# О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В ПЛАСТИНКАХ, УСИЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

А. И. Каландия

(Тбилиси)

Задачу об усилиях в пластинке, передаваемых через ребро жесткости, обычно рассматривают при различного рода упрощающих предположениях (см., например, [1-5]).

Ниже предлагается достаточно простой способ эффективного построения решений такого рода задач; этот подход, основанный на известных методах решения плоских задач, позволяет строить решение в конечном виде.

Решение находится в интегралах типа Коши, плотность которых определяется при помощи преобразования Фурье.

1. Способ решения приведем на примере упругой полуплоскости, усиленной полубесконечным прямолинейным стрингером (ребром жесткости), непрерывно прикрепленным к ней вдоль границы.

Будем считать, что напряжения (в пластинке и стрингере) вызваны одной единственной осевой силой, приложенной в конце стрингера.

Расположим пластинку в нижней полуплоскости плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ и совместим стрингер с положительной частью вещественной оси; одним концом стрингер будет иметь начало координат, а другим он уходит в бесконечность.

Пусть будут $E$ и $\nu$ — упругие постоянные пластинки, $E_0$ — модуль упругости стержня, $h$ — толщина пластинки, $S_0$ — поперечное сечение стержня, предполагаемое постоянным. Через $p_0$ обозначим величину внешней силы, приложенной в конце стержня и направленной по оси $x$. Остальные обозначения, используемые ниже, общеприняты.

Часть границы полуплоскости левее от начала координат по условию не нагружена. Поэтому краевые условия здесь будут

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \qquad x < 0 \tag{1.1}$$

Краевые условия на остальной части границы, где пластинка сопряжена со стрингером, будут заключаться в условиях равновесия любой части $(0, x)$ последнего, задаваемых следующими двумя равенствами:

$$\begin{gathered} p_0 - h\int_0^x \tau_{xy}\,dt + k\sigma_x = 0 \\ -h\int_0^x \sigma_y\,dt = 0, \qquad x > 0; \qquad k = \frac{E_0 S_0}{E} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Эти два равенства вместе дадут

$$p_0 - h\int_0^x (\tau_{xy} + i\sigma_y)\,dt + k\sigma_x = 0 \qquad (x > 0) \tag{1.3}$$

Воспользуемся известными представлениями Колосова — Мусхелишвили [6]

$$\begin{gathered} \sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar z\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{gathered} \tag{1.4}$$

и формулой Н. И. Мусхелишвили (там же)

$$-i\int_0^t (\tau_{xy} + i\sigma_y)\,d\tau = \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + \text{const} \tag{1.5}$$

На основании этих формул краевым условиям (1.1), (1.3) рассматриваемой задачи, опуская несущественные постоянные, придадим вид

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0 \quad (t < 0) \tag{1.6}$$

$$ip_0 + h\,[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} \quad \overline{\psi(t)}] + \tag{1.7}$$
$$+ ik\mathrm{Re}[\varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)} - \overline{t\varphi''(t)} - \overline{\psi'(t)}] = 0 \quad (t > 0)$$

По физическому смыслу задачи совершенно ясно, что напряжения не будут ограниченными в замкнутой полуплоскости. В точке $z = 0$, где на пластинку действует нагрузка через стрингер, они могут обратиться в бесконечность порядка ниже единицы. При больших же $|z|$ ввиду отсутствия внешних усилий в бесконечно удлиненных частях среды напряжения будут исчезающе малы.

Подсчитаем главный вектор внешних усилий, приложенных к границе полуплоскости. На основании (1.1) и (1.2) имеем

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}\, dt = \frac{p_0}{h}, \qquad Y = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y\, dt = 0 \tag{1.8}$$

Наличие отличного от нуля главного вектора согласно представлениям Н. И. Мусхелишвили, влечет за собой неограниченность комплексных потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$ на бесконечности; при больших $|z|$ потенциалы будут иметь вид ([6], стр. 346)

$$\varphi(z) = -\frac{X}{2\pi}\ln z + \varphi_0(z), \qquad \psi(z) = \frac{X}{2\pi}\ln z + \psi_0(z) \tag{1.9}$$

где $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — голоморфные в полуплоскости функции, допускающие асимптотику

$$\varphi_0(z) = o(1) + \mathrm{const}, \qquad \psi_0(z) = o(1) + \mathrm{const} \tag{1.10}$$

Согласно предположению о характере напряжений в окрестности точки $z = 0$ граничные значения функции $\varphi'(z)$ может допускать в этой точке сингулярность порядка ниже единицы.

Наряду с нижней полуплоскостью, которую сейчас обозначим через $S^-$, введем в рассмотрение верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im} z > 0$, обозначаемую ниже через $S^+$. Следуя Н. И. Мусхелишвили [6], распространим определение функции $\varphi(z)$ на верхнюю полуплоскость $S^+$, полагая

$$\varphi(z) = -z\overline{\varphi}'(z) - \overline{\psi}(z) \quad \text{при } z \quad \text{в } S^+ \tag{1.11}$$

На основании граничного условия (1.6) легко догадаться, что функция (1.11) голоморфная в $S^+$, аналитически продолжает значения комплексного потенциала $\varphi(z)$ из $S^-$ через полуось $(-\infty, 0)$.

Доопределенная таким образом функция, которую снова обозначим через $\varphi(z)$, будет кусочно-голоморфной в области $S$, представляющей собой всю плоскость $z$, разрезанную вдоль полуоси $(0, \infty)$. Через нее из (1.11) может быть выражена функция $\psi(z)$ в следующем виде:

$$\psi(z) = -\overline{\varphi}(z) - z\varphi'(z) \quad \text{при } z \text{ в } S^- \tag{1.12}$$

Формулы (1.11) и (1.12) позволяют утверждать, что представление (1.9) справедливо и для кусочно-голоморфной функции $\varphi(z)$.

Рассматривая плоскость, разрезанную вдоль положительной части вещественной оси, будем различать один от другого верхний и нижний берега разреза и будем приписывать величинам, относящимся к этим берегам, знаки плюс и минус соответственно.

Функции $\psi(t)$, $\psi'(t)$ (вернее $\psi^-(t)$, $\psi'^-(t)$) в граничных условиях (1.6), (1.7) заменим их значениями (1.12). Тогда эти условия примут вид

$$\varphi^-(t) - \varphi^+(t) = 0, \qquad t < 0 \tag{1.13}$$
$$ip_0 + h\,[\varphi^-(t) - \varphi^+(t)] + ik\mathrm{Re}[\varphi'^+(t) + 3\varphi'^-(t)] = 0, \quad t > 0$$

Для решения этой задачи положим в области $S$

$$\varphi(z) = -\frac{X}{2\pi}\ln z + \varphi_0(z), \qquad \varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{\omega(\tau)\,d\tau}{\tau - z} \tag{1.14}$$

Здесь $\omega(\tau) = \mu(\tau) + i\nu(\tau)$ — новая искомая функция на $[0, \infty)$, а под $\ln z$ подразумевается определенная ветвь этой функции, принимающая, скажем, вещественные значения на верхнем берегу разреза.

Относительно функции $\omega(\tau)$ будем предполагать, что она вместе со своей производной первого порядка удовлетворяет условию Гельдера на любом конечном отрезке, не имеющем своим концом $\tau = 0$, и, что $\omega(\tau)$ принадлежит классу $L_p(0, \infty)$ при некотором $p > 1$, а $\omega'(\tau)$ — классу $L(0, \infty)$. В результате имеем

$$\varphi_0'(z) = -\frac{\omega(0)}{2\pi i z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{\omega'(\tau)\,d\tau}{\tau - z}$$

$$\varphi_0^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\,\omega(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{\omega(\tau)\,d\tau}{\tau - t} \tag{1.15}$$

$$\varphi_0'^{\pm}(t) = -\frac{\omega(0)}{2\pi i t} \pm \frac{1}{2}\,\omega'(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{\omega'(\tau)\,d\tau}{\tau - t} \qquad (t > 0)$$

Если предыдущие выражения для граничных значений функции $\varphi(z)$ и ее производной внести в (1.13) и учесть при этом, что

$$\varphi^-(t) - \varphi^+(t) = -\omega(t) - \frac{X}{2\pi}[\ln^- t - \ln^+(t)] = -\omega t - iX = -\omega(t) - \frac{ip_0}{h}$$

получим

$$h\omega(t) + ik\left\{\frac{2\,[X + \nu(0)]}{\pi t} + \mu'(t) - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\nu'(\tau)\,d\tau}{\tau - t}\right\} = 0 \tag{1.16}$$

Попытаемся определить величину $\nu(0)$. Согласно (1.4) имеем

$$\tau_{xy}^- = \mathrm{Im}\,\{t\varphi''^-(t) + \psi'^-(t)\}$$

Если функцию $\psi'^-(t)$ заменить здесь ее выражением из (1.12), то правая часть равенства преобразуется к виду

$$\mathrm{Im}\,\{t\varphi''^-(t) + \psi'^-(t)\} = -\mathrm{Im}\{\overline{\varphi'^+(t)} + \varphi'^-(t)\}$$

Для предельных значений функции $\varphi'(z)$ в предыдущем равенстве воспользуемся формулами (1.15) Сахоцкого — Племеля. В результате получим

$$\tau_{xy}^- = \nu'(t) \tag{1.17}$$

Обратимся теперь к первому равенству (1.2). В силу (1.17) оно примет вид

$$p_0 - h\,[\nu(x) - \nu(0)] + k\sigma_x = 0 \qquad (x > 0)$$

Предельный переход здесь при $x \to \infty$ определяет $\nu(0)$ в следующем виде:

$$\nu(0) = -\frac{p_0}{h} \tag{1.18}$$

Заметим теперь, что в силу (1.8) и (1.18) первый член в фигурных скобках в (1.16) выпадает, и уравнение (1.16) после отделения в нем вещественных и мнимых частей представится в виде двух уравнений

$$\mu(t)=0, \quad \nu(t)-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty \frac{\nu'(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=0 \quad \left(\lambda=\frac{2k}{h}=\frac{2E_0S_0}{Eh}\right) \tag{1.19}$$

Таким образом, для определения плотности интеграла (1.14) получено однородное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (1.19) при условии (1.18).

*Примечание.* Уравнению (1.19) легко придать вид неоднородного сингулярного интегрального уравнения. В самом деле, из равенства (1.17) и (1.18) следует:

$$\nu(t)=\int_0^t \tau_{xy}^-\,d\tau-\frac{p_0}{h}$$

Внося это выражение вместе с (1.17) в (1.19), находим

$$\frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau_{xy}^-\,d\tau}{\tau-t}-\int_0^t \tau_{xy}^-\,d\tau+\frac{p_0}{h}=0 \tag{1.20}$$

Уравнение (1.20) из других соображений было получено в работе Койтера [4].

2. Попытаемся применить к решению (1.19) метод Винера — Хопфа. Наряду с (1.19) введем в рассмотрение следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$g(t)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{g'(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=b(t), \quad -\infty<x<\infty \tag{2.1}$$

при дополнительном условии

$$g(0)=a \qquad (a=-p_0/h) \tag{2.2}$$

При этом

$$b(t)=0 \quad \text{при } t\geqslant 0, \qquad b(t)=-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{g'(\tau)\,d\tau}{\tau-t} \quad \text{при } t<0 \tag{2.3}$$

Если бы производная от функции

$$g(t)=\begin{cases}\nu(t), & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{2.4}$$

где $\nu(t)$ — решение уравнения (1.19) с требуемыми свойствами, была суммируема на оси, то уравнения (1.19) и (2.1) были бы эквивалентны между собой. Производная же $g'(t)$, как это явствует из определения (2.4), представляет собой сумму интегрируемой функции и функции типа $\delta(t)$. Поэтому, чтобы получить нужное решение $\nu(t)$ уравнения (1.19) из (2.1), следует отказаться от предположения о суммируемости производной решения (2.1) и производить все необходимые операции над этим решением чисто формально.

В дальнейшем воспользуемся преобразованием Фурье. Условимся обозначать функции малыми буквами, а их преобразование Фурье — теми же, но заглавными буквами. На основании (2.1) — (2.3) имеем

$$\int_{-\infty}^\infty g'(\tau)\,e^{it\tau}\,d\tau=e^{it\tau}g(\tau)\,|_0^\infty-it\int_0^\infty g(\tau)\,e^{it\tau}\,d\tau=-a-itG(t) \tag{2.5}$$

Кроме того

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{ixt}\,\frac{dx}{x-\tau}=i\ \mathrm{sig}\ te^{it\tau} \tag{2.6}$$

Производя преобразования Фурье над обеими частями равенства (2.1) и принимая во внимание (2.5) и (2.6), будем иметь

$$G(t) - i\lambda\,[a + itG(t)]\operatorname{sig} t = B(t) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Функции $G(t)$ и $B(t)$ в силу их определения будут представлять собой предельные значения функций $G(t)$ и $B(z)$, голоморфных соответственно в $S^+$ и $S^-$. Поэтому предыдущее равенство можно записать и так:

$$G^+(t)[1 + \lambda|t|] = B^-(t) + i\lambda a \operatorname{sig} t \qquad (-\infty<t<\infty) \tag{2.7}$$

Таким образом, для определения искомого преобразования Фурье $G(t)$ решения (2.1) получена задача линейного сопряжения (2.7) на оси.

Коэффициент при $G^+(t)$ в (2.7) представим в виде

$$1 + \lambda|t| = \frac{1 + \lambda|t|}{\sqrt{1 + \lambda^2 t^2}}\sqrt{1 + i\lambda t}\,\sqrt{1 - i\lambda t}$$

и введем в рассмотрение каноническое решение $X(z)$ вспомогательной задачи линейного сопряжения

$$X^+(t) = \frac{1 + \lambda|t|}{\sqrt{1 + \lambda^2 t^2}}\,X^-(t) \qquad (-\infty<t<\infty) \tag{2.8}$$

В качестве $X(z)$ может быть взята функция

$$X(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{1 + \lambda|\tau|}{\sqrt{1 + \lambda^2\tau^2}}\,\frac{d\tau}{\tau - z}\right] \tag{2.9}$$

Легко убедиться, что $X(z)$ удовлетворяет граничному условию (2.8), не обращается в нуль нигде, включая вещественную ось, и, при $|z| \to \infty$ в замкнутых полуплоскостях равен

$$X^{\pm}(\infty) = 1 \tag{2.10}$$

Представим теперь граничное условие (2.7) в виде

$$G^+(t)\sqrt{1 - i\lambda t}\,X^+(t) = \frac{B^-(t)\,X^-(t)}{\sqrt{1 + i\lambda t}} + \frac{i\lambda a X^-(t)\operatorname{sig} t}{\sqrt{1 + i\lambda t}} \tag{2.11}$$

Отсюда немедленно следует:

$$\sqrt{1 - i\lambda z}\,X(z)\,G(z) = \frac{\lambda a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X^-(t)\operatorname{sig} t}{\sqrt{1 + i\lambda t}}\,\frac{dt}{t - z} \qquad \text{при } z \text{ в } S^+$$

или на основании известной теоремы Коши

$$\sqrt{1 - i\lambda z}\,X(z)\,G(z) = \frac{\lambda a}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{X^-(t)}{\sqrt{1 + i\lambda t}}\,\frac{dt}{t - z} \qquad \text{при } z \text{ в } S^+ \tag{2.12}$$

Определим теперь преобразование Фурье-функции $g'(t)$. Назовем его $G_1(t)$ и заметим, что значения этой функции представляют собой граничные значения $G_1^+(t)$ функции, голоморфной от $z$ в $S^+$. Приняв это во внимание, перепишем равенство (2.5) в эквивалентной форме

$$G_1(z) = -a - izG(z) \tag{2.13}$$

Подставляя сюда $G(z)$ из (2.12), находим

$$G_1(z) = -a + \frac{\lambda a z}{\sqrt{1 - i\lambda z}\,X(z)}\,\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty} \frac{X^-(t)}{\sqrt{1 + i\lambda t}}\,\frac{dt}{t - z} \tag{2.14}$$

Вычислим предел функции $G_1(z)$, тогда точка $z$ удаляется в бесконечность, оставаясь все время в верхней полуплоскости. Для облегчения вычислений произведем в (2.14) замену переменной $z$, а также замену переменной интегрирования

$$z = -1/\zeta, \qquad t = -1/\tau \tag{2.15}$$

Преобразованием (2.15) верхняя полуплоскость плоскости $z$ перейдет в верхнюю же полуплоскость плоскости $\zeta$, вещественная ось — в вещественную, а окрестность бесконечно удаленной точки — в окрестность точки $\zeta = 0$. Равенство (2.14) преобразуется при этом к виду

$$G_1^*(\zeta) + a = -\frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\theta + i\lambda X^*(\zeta)}}\frac{\lambda a}{\pi i}\int_0^\infty \frac{X^{*-}(\tau)}{\sqrt{\tau(\tau - i\lambda)}}\frac{d\tau}{\tau - \zeta} \tag{2.16}$$

$$G_1^*(\zeta) = G_1(z), \qquad X^*(\zeta) = X(z)$$

Для оценки (2.16) при малых $|\zeta|$ воспользуемся формулой Н. И. Мусхелишвили, характеризующей поведение интеграла типа Коши вблизи концов линий интегрирования ([7], стр. 78, формула (29.5)) и предельным равенством (2.10). Для точек $\zeta$, лежащих в окрестности начала координат на разрезанной плоскости, справедлива формула

$$G_1^*(\zeta) + a = -a + o(1) \tag{2.17}$$

Отсюда, возвращаясь к (2.14), заключаем, что голоморфная в $S^+$ функция $G_0(z)$, определяемая равенством

$$G_0(z) = G_1(z) + 2a = a + \frac{\lambda a z}{\sqrt{1 - i\lambda z X(z)}}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{X^-(t)}{\sqrt{1 + i\lambda t}}\frac{dt}{t - z} \tag{2.18}$$

исчезает на бесконечности. Граничные ее значения $G_0^+(t)$ будут представлять собой преобразование Фурье искомой функции $\nu'(t)$

$$\nu'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_0^+(\tau)\, e^{-it\tau}\, d\tau \tag{2.19}$$

Предыдущее выражение определяет по формулам (1.14) кусочно-голоморфную функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую всем требованиям задачи.

Автор весьма признателен Г. А. Джанашия и Р. Д. Банцури за полезное обсуждение содержания этого пункта.

Аналогично решается задача о внутреннем полубесконечном стрингере в неограниченной пластинке [3, 4].

Поступила 24 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur theorie geschweisster Verbindungen. Ing. Arch., 1932, vol. 3, No 2, p. 123.
2. Buel E. L. On the distribution of plane stress in a semiinfinite plate with partially stiffened edge. J. math. and phys., 1948, vol. 26, No. 4, p. 223.
3. Brown E. H. The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet. Proceed. of the Roy. Soc., London, Ser. A, 1957, vol. 239, No. 1218, p. 296.
4. Koiter W. T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. j. mech. and appl. math., 1955, vol. 8, No 2, p. 164.
5. Sanders J. L., Jr. Effect of a stringer on the stress concentration due to a crack in a thin sheet. NASA, Techn. Rep., 1959, R-13.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.—Л., Гостехтеориздат, 1946.