.4), функция  $Q$  больше нуля. Согласно условию  $N_1 > 0$  (1.6) и выражению (2.5) функция  $\varphi_1$  монотонно возрастает,  $\varphi_2$  монотонно убывает. При условии  $N_2 > 0$  выполняются соотношения

$$\varphi_1(0) = 2d > 0, \quad \varphi_2(1/\sqrt{d}) = 2bd/N_2 > 0$$

Поэтому функции (2.4) на соответствующих участках (2.3) имеют положительные значения, а правые части (2.1) монотонно возрастают от нуля до бесконечности. Следовательно, углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на участках (2.3) монотонно возрастают от 0 до  $90^\circ$ .

При условии  $N_2 > 0$  функции  $D_k$  на границах участков (2.3) имеют значения

$$\begin{aligned} D_1(0) &= -\frac{4d^2[(b-d)d+c^2]}{b-d}, & D_1\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) &= -\frac{1}{a} \left[ \psi_1\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \right]^2 \\ D_2(0) &= -\frac{4b^2[(b-d)a-c^2]}{b-d}, & D_2\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) &= -\frac{1}{d} \left[ \psi_2\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) \right]^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как при условии  $N_1 > 0$  условие  $N_3 > 0$  согласно (1.6) выполняется, функции  $D_k$  на границах участков (2.3) принимают отрицательные значения.

Производная функции  $D_1$  (2.5) на первом участке (2.3) или меньше нуля, или меняет знак с минуса на плюс в точке

$$\theta_0 = \sqrt{b-d}/(K_1K_2)^{1/4} \quad (2.7)$$

Поэтому функция  $D_1$  на этом участке, в том и другом случаях, имеет отрицательные значения. Тогда  $\lambda_1'' < 0$ , а правая часть первого равенства (2.2) монотонно возрастает от нуля до бесконечности, или угол  $\beta_1$  на рассматриваемом участке монотонно возрастает от 0 до  $90^\circ$ .

Производная функции  $D_2$  на втором участке (2.3) или больше нуля, или меняет знак с плюса на минус в точке (2.7).

В первом случае функция  $D_2$  представляет собой отрицательную монотонно возрастающую функцию. В этом случае точка (2.7) будет мнимой или вещественной. Такая вещественная точка (2.7) будет находиться за пределами рассматриваемого участка (2.3), функция  $D_2$  в ней принимает комплексное значение. Во втором случае точка (2.7) принадлежит рассматриваемому участку, и функция  $D_2$  в ней имеет максимум. Если  $D_2(\theta_0) < 0$ , то функция  $D_2$  на рассматриваемом участке имеет отрицательные значения. В этих случаях  $\lambda_2'' < 0$ , а правая часть второго равенства (2.2) на втором участке (2.3) монотонно возрастает от нуля до бесконечности, или угол  $\beta_2$  монотонно возрастает от 0 до  $90^\circ$ .

Если значение функции  $D_2$  в точке (2.7) больше нуля, т. е.

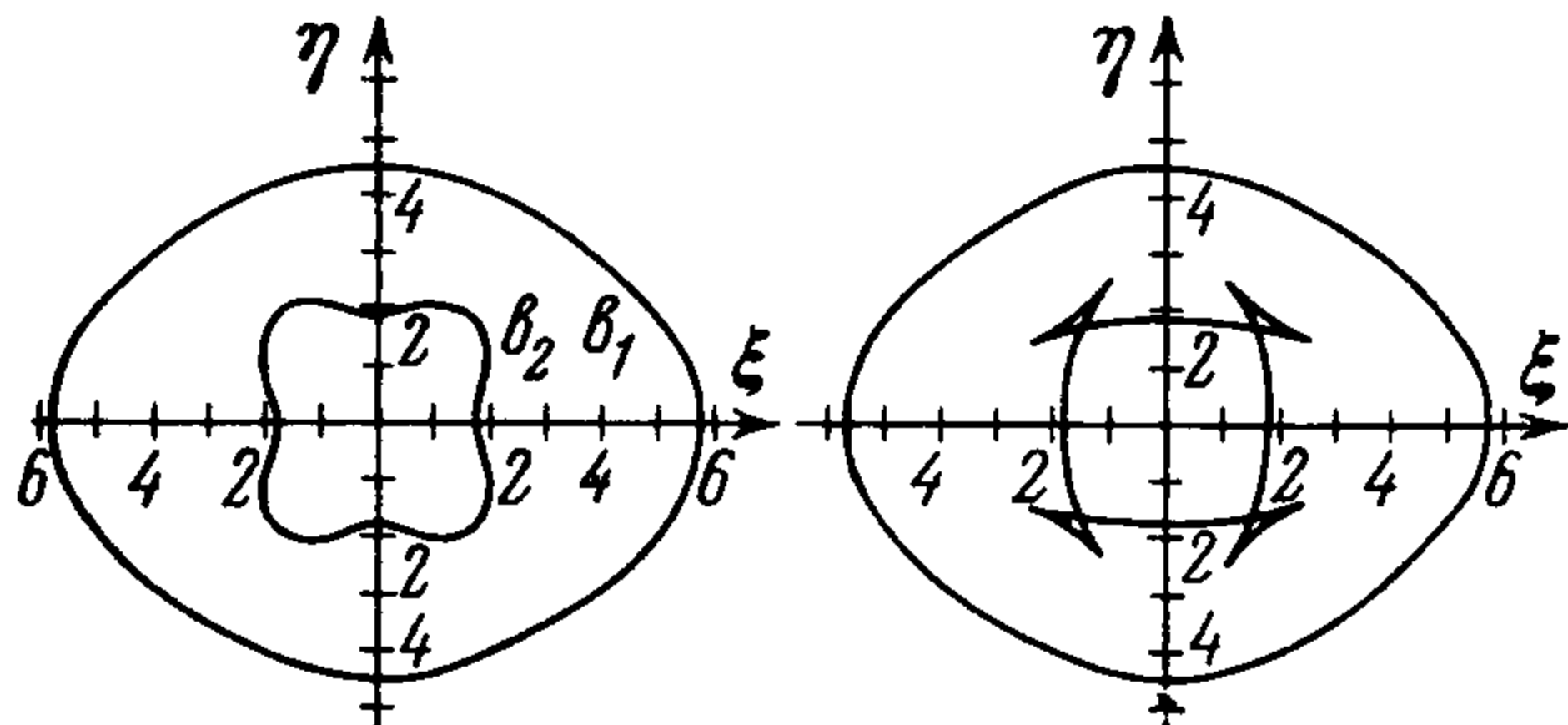
$$\begin{aligned} & [3(b-d)\sqrt{K_1K_2} - 2(b+d)L + M] \sqrt{(b-d)\sqrt{K_1K_2} - M} + \\ & + 2[(b+d)\sqrt{K_1K_2} - (b-d)L] \sqrt{2(b-d)\sqrt{K_1K_2}} > 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

то функции  $D_2$  и  $\lambda_2''$  на втором участке (2.3) два раза меняют знак в точках  $\theta_2 = \kappa_1$  и  $\theta_2 = \kappa_2$ , причем  $0 < \kappa_1 < \theta_0 < \kappa_2 < 1/\sqrt{d}$ . В интервалах  $(0, \kappa_1)$  и  $(\kappa_2, 1/\sqrt{d})$  они имеют отрицательные значения, в интервале  $(\kappa_1, \kappa_2)$  — положительные. Как и в предыдущем случае, правая часть (2.2) на рассматриваемом участке принимает значения от нуля до бесконечности, но монотонность возрастания нарушается, в точке  $\kappa_1$  имеет конечный максимум, в точке  $\kappa_2$  — минимум. В результате этого в интервале  $(0, \kappa_1)$  угол  $\beta_2$  монотонно возрастает от нуля до значения  $\beta_2(\kappa_1)$ ; в интервале  $(\kappa_1, \kappa_2)$  — монотонно убывает от  $\beta_2(\kappa_1)$  до  $\beta_2(\kappa_2)$ ; в интервале  $(\kappa_2, 1/\sqrt{d})$  — монотонно возрастает от  $\beta_2(\kappa_2)$  до  $90^\circ$ .

Если при условии  $N_1 > 0$  условие (2.8) не выполняется, на участках (2.3) углы  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  монотонно возрастают от 0 до  $90^\circ$ . Участкам (2.3) верхних берегов раз-

резов римановой поверхности соответствуют участки фронтов волн в четвертом квадранте плоскости  $\xi\eta$ , представляющие собой выпуклые кривые, концы которых подходят к координатным осям под углом  $90^\circ$ . Фронты волн представляют собой выпуклые замкнутые кривые с центром в начале координат. Внешний фронт, соответствующий  $k = 1$ , будет фронтом квазипродольной волны; внутренний, соответствующий  $k = 2$  — фронтом квазипоперечной волны.

При выполнении условия (2.8) для квазипродольной волны приходим к тому же результату: фронт волны выражается выпуклой замкнутой кривой; для квазипоперечной волны имеем иную картину. На участке  $(0, 1/\sqrt{d})$  угол  $\alpha_2$  монотонно возрастает от  $0$  до  $90^\circ$ , угол  $\beta_2$  непрерывно изменяется: в интервале  $(0, \kappa_1)$  монотонно возрастает от  $0$  до  $\beta_2(\kappa_1)$ , в интервале  $(\kappa_1, \kappa_2)$  монотонно убывает от  $\beta_2(\kappa_1)$  до  $\beta_2(\kappa_2)$ , в интервале  $(\kappa_2, 1/\sqrt{d})$  монотонно возрастает от  $\beta_2(\kappa_2)$  до  $90^\circ$ .



Фиг. 2

Следовательно, участки фронта волны, соответствующие интервалам  $(0, \kappa_1)$  и  $(\kappa_2, 1/\sqrt{d})$ , представляют собой пересекающиеся выпуклые кривые в четвертом квадранте, выходящие из точек  $(0, -\sqrt{d})$  и  $(\sqrt{d}, 0)$  под прямым углом к координатным осям  $\eta$  и  $\xi$ . Участок фронта волны, соответствующий интервалу  $(\kappa_1, \kappa_2)$ , представляет собой вогнутую кривую, концы которой соединены с концами двух других участков точками возврата первого рода. Таким образом, при условии (2.8) фронт квазипоперечной волны состоит из кусочногладких кривых, образующих остроугольные кромки. На фиг. 2 изображены кривые нормальных скоростей (в км/сек) и волновых фронтов для калия пентабората [4]

$$c_{11} = 58.2, \quad c_{22} = 35.9, \quad c_{66} = 5.7, \quad c_{12} = 22.9 \quad [10^{10} \text{ дн/см}^2] \quad \rho = 1.8 \text{ г/см}^3$$

Случай 2. Упругие постоянные удовлетворяют условию  $N_1 < 0$ . При условии  $N_1 < 0$  согласно (2.5) функция  $\varphi_1$  монотонно убывает, функция  $\varphi_2$  монотонно возрастает. Так как

$$\varphi_1 \left( \frac{1}{\sqrt{a}} \right) = \frac{2bd(a-d)}{(a-d)d + c^2} > 0, \quad \varphi_2(0) = 2b > 0$$

то функции (2.4) на соответствующих участках (2.3) больше нуля, а правые части (2.1) монотонно возрастают от нуля до бесконечности, или  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  монотонно возрастают от  $0$  до  $90^\circ$ .

При  $N_1 < 0$  функция  $D_2'$  на втором участке (2.3) меньше нуля или меняет знак с минуса на плюс в точке (2.7), в результате чего функция  $D_2$  монотонно убывает или имеет минимум в точке (2.7).

Если выполняется условие  $N_3 > 0$ , значения функции  $D_2$  на границах участка меньше нуля. В этом случае функции  $D_2$  и  $\lambda_2''$  принимают отрицательные значения на участке, а угол  $\beta_2$  монотонно возрастает от  $0$  до  $90^\circ$ .

Следовательно, при условии  $N_3 > 0$  фронт квазипоперечной волны представляет собой выпуклую замкнутую кривую с центром в начале координат.

При выполнении условия  $N_3 < 0$  функция  $D_2$  на границах рассматриваемого участка имеет противоположные знаки (2.6), т. е. функции  $D_2$  и  $\lambda_2''$  на этом участке один раз меняют знак с плюса на минус в точке  $\theta_2 = \kappa_1$ , причем при вещественном значении (2.7) имеем  $\kappa_1 < \theta_0$ . Правая часть во втором равенстве (2.2) в интервале  $(0, \kappa_1)$  монотонно убывает от нуля до конечного значения, в интервале  $(\kappa_1, 1/\sqrt{d})$  монотонно возрастает от этого значения до бесконечности, меняя знак с минуса на плюс в точке  $\theta_2^*$ , которая будет нулем функции  $\psi_2$ .

Следовательно, угол  $\beta_2$  в интервале  $(0, \kappa_1)$  монотонно убывает от  $0$  до  $-\beta_2(\kappa_1)$ , в интервале  $(\kappa_1, 1/\sqrt{d})$  монотонно возрастает от  $-\beta_2(\kappa_1)$  до  $90^\circ$ , принимая в точке

$\theta_2^*$  нулевое значение. Так как на участке  $(0, 1/\sqrt{d})$  верхнего берега разреза плоскости  $\theta_2$  угол  $\alpha_2$  монотонно возрастает от 0 до  $90^\circ$ , то этому участку соответствует участок фронта волны, состоящий из двух гладких кривых, соединенных точкой возврата первого рода.

Участок, соответствующий интервалу  $(0, \kappa_1)$ , представляет вогнутую кривую, которая выходит из точки  $(0, -\sqrt{d})$  под прямым углом к координатной оси  $\eta$  и расположена в третьем квадранте. Значению  $\theta_2 = \kappa_1$  соответствует точка возврата в третьем квадранте плоскости  $\xi\eta$ .

Участок, соответствующий интервалу  $(\kappa_1, 1/\sqrt{d})$ , представляет собой выпуклую кривую, которая, выходя из точки возврата, пересекает нижнюю полуось  $\eta$  выше точки  $(0, -\sqrt{d})$ , проходит по четвертому квадранту в точку  $(\sqrt{d}, 0)$  под прямым углом к оси  $\xi$ .

Таким образом, при условии  $N_3 < 0$  (1.6) фронт квазипоперечной волны состоит из кусочно-гладких кривых, образующих остроугольные кромки у оси  $\eta$ .

При условии  $N_1 < 0$  функция  $D_1'$  на первом участке (2.3) больше нуля или меняет знак с плюса на минус, функция  $D_1$  монотонно возрастает или имеет максимум в точке (2.7). Согласно (2.6), функция  $D_1$  может иметь положительные значения в некоторых точках участка, если ее значение в точке (2.7) больше нуля, т. е.

$$[3(b-d)\sqrt{K_1K_2} - 2(b+d)L + M]\sqrt{(b-d)\sqrt{K_1K_2} - M} - 2[(b+d)\sqrt{K_1K_2} - (b-d)L]\sqrt{2(b-d)\sqrt{K_1K_2}} > 0 \quad (2.9)$$

Согласно (2.5) функция  $D_1'$  меняет знак на первом участке (2.3), если

$$(b-d)^2a^2 - K_1K_2 < 0 \quad (2.10)$$

Учитывая условие (2.10), получим следующее неравенство: (2.11)

$$(b+d)\sqrt{K_1K_2} - (b-d)L > (b+d)(b-d)a - (b-d)L = (b-d)[(a-d)d + c^2] > 0$$

При  $N_1 < 0$  (1.6) условие (2.8) не выполняется, так как функция  $D_2$  в точке (2.7) меньше нуля. Следовательно, и условие (2.9) не имеет места при выполнении (2.11). Таким образом, функции  $D_1$  и  $\lambda_1''$  на рассматриваемом участке меньше нуля, угол  $\beta_1$  монотонно возрастает от 0 до  $90^\circ$ . Фронт квазипродольной волны выражается выпуклой замкнутой кривой.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие  $N_2 < 0$ . Здесь функция  $\lambda_1$  имеет вещественные значения на берегах разрезов  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$  и  $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$ , функция  $\lambda_2$  — на берегах разреза  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_2$  (фиг. 1).

Изучим участок фронта волны, соответствующий значениям  $0 \leq \theta_2 \leq \theta_1^\circ$  верхнего берега разреза плоскости  $\theta_2$ . Точкам  $\theta_2 = 0$  и  $\theta_2 = \theta_1^\circ$  соответствуют точки фронта  $(0, -\sqrt{d})$  и  $(1/\theta_1^\circ, 0)$ , расположенные на координатных осях  $\eta$  и  $\xi$ . Так как при  $N_2 < 0$  выполняется  $N_1 < 0$ , то, повторяя рассуждения для случая выполнения условий  $N_2 > 0$  и  $N_1 < 0$ , убеждаемся, что на рассматриваемом участке правая часть во втором равенстве (2.1) монотонно возрастает от нуля до конечного значения  $\theta_1^\circ / \lambda_2(\theta_1^\circ)$ , угол  $\alpha_2$  монотонно возрастает от нуля до значения  $\alpha_2(\theta_1^\circ) < 90^\circ$ .

Так как при условии  $N_3 > 0$  (1.6) на границах участка значения функции  $D_2$  меньше нуля, т. е.  $D_2(0) = -4b^2N_3$  и  $D_2(\theta_1^\circ) = -\infty$ , то функции  $D_2$  и  $\lambda_2''$  имеют отрицательные значения на участке, угол  $\beta_2$  монотонно возрастает от 0 до  $90^\circ$ .

Следовательно, при  $N_3 > 0$  (1.6) участку  $(0, \theta_1^\circ)$  верхнего берега разреза плоскости  $\theta_2$  соответствует участок фронта волны в четвертом квадранте, представляющий собой выпуклую кривую, которая выходит из точки  $(0, -\sqrt{d})$  под прямым углом к оси  $\eta$  и подходит к оси  $\xi$  в точке  $(1/\theta_1^\circ, 0)$ , под острым углом, так как  $\alpha_2(\theta_1^\circ) < 90^\circ$ .

При условии  $N_3 < 0$  функция  $D_2$  на участке  $(0, \theta_1^\circ)$  один раз меняет знак с плюса на минус в точке  $\theta_2 = \kappa_1$ , которая удовлетворяет условию  $\kappa_1 < \theta_0$  при веществен-

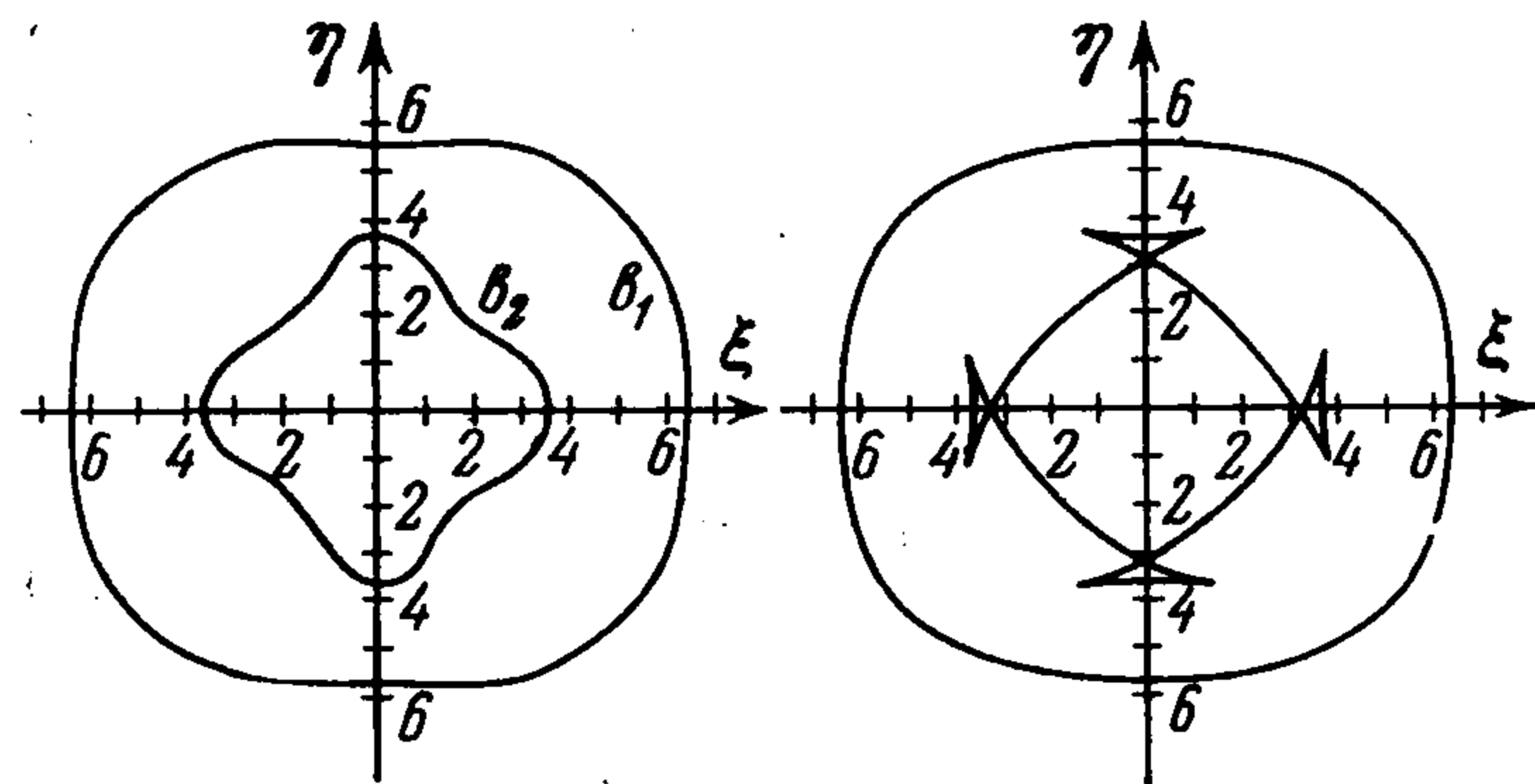
ном значении (2.7), угол  $\beta_2$  изменяется так же, как на участке  $(0, 1/\sqrt{d})$  при выполнении условий  $N_1 < 0$  и  $N_3 < 0$ , причем  $\beta_2(\theta_1^\circ) = 90^\circ$ .

Участок фронта волны, соответствующий значениям  $0 \leq \theta_2 \leq \theta_1^\circ$ , как и в случае выполнения  $N_1 < 0$  и  $N_3 < 0$ , представляет собой две гладкие кривые противоположного знака кривизны, соединенные точкой возврата первого рода.

В отличие от случая  $N_1 < 0$  и  $N_3 < 0$  выпуклая кривая, соответствующая интервалу  $(\kappa_1, \theta_1^\circ)$ , подходит к оси  $\xi$  в точке  $(1/\theta_1^\circ, 0)$  под острым углом, так как будем иметь  $\alpha_2(\theta_1^\circ) < 90^\circ$ .

Все рассуждения, проведенные при рассмотрении участка  $(0, 1/\sqrt{a})$  в случае выполнения условий  $N_1 < 0$  и  $N_3 < 0$  при  $N_2 > 0$ , остаются справедливыми при условии  $N_2 < 0$ . Берегам разреза  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$  плоскости  $\theta_1$  соответствует фронт квазипродольной волны, выраженный выпуклой замкнутой кривой, пересекающей координатные оси в точках  $(\pm\sqrt{a}, 0)$  и  $(0, \pm\sqrt{b})$ .

Установим, какой участок фронта волны соответствует значениям  $1/\sqrt{d} \leq \theta_1 \leq \theta_1^\circ$  нижнего берега разреза плоскости  $\theta_1$ . На этом берегу разреза функция  $\lambda_1$  имеет



Фиг. 3

положительные значения. Точкам  $\theta_1 = 1/\sqrt{d}$  и  $\theta_1 = \theta_1^\circ$  соответствуют точки фронта волны  $(\sqrt{d}, 0)$  и  $(1/\theta_1^\circ, 0)$ , расположенные на положительной полуоси  $\xi$ . Так как при условии  $N_2 < 0$

$$\Phi_1' < 0, \quad \Phi_1\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) = \frac{2bd(a-d)}{N_2} < 0$$

то значения первого выражения (2.4) при  $k = 1$  меньше нуля на рассматриваемом

участке, правая часть первого равенства (2.1) монотонно убывает от бесконечности до значения  $\theta_1^\circ / \lambda_1(\theta_1^\circ) = \theta_1^\circ / \lambda_2(\theta_1^\circ)$ , угол  $\alpha_1$  монотонно убывает от  $90^\circ$  до значения  $\alpha_1(\theta_1^\circ) = \alpha_2(\theta_1^\circ)$ . При  $N_2 < 0$  на рассматриваемом участке функция  $D_1'$  больше нуля или меняет знак с плюса на минус, но последнее исключено, так как на границах участка

$$D_1(1/\sqrt{d}) = -[\psi_1(1/\sqrt{d})]^2/d < 0, \quad D_1(\theta_1^\circ) = +\infty$$

и функция  $D_1$  не может иметь максимума внутри участка. Следовательно, функция  $D_1$  и  $\lambda_1''$  в точке  $\theta_1 = \kappa$  меняют знак с минуса на плюс.

В интервале  $(1/\sqrt{d}, \kappa)$  правая часть первого равенства (2.2) монотонно возрастает от  $-\infty$  до значения  $[-\lambda_1'(\kappa)] < 0$ , угол  $\beta_1$  монотонно возрастает от  $90^\circ$  до  $\beta_1(\kappa)$ .

В интервале  $(\kappa, \theta_1^\circ)$  правая часть первого равенства (2.2) монотонно убывает от значения  $-\lambda_1'(\kappa)$ , до  $-\infty$ , угол  $\beta_1$  монотонно убывает от значения  $\beta_1(\kappa)$  до  $90^\circ$ . Следовательно, нижнему берегу разреза  $(1/\sqrt{d}, \theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$  соответствует участок фронта волны в первом квадранте.

Один отрезок этого участка, соответствующий интервалу  $(\theta_1^\circ, \kappa)$ , представляет выпуклую кривую, которая выходит из точки  $(1/\theta_1^\circ, 0)$  под острым углом к оси  $\xi$  и будет продолжением выпуклого участка фронта волны, соответствующего интервалу  $(0, \theta_1^\circ)$  верхнего берега разреза плоскости  $\theta_2$ , так как  $\alpha_1(\theta_1^\circ) = \alpha_2(\theta_1^\circ)$ .

Другой отрезок, соответствующий интервалу  $(\kappa, 1/\sqrt{d})$ , представляет вогнутую кривую, один конец которой соединен точкой возврата первого рода с первым отрезком, другой конец подходит к оси  $\xi$  в точке  $(\sqrt{d}, 0)$  под прямым углом.

Таким образом, при выполнении условия  $N_2 < 0$  фронт квазипоперечной волны состоит из кусочно-гладких кривых, образующих остроугольные кромки, и выражается формулами (1.9) на берегах разреза  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_2$  и формулами (1.8) на берегах разрезов  $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$  римановой поверхности. При выполнении  $N_2 < 0$  и  $N_3 > 0$  фронт волны имеет остроугольные кромки у оси  $\xi$ , при выполнении условий  $N_2 < 0$  и  $N_3 < 0$  — у осей  $\xi$  и  $\eta$ . На фиг. 3 изображены кривые

нормальных скоростей в км/сек и волновых фронтов для среды, удовлетворяющей условиям  $N_2 < 0$  и  $N_3 < 0$ .

В качестве среды берется магнийсульфатгептагидрат [4]

$$c_{11} = 69.8, \quad c_{22} = 52.9, \quad c_{66} = 22.2, \quad c_{12} = 39, \quad \rho = 1.7 \text{ г/см}^3$$

Выполненные исследования дали возможность установить соответствие между точками волновых фронтов и римановой поверхности, изучить геометрические свойства волновых фронтов в зависимости от упругих постоянных среды, установить условия существования остроугольных кромок  $N_2 < 0$ ,  $N_3 < 0$  и (2.8).

Вопрос геометрии волновых фронтов привлекал внимание ряда авторов, короткие замечания по основным работам даны в статье [5]. Условия существования остроугольных кромок типа  $N_2 < 0$  и  $N_3 < 0$  были впервые получены Масгрейвом [6]. А. Г. Хаткевичем [5] была сделана попытка получить условие (2.8).

Условие существования остроугольных кромок для сред  $N_1 > 0$  согласно работе [5] имеет выражение

$$B^2 (B - 2N_1 / d) - 4N_1^2 (B - N_1 / d) / cd < 0 \quad (2.12)$$

$$B = (a + b) + 2(c - d)$$

Для калия пентабората, льда, кобальта и берилла [5] условия (2.8) и (2.12) утверждают наличие остроугольных кромок; для берилла с упругими постоянными [4]

$$c_{11} = 26.8, \quad c_{33} = 23.5, \quad c_{44} = 6.55, \quad c_{13} = 6.66$$

и бромистого калия при всех значениях упругих постоянных [4] условия (2.8) и (2.12) приводят к разным результатам; условие (2.8) утверждает наличие кромок, условие (2.12) отрицает. Вид волнового фронта для бромистого калия и результаты эксперимента, представленные в работе К. С. Александрова [7], убедительно подтверждают наличие остроугольных кромок на волновой поверхности бромистого калия. К тому же результату приводит построение волнового фронта для бромистого калия по формулам (1.8) и (1.9). Все это дает основание утверждать, что при выводе условия (2.12) А. Г. Хаткевичем допущена ошибка. Отметим, что А. Г. Хаткевич [5] правильно обращает внимание на ошибочное утверждение в работе [8], отрицающее возможность выполнения неравенств типа  $N_2 < 0$  и  $N_3 < 0$ ; для ясности добавим, что эта ошибка значительно раньше была обнаружена самим автором [8] и рассмотрена в работе [3].

Поступила 8 III 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С в е к л о В. А. Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. Ленингр. ун-та сер. матем. н., 1949, вып. 17.
2. Ф р а н к Ф., М и з е с Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2. М.—Л., ОНТИ, 1937.
3. О с и п о в И. О. К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1963, № 3.
4. А л е к с а н д р о в К. С., Р ы ж о в а Т. В. Упругие свойства кристаллов. Кристаллография, 1961, т. 6, вып. 2.
5. Х а т к е в и ч А. Г. К теории упругих волн в поперечно-изотропной среде. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, № 9.
6. M u s g r a v e M. J. P. On whether elastic wave surfaces possess cuspidal edges. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1957, vol. 53, No. 4.
7. А л е к с а н д р о в К. С. О поверхностях упругих волн в кристаллах. Кристаллография, 1958, т. 3, вып. 5.
8. О с и п о в И. О. Характер изменения скоростей распространения упругих волн в анизотропных средах. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1962, № 1.