О РАЗВИТИИ ПОЛОСТЕЙ В ВЯЗКИХ ТЕЛАХ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Рассматривается проблема развития полостей в вязких телах при конечных деформациях. В § 1 дана постановка задачи о развитии полости в условиях стационарного медленного течения ньютоновой вязкой жидкости. В § 2 получено точное решение задачи о расширении полости из начальной эллиптической. Рассмотрение ограничено случаем плоской задачи.

§ 1. **Вязкое тело.** Рассмотрим вязкое тело, подчиняющееся закону Ньютона и занимающее бесконечную область во внешности некоторого контура L (задача считается плоской). Внутренность контура L представляет собой некоторую полость, форма которой известна лишь в начальный момент приложения нагрузок. Предполагается следующее: а) стенки полости подвержены постоянному давлению $p(t)$; б) на бесконечности имеет место однородное напряженное состояние $\sigma_x = \sigma_x^\infty(t)$, $\sigma_y = \sigma_y^\infty(t)$, $\tau_{xy} = 0$ (t —время); в) контур полости в любой момент времени имеет две оси симметрии, совпадающие с осями неподвижной декартовой системы координат; г) течение медленное и квазистационарное, так что в уравнениях Навье — Стокса можно пренебречь инерционными членами. Для простоты ограничимся случаем несжимаемого тела, однако это допущение несущественно для дальнейшего изложения.

В рассматриваемом случае составляющие тензора напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} и компоненты вектора скорости u, v в системе координат xy могут быть представлены при помощи формул, аналогичных соотношениям Колосова — Мусхелишвили в плоской задаче теории упругости

$$\begin{gathered}\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\Phi(z, t) \qquad (z = x + iy)\\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z, t) + \Psi(z, t)]\\ 2\mu(u + iv) = \varphi(z, t) - z\overline{\varphi'(z, t)} - \overline{\psi(z, t)} \qquad (\Phi = \varphi',\ \Psi = \psi')\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь 2μ — коэффициент сдвиговой вязкости, $\varphi(z, t)$ и $\psi(z, t)$ — однозначные аналитические функции z в области, занятой телом; штрихом над буквой будем обозначать производную по соответствующей комплексной переменной.

На неизвестной границе полости, уравнение которой имеет вид $F(x, y, t) = 0$, должно выполняться условие кинематической совместности

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{1.2}$$

($F(x, y, 0)$ — заданная функция)

Кроме того, на контуре L должно выполняться условие

$$\varphi(z, t) + z\overline{\varphi'(z, t)} + \overline{\psi(z, t)} = -p(t)z \qquad (z \in L) \tag{1.3}$$

В бесконечно удаленной точке функции $\varphi(z, t)$ и $\psi(z, t)$ ведут себя так: при $z \to \infty$

$$\begin{gathered}\varphi(z, t) = {}^1\!/_4[\sigma_x^\infty(t) + \sigma_y^\infty(t)]z + O(z^{-1})\\ \psi(z, t) = {}^1\!/_2[\sigma_y^\infty(t) - \sigma_x^\infty(t)]z + O(z^{-1})\end{gathered} \tag{1.4}$$

Таким образом, поставленная задача сводится к краевой задаче (1.2) —(1.4).

Перейдем на внешность единичного круга параметрической плоскости ζ при помощи отображения $z = \omega(\zeta, t)$; аналитическая функция $\omega(\zeta, t)$ конформно отображает область $|\zeta| > 1$ на внешность контура L со взаимно-однозначным соответствием бесконечно удаленных точек, а также соответствующих участков действительных и мнимых осей. Следовательно,

$$\omega(\zeta, t) = c(t)\zeta + O(\zeta^{-1}) \qquad \text{при } \zeta \to \infty \tag{1.5}$$

где $c(t)$ — действительная функция.

При этом краевые условия (1.3), (1.4) на плоскости ζ запишутся в следующем виде:

$$\varphi_*(\zeta, t) + \frac{\omega(\zeta, t)}{\overline{\omega'(\zeta, t)}} \overline{\varphi_*'(\zeta, t)} + \overline{\psi_*(\zeta, t)} = -p(t)\,\omega(\zeta, t) \quad \text{при } |\zeta| = 1$$

$$\omega(\zeta, 0) = \omega_0(\zeta) \quad \text{при } t = 0 \tag{1.6}$$

$$\varphi_*(\zeta, t) = {}^1/_4\, c(t)\,[\sigma_x^\infty(t) + \sigma_y^\infty(t)]\,\zeta + O(\zeta^{-1}) \quad \text{при } \zeta \to \infty$$

$$\psi_*(\zeta, t) = {}^1/_2\, c(t)\,[\sigma_y^\infty(t) - \sigma_x^\infty(t)]\,\zeta + O(\zeta^{-1})$$

Здесь

$$\varphi_*(\zeta, t) = \varphi\,[\omega(\zeta, t), t],\ \psi_*(\zeta, t) = \psi\,[\omega(\zeta, t), t] \tag{1.7}$$

где $\omega_0(\zeta)$ — задаваемая функция.

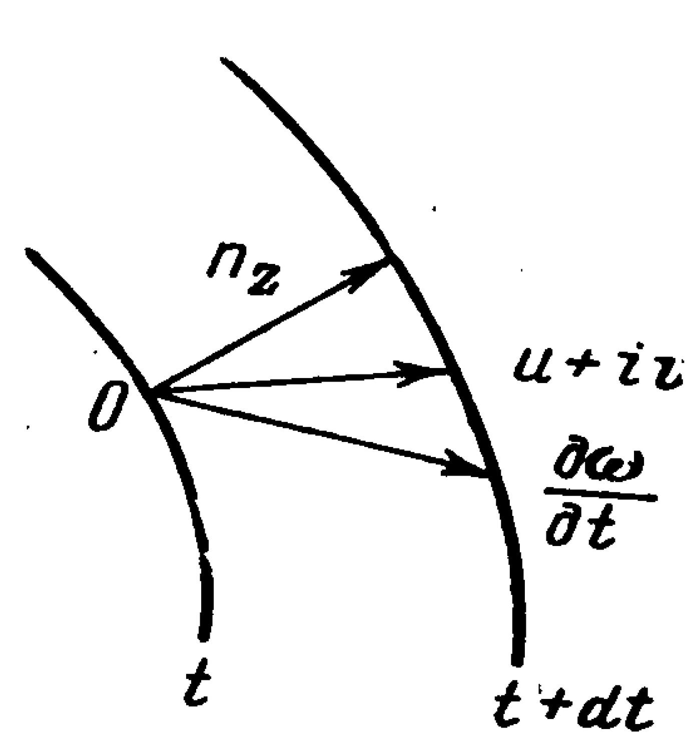
Функции $\varphi_*(\zeta, t)$, $\psi_*(\zeta, t)$ и $\omega(\zeta, t)$ подлежат определению.

Условие кинематической совместности удобно записать таким образом:

$$2\mu\,\mathrm{Re}\left[\zeta \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t}\,\omega'(\zeta, t)\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\zeta\omega'(\zeta, t)\left[\overline{\varphi_*(\zeta, t)} - \overline{\frac{\omega(\zeta, t)}{\omega'(\zeta, t)}}\,\varphi_*'(\zeta, t) - \psi_*(\zeta, t)\right]\right\} \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{1.8}$$

Условие (1.8) получается из следующих соображений (фиг. 1). Каждой точке O контура L в любой момент времени t соответствуют две скорости: а) скорость материальной частицы, находящейся в момент времени t в точке O; комплексный вектор этой скорости $(u + iv)$ определяется формулой (1.1); б) кинематическая скорость перемещения точки O самого контура L $(d\omega\,/\,dt)$, соответствующая одному и тому же значению параметра ζ, задающего положение точки O на кривой L в любой момент времени. Как следует из фигуры, на которой сравниваются два бесконечно близких положения контура L в малой окрестности точки O в моменты времени t и $t + dt$, проекции указанных двух векторов скорости на нормаль n_z к контуру L в точке O должны быть равны между собой. Теперь для доказательства (1.8) осталось лишь найти выражение для комплексного вектора единичной нормали n_z на L



$$n_z = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta, t)}{|\omega'(\zeta, t)|}\,\frac{d\zeta}{|d\zeta|} = \zeta\,\frac{\omega'(\zeta, t)}{|\omega'(\zeta, t)|}$$

и составить скалярное произведение a_n комплексного вектора $a = |a| \exp(i\alpha_1)$ на $n_z = \exp(i\alpha_2)$

$$a_n = |a| \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \mathrm{Re}(a\overline{n}_z)$$

Формулы (1.5) — (1.8) завершают постановку краевой задачи на плоскости ζ.

§ 2. **Эллиптическая полость.** Рассмотрим класс решений краевой задачи (1.5) — (1.8), в котором выполняется условие

$$2\mu\,\frac{\partial\omega}{\partial t} = \varphi_*(\zeta, t) - \frac{\omega(\zeta, t)}{\overline{\omega'(\zeta, t)}}\,\overline{\varphi_*'(\zeta, t)} - \overline{\psi_*(\zeta, t)} \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{2.1}$$

представляющее собой векторное равенство кинематической скорости и скорости материальной частицы на границе полости. При этом условие (1.8) выполняется тождественно.

Сложив (2.1) и (1.6), получим

$$-p(t)\,\omega(\zeta, t) + 2\mu\,\frac{\partial\omega}{\partial t} \doteq 2\varphi_*(\zeta, t) \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{2.2}$$

В силу принципа аналитического продолжения соотношение (2.2) должно выполняться также в полной плоскости ζ:

$$\varphi_*(\zeta,\ t) = \mu\frac{\partial\omega}{\partial t} - {}^1/{}_2 p(t)\,\omega(\zeta,\ t) \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.1) или в (1.6) и преобразуя, можно найти

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}\overline{\omega'(\zeta,\ t)} + \omega(\zeta,\ t)\overline{\frac{\partial^2\omega}{\partial t\,\partial\zeta}} = -\frac{1}{\mu}\overline{\psi_*(\zeta,\ t)\,\omega'(\zeta,\ t)} \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{2.4}$$

или

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}[\omega(\zeta,\ t)\overline{\omega'(\zeta,\ t)}] = -\overline{\psi_*(\zeta,\ t)\,\omega'(\zeta,\ t)} \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{2.5}$$

Введем вспомогательную аналитическую функцию $\Gamma(\zeta,\ t)$

$$\Gamma(\zeta,\ t) = -\frac{1}{\omega'(\zeta,\ t)}\left[\int_0^t \psi_*(\zeta,\ t)\,\omega'(\zeta,\ t)\,dt + \Gamma_0(\zeta)\right] \tag{2.6}$$

Функция $\Gamma_0(\zeta)$ несущественна и ее можно считать равной нулю. При помощи функции $\Gamma(\zeta,\ t)$ краевое условие (2.5) можно записать так:

$$\mu\omega(\zeta,\ t) = \overline{\Gamma(\zeta,\ t)} \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{2.7}$$

Решение краевой задачи (2.7) в классе функций, имеющих заданный порядок $O(\zeta)$ на бесконечности и удовлетворяющих условиям симметрии, будет следующим:

$$\omega(\zeta,\ t) = c(t)\,\zeta + \frac{b(t)}{\zeta}, \qquad \Gamma(\zeta,\ t) = \mu\left[b(t)\,\zeta + \frac{c(t)}{\zeta}\right] \tag{2.8}$$

Действительные функции $c(t)$ и $b(t)$ должны удовлетворять условиям (1.6) на бесконечности для функций $\varphi(\zeta,\ t)$ и $\psi(\zeta,\ t)$; при помощи (2.6), (2.8) и (2.3) из (1.6) находим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка по t относительно $c(t)$ и $b(t)$:

$$\begin{gathered} 2\mu\frac{d}{dt}[c(t)\,b(t)] + [\sigma_y^\infty(t) - \sigma_x^\infty(t)]\,[c(t)]^2 = 0 \\ 4\mu\frac{dc}{dt} - [2p(t) + \sigma_x^\infty(t) + \sigma_y^\infty(t)]\,c(t) = 0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

При $t = 0$ будет $c(t) = c_0$, $b(t) = b_0$, где b_0 и c_0 — заданные постоянные, определяющие форму полости в начальный момент нагружения; последняя согласно (2.8) представляет собой эллипс

$$\frac{x^2}{(1+m)^2} + \frac{y^2}{(1-m)^2} = c_0^2 \quad \left(m = \frac{b_0}{c_0}\right) \tag{2.10}$$

Решение дифференциальных уравнений (2.9), удовлетворяющее начальным условиям, запишем в виде

$$\begin{gathered} c(t) = c_0\exp\left[\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right] \\ b(t) = \left\{b_0 - c_0\int_0^t \gamma(\tau)\exp\left[2\int_0^\tau \lambda(\tau_1)\,d\tau_1\right]d\tau\right\}\exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right] \end{gathered} \tag{2.11}$$

Здесь

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\mu}[\sigma_y^\infty(t) - \sigma_x^\infty(t)], \qquad \lambda(t) = \frac{1}{4\mu}[2p(t) + \sigma_x^\infty(t) + \sigma_y^\infty(t)]$$

При помощи (2.8), (2.6) и (2.3) получаем искомые функции $\varphi_*(\zeta,\ t)$ и $\psi_*(\zeta,\ t)$ в следующем виде:

$$\begin{gathered} \varphi_*(\zeta,\ t) = \frac{\sigma_x^\infty(t) + \sigma_y^\infty(t)}{4}\,c(t)\,\zeta - \\ - \frac{1}{4\zeta}\{2c(t)\,[\sigma_y^\infty(t) - \sigma_x^\infty(t)] + b(t)\,[4p(t) + \sigma_x^\infty(t) + \sigma_y^\infty(t)]\} \\ \psi_*(\zeta,\ t) = \frac{A(t)\,(\zeta^3 - \zeta^{-1}) - \zeta B(t)}{c(t)\,\zeta^2 - b(t)} \end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь

$$A(t) = \mu\gamma(t)[c(t)]^2, \qquad B(t) = 2\mu\{\lambda(t)[b^2(t) + c^2(t)] + b(t)c(t)\gamma(t)\}$$

Формулы (2.8), (2.11), (2.12) дают точное решение задачи о развитии полости из начальной эллиптической; точные формулы, учитывающие сжимаемость материала и несимметрию задачи, легко получить совершенно аналогичным методом.

Напомним, что соответствующая линейная задача была решена Г. В. Колосовым и Инглисом для различных частных случаев, а в общем виде — Н. И. Мусхелишвили.

Как видно, контур полости в любой момент времени представляет собой эллипс с центром в начале координат

$$\frac{x^2}{[1+m(t)]^2} + \frac{y^2}{[1-m(t)]^2} = c^2(t) \qquad \left(m = \frac{b}{c}\right) \tag{2.13}$$

Рассмотрим некоторые наиболее интересные частные случаи общего решения.

1°. *Осесимметричная задача.* Пусть в любой момент времени выполняется равенство $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty$. Тогда

$$\gamma(t) = m(t) = 0, \quad \lambda(t) = \frac{1}{2\mu}[p(t) + \sigma_x^\infty(t)] \tag{2.14}$$

Полость представляет собой круг

$$x^2 + y^2 = c_0^2 \exp\left\{\frac{1}{2\mu}\int_0^t [p(\tau) + \sigma_x^\infty(\tau)]\, d\tau\right\} \tag{2.15}$$

2°. *Одноосное растяжение начальной круговой полости.* Пусть будет $p(t) = \sigma_x^\infty(t) = 0$, $b_0 = 0$, $\sigma_y^\infty(t) = \sigma = \mathrm{const}$. Тогда

$$m(t) = -1 + \exp\left(-\frac{\sigma t}{2\mu}\right), \quad c(t) = c_0 \exp\left(\frac{\sigma t}{4\mu}\right) \tag{2.16}$$

Контур полости сужается в направлении оси x и расширяется в направлении растяжения, стремясь при $t \to \infty$ к разрезу вдоль оси y.

3°. *Одноосное растяжение начального разреза.* Пусть выполняются соотношения:

$$b_0 = c_0, \quad \sigma_x^\infty = p = 0, \quad \sigma_y^\infty(t) = \sigma = \mathrm{const}$$

т. е. тело подвергается одноосному растяжению вдоль оси y постоянным напряжением; в начальный момент в теле имеется разрез нулевой толщины длины $4c_0$ вдоль оси x. Согласно общим формулам (2.11) и (2.13) получаем

$$m = 2\exp\left(-\frac{\sigma t}{2\mu}\right) - 1, \quad c = c_0 \exp\left(\frac{\sigma t}{4\mu}\right) \tag{2.17}$$

Таким образом, разрез превращается в эллипс, который с течением времени сужается в направлении x и расширяется в направлении растяжения, стремясь при $t \to \infty$ к разрезу вдоль оси y. Приведем еще величину напряжения в наиболее напряженной точке $x = (1 + m)c$, $y = 0$

$$\sigma_y = \sigma \operatorname{cth} \frac{\sigma t}{4\mu} \tag{2.18}$$

Интересно, что в этой точке напряжение при малых относительных временах не зависит от приложенной внешней нагрузки σ (своеобразная «локальная пластичность»)

$$\sigma_y = \frac{4\mu}{t} \quad \text{при } \sigma t \ll 4\mu \tag{2.19}$$

Распределение напряжений и скоростей в окрестности конца разреза на расстояниях, больших по сравнению с радиусом кривизны эллипса в точке $x = (1 + m)c$, $y = 0$, но малых по сравнению с длиной начального разреза $4c_0$, при малых относительных временах нагружения $\sigma t \ll 4\mu$ такое же, как распределение соответствующих напряжений и смещений в линейной теории упругости.

Полученные качественные результаты, по-видимому, в определенной мере, справедливы также для вязко-упругих тел.

Поступила 30 XII 1968