Теорема 5.2. Если $f \in W_p^{4-1/p}(-1,1) \cap C_{7+\alpha}(-1, R-1) \cap C_{7+\alpha}(1-R, 1)$, $f_1 \in W_p^{3-1/p}(-1,1) \cap C_{6+\alpha}(-1, R-1) \cap C_{6+\alpha}(1-R, 1)$, $p > 2$, $0 < \alpha < 1$, и $f(\pm 1) = f'(\pm 1) = f''(\pm 1) = f'''(\pm 1) = f_1(\pm 1) = f_1'(\pm 1) = f_1''(\pm 1) = 0$, то решение u задачи (1.1), (1.2) единственным образом представимо в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [c_k^{(1)} a_k^{(1)}(y) \cos \lambda_k^{(1)} x + c_k^{(2)} a_k^{(2)}(y) \cos \lambda_k^{(2)} x] \tag{5.9}$$

6. Представление функции $u(x, y)$ в виде ряда (5.9) дает возможность проанализировать ее поведение при стремлении относительной ширины прямоугольника $ABCD$ к нулю, т. е. при $h \to \infty$.

Теорема 6.1. Если выполнены условия теоремы 5.2, то функция $u(x, y)$, являющаяся решением задачи (1.1), (1.2), равномерно исчезает вместе со всеми производными при $h \to \infty$ во всякой ограниченной подобласти прямоугольника $ABCD$.

В представлении (5.9), как показано в [1], $c_k = O(e^{-k\pi h} k^{-5/2})$, $a_k(y) = O(k^{3/2})$, $\cos \lambda_k x = O(e^{k\pi|x|})$, так что, если $h \to \infty$, а x остается ограниченным, то каждый член ряда (5.9) экспоненциально убывает, что и доказывает теорему 6.1.

Поступила 12 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Ковальчук В. Е. О базисных свойствах одной системы однородных решений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
4. Слободецкий Л. М. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, т. 197.
5. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
7. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., Гостехиздат, 1954.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.

О МЕТОДЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. Я. Попов
(Одесса)

Показывается, что применение ортогональных многочленов к контактным задачам [1–12] тесно связано с наличием некоторого специального класса так называемых полиномиальных ядер [13]. В работах [4,6,14,15] различными путями были построены частные случаи таких ядер. Указывается один способ построения полиномиальных ядер, на основе которого получаются как все ранее построенные ядра, так и более общие.

§ 1. **Сущность метода ортогональных многочленов.** Известно, что пространственные контактные задачи без сил трения можно свести к двумерному интегральному уравнению первого рода. К этому уравнению приходится добавлять еще и дифференциальное уравнение, если контактируется не штамп, а пластинка. Для таких областей контакта как полуплоскость, полоса, круг, кольцо путем применения того или иного интегрального преобразования можно указанную двумерную систему уравнений привести к одномерной. При этом в случае контакта штампа будем иметь только одно одномерное интегральное уравнение первого рода. В случае же контакта пластинки получим систему из указанного уравнения и обыкновенного дифференциального уравнения. Эту последнюю путем использования функции Грина для упомянутого дифференциального уравнения также легко привести к одному интегральному уравнению первого рода. Как это делается практически можно усмотреть на примере решения одной плоской контактной задачи в работе [12].

Таким образом, пространственные контактные задачи для перечисленных областей, а также плоские с одним участком контакта (иногда и с двумя) можно привести к решению интегрального уравнения первого рода

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1.1}$$

заданного либо на конечном, либо полубесконечном интервале.

Те же задачи, но с учетом поверхностной структуры контактируемых тел в постановке И. Я. Штаермана [16] сводятся к аналогичному интегральному уравнению второго рода

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1.2}$$

Чтобы описать сущность метода ортогональных многочленов применительно к уравнениям (1.1) и (1.2), введем специальный класс ядер, фиксируемый следующим определением. Функцию $\Pi(x, y)$ будем называть полиномиальным ядром или кратко П-ядром на интервале (a, b), если имеют место соотношения

$$\int_a^b \Pi_{\pm}(x, y)\,p_{\pm}(y)\,\pi_n^{\pm}(y)\,dy = \sigma_n g_{\pm}(x)\,\pi_n^{\mp}(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b,\ \sigma_n \neq 0;\quad n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\Pi_+(x, y) = \Pi(x, y), \qquad \Pi_+(x, y) = \Pi(y, x) \tag{1.3}$$

Здесь $\pi_n^{\pm}(x)$ — многочлены точной степени n, т. е. коэффициенты при старших степенях $k_n^{\pm} \neq 0$, причем для определенности будем считать $\operatorname{Re} k_n^{\pm} > 0$. Указанные многочлены ортонормированы в том смысле, что

$$\int_a^b \pi_n^{\pm}(x)\,\pi_m^{\pm}(x)\,w_{\pm}(x)\,dx = \delta_{mn}, \qquad w_{\pm}(x) = p_{\pm}(x)\,g_{\mp}(x) \tag{1.4}$$

При этом весовые функции могут быть комплекснозначными. В дальнейшем соотношения (1.3), ради удобства, будем называть спектральными [1].

Если весовые функции $w_{\pm}(x)$ не отрицательны и выполнено условие

$$\int_a^b\int_a^b \left| \frac{p_-(x)}{g_+(x)}\,\Pi^2(x, y)\,\frac{p_+(y)}{g_-(y)} \right| dx dy < \infty \tag{1.5}$$

то П-ядро будем считать гильбертовым.

Введем ядро

$$H(x, y) = \left(\frac{p_-(x)}{g_+(x)}\right)^{1/2} \Pi(x, y) \left(\frac{p_+(y)}{g_-(y)}\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

и ортонормированные системы функций

$$\varphi_n^{\pm}(x) = \sqrt{w_{\pm} x}\,\pi_n^{\pm}(x), \qquad \int_a^b \varphi_n^{\pm}(x)\,\varphi_m^{\pm}(x)\,dx = \delta_{mn} \tag{1.7}$$

---

[1] Это соотношение действительно будет определять дискретный спектр интегрального опаратра с ядром $\Pi(x, y)$, домноженным на некоторые весовые функции, если $\Pi(x, y) = \Pi(y, x)$.

Тогда соотношения (1.3) можно записать в виде

$$\int_a^b H(x, y)\,\varphi_n^{\pm}(y)\,dy = \sigma_n\varphi_n^{\mp}(x), \qquad \int_a^b H(y, x)\,\varphi_n^{\mp}(y)\,dy = \sigma_n\varphi_n^{\pm}(x) \tag{1.8}$$

Теперь, если учесть, что условие (1.5) эквивалентно принадлежности ядра $H(x, y)$ пространству L_2, то из (1.8) согласно теории Шмидта (см., например, [17]), будет следовать сходящееся в среднем билейное разложение ядра $H(x, y)$ по ортонормированным функциям $\varphi_n^{\pm}(x)$. А это означает, что для гильбертовых ядер всегда справедливо такое билинейное разложение:

$$\Pi(x, y) = g_+(x)\,g_-(y) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n\pi_n^-(x)\,\pi_n^+(y) \tag{1.9}$$

Пусть теперь требуется построить решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_a^b \Pi(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1.10}$$

Разлагая правую часть в ряд

$$f(x) = g_+(x) \sum_{n=0}^{\infty} f_n\pi_n^-(x), \qquad f_n = \int_a^b p_-(x)\,\pi_n^-(x)\,f(x)\,dx$$

и учитывая (1.3), найдем формально

$$\varphi(x) = p_+(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\sigma_n}\pi_n^+(x) \tag{1.11}$$

Полученное решение и в строгом смысле будет являться решением (сходимость понимается в среднем взвешенном) уравнения (1.10), если $\Pi(x, y)$ — гильбертово ядро, и, кроме того, сходится ряд из чисел $|f_n\sigma_n^{-1}|^2$, $n = 0, 1, 2\ldots$ Если уравнение задано на конечном интервале, то в силу полноты в L_2 системы многочленов [18], построенное решение будет и единственным [17] в L_2. В случае полубесконечного интервала это будет иметь место в случае весовых функций, обеспечивающих полноту соответствующих π-многочленов [18].

Для решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b \Pi(x, y)\,p(y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{1.12}$$

с гильбертовым П-ядром надлежит воспользоваться билинейным разложением (1.9). В результате почленного интегрирования решение получим в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda q_+(x) \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m\varphi_m\pi_m^-(x)$$
$$\left(\varphi_m = \int_a^b g_-(y)\,\pi_m^+(y)\,p(y)\,\varphi(y)\,dy\right) \tag{1.13}$$

При этом коэффициенты φ_m найдутся из следующей бесконечной системы алгебраических уравнений:

$$\varphi_n + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m a_{nm}\varphi_m = f_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.14}$$

$$a_{nm} = \int_a^b g_+(x)\,g_-(x)\,p(x)\,\pi_n^+(x)\,\pi_m^-(x)\,dx, \qquad f_n = \int_a^b g_-(x)\,\pi_n^+(x)\,p(x)\,f(x)\,dx \tag{1.15}$$

полученной из соотношения (1.13) путем умножения его на $\pi_n^+(x)g_-(x)p(x)$ и интегрирования по x на (a, b). Построенное формальным путем решение можно обосновать, если привлечь методы гильбертова пространства.

Будем считать интервал конечным и полагать

$$|\pi_n^+(x)| < A \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \int_a^b \left| \frac{q_+(x)}{p_-(x)} p^2(x) g_-^2(x) \right| dx = J^2 < \infty \quad (1.16)$$

Тогда бесконечная система будет вполне регулярной, если

$$\lambda ABJ < 1 - \varepsilon \quad \left(B^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_n|^2\right) \tag{1.17}$$

Число $B < \infty$ в силу гильбертовости ядра [17]. Этот результат следует из оценки

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} |\sigma_m| |a_{nm}|\right)^2 \leqslant B^2 \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}|^2 = B^2 \int_a^b |h(x)\varphi_n^+(x)|^2 dx \tag{1.18}$$

Последнее равенство вытекает из представления

$$a_{nm} = \int_a^b h(x)\varphi_n^+(x)\varphi_m^-(x), \qquad h^2(x) = \frac{g_+(x)g_-(x)}{p_+(x)p_-(x)} p(x)$$

полученного из (1.15) переходом к ортонормированным функциям (1.7). Именно из этого представления видно, что a_{nm} представляют собой коэффициенты Фурье функции $h(x)\varphi_n^+(x)$, принадлежащей в силу второго условия (1.16) пространству $L_2(a, b)$. Наконец, оценка интеграла в (1.18) с использованием обоих условий (1.16) приводит к (1.17). Коэффициенты f_n ($n = 0,1,2$) будут ограничены в совокупности, если $\sqrt{q_-(x)}\,[p_+(x)]^{-1/2} f(x)p(x) \in L_2(a, b)$, так как будут представлять коэффициенты Фурье указанной функции по системе $\varphi_n^+(x)$. Разумеется, в конкретных случаях можно указать более тонкие условия регулярности [4]. Отметим, что метод ортогональных многочленов бывает полезным [19] и для отыскания спектра уравнения (1.12).

С интегральными уравнениями типа (1.10) приходится встречаться в контактных задачах [4,7,9] для упругого полупространства (как однородного, так и с переменным по степенному закону модулем упругости). Те же задачи, но с учетом поверхностной структуры контактируемых тел приводятся к уравнениям типа (1.12).

В применении к общему случаю (1.1) метод ортогональных многочленов заключается в следующем. Из ядра уравнения (1.1) отщепляется П-ядро, т. е.

$$K(x, y) = \Pi(x, y) + D(x, y) \tag{1.19}$$

и решение строится в виде ряда

$$\varphi(x) = p_+(x) \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m \pi_m^+(x) \tag{1.20}$$

Для отыскания коэффициентов φ_m следует подставить (1.19) и (1.20) в (1.1). После использования спектральных соотношений (1.3) следует обе части умножить на $p_-(x)\pi_n^-(x)$ и проинтегрировать в интервале (a, b). В результате получим бесконечную систему уравнений

$$\sigma_n\varphi_n + \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm}\varphi_m = f_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.21}$$

$$d_{nm} = \int_a^b\int_a^b \frac{\pi_n^-(x)\pi_m^+(y)D(x, y)}{[p_-(x)p_+(y)]^{-1}} dxdy, \qquad f_n = \int_a^b p_-(x)\pi_n^-(x)f(x)\,dx$$

Для придания строгости этим формальным построениям следует привлечь методы гильбертова пространства. Условия регулярности системы (1.21) в общем случае получить затруднительно. Однако для достаточно широкого класса ядер, охватывающего большой круг контактных задач, удается показать ее квази вполне регулярность [11]. Как практически получить представление (1.19) показано в работах [2-5,7,8,11]. При этом всегда в применениях к контактным задачам оказывается, что П-ядро несет сингулярность ядра уравнения, а функция $D(x, y)$ в худшем случае оказывается непрерывной, а чаще всего сколь угодно раз дифференцируемой.

Можно легко убедиться, что коэффициенты d_{nm} определяют представление функции $D(x, y)$ в виде двойного ряда по $\pi_n^{\pm}$-многочленам. Если удержать в указанном ряду конечное число членов, то придем к следующей аппроксимации:

$$D(x, y) \approx g_+(x) g_-(y) \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} d_{nm} \pi_n^-(x) \pi_m^+(y) \tag{1.22}$$

Тогда, очевидно, для отыскания φ_m $(m = 0, 1, .., N)$, если довольствоваться приближенным ответом, будем иметь конечную систему уравнений

$$\sigma_n \varphi_n + \sum_{m=0}^{N} d_{nm} \varphi_m = f_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, N) \tag{1.23}$$

а для остальных φ_m $(m = N + 1, N + 2, \ldots)$ формулу $\varphi_m = f_m \sigma_m^{-1}$. При этом, если функция $f(x) / g_+(x)$ — полином степени M, что довольно часто имеет место в контактных задачах [2,3], то ряд (1.20) обрывается на члене, порядковый номер которого равен $\max(N, M)$.

Аппроксимация (1.22) не всегда бывает удобна. В этих случаях может оказаться полезным аппроксимировать функцию D / g_+g_- интерполяционным многочленом, как это сделано в работе [12]. Кроме того, во многих контактных задачах [3,4] естественным образом вытекает аппроксимация такого сорта:

$$D(x, y) \approx g_+(x) g_-(y) \sum_{k=0}^{N} A_k P_k(x, y), \qquad P_k(x, y) = \sum_{j=0}^{k} a_{kj} x^{k-j} y^j$$

В этом случае система (1.23) приобретает вид

$$\sigma_n \varphi_n + \sum_{m=0}^{N-n} b_{nm} \varphi_m = f_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, N) \tag{1.24}$$

Таким образом, такая аппроксимация имеет то преимущество перед первыми двумя, что матрица коэффициентов системы алгебраических уравнений почти треугольна.

Отметим работы [6,10], где метод ортогональных многочленов применен к решению уравнения (1.1), заданного на конечном интервале, в то время как ядро уравнения будет П-ядром на полубесконечном интервале.

Из вышеизложенного ясно, насколько важным является вопрос о построении П-ядра. Все дальнейшее будет касаться этого вопроса.

§ 2. **Одна вспомогательная теорема о П-ядрах.** Займемся доказательством следующего утверждения.

Теорема 2.1. Для того чтобы функция $\Pi(x, y)$ была П-ядром (на интервале (a, b)), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) существуют функции $p_{\pm}(x)$, $g_{\pm}(x)$, такие, что

$$\int_a^b \Pi_{\pm}(x, y) p_{\pm}(y) y^m dy = g_{\pm}(x) \sum_{j=0}^{m} b_{jm}^{\pm} x^j, \qquad b_{mm}^{\pm} \neq 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

б) равны повторные интегралы

$$\int_a^b x^n p_-(x)\,dx \int_a^b \Pi(x, y)\, p_+(y)\, y^m dy = \int_a^b p_+(y)\, y^m dy \int_a^b \Pi(x, y)\, p_-(x)\, x^n dx \tag{2.2}$$

в) существуют моменты

$$c_n^{\pm} = \int_a^b w_{\pm}(x)\, x^n dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (w_{\pm}(x) = p_{\pm}(x)\, g_{\mp}(x)) \tag{2.3}$$

г) отличны от нуля определители

$$D_n^{\pm} = \begin{vmatrix} c_0^{\pm} & c_1^{\pm}, \ldots, c_n^{\pm} \\ c_1^{\pm} & c_2^{\pm}, \ldots, c_{n+1}^{\pm} \\ c_n^{\pm} & c_{n+1}^{\pm}, \ldots, c_{2n}^{\pm} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

Докажем необходимость перечисленных условий. Поскольку $\pi^{\pm}_n(x)$ точной степени n, то ([18], стр. 17)

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{nj}^{+} \pi_j^{\pm}(x), \qquad \lambda_{nn}^{\pm} \neq 0 \tag{2.5}$$

Следовательно, на основании (1.3) можем записать

$$\int_a^b \Pi_{\pm}(x, y)\, p_{\pm}(y)\, y^n dy = g_{\pm}(x) \sum_{j=0}^{n} \lambda_{nj}^{\pm} \sigma_j \pi_j^{\mp}(x) \tag{2.6}$$

Отсюда следует необходимость условия а), причем

$$b_{nn}^{\pm} = \lambda_{nn}^{\pm} k_n^{\mp} \sigma_n \neq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

Чтобы убедиться в необходимости условия б), следует для вычисления повторных интегралов в (2.2) воспользоваться (2.6) и (2.5). Необходимость остальных условий вытекает из следующей леммы.

Лемма. Если для некоторого линейного функционала и некоторой системы многочленов $\pi_n(x) = k_n x^n + \ldots, k_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ имеет место соотношение

$$F\{\pi_j(x)\pi_k(x)\} = \delta_{jk} \tag{2.8}$$

то существуют числа (моменты) $F\{x^n x^\circ\} = c_n$, для которых

$$D_n = \det\|c_{j+k}\|_0^n \neq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Действительно, в силу (2.8), (2.5) и линейности функционала имеем

$$F\{x^n x^\circ\} = F\left\{\frac{x^n \pi_0(x)}{k_0}\right\} = F\left\{\frac{\pi_0(x)}{k_0} \sum_{j=0}^{n} \lambda_{nj}\pi_j(x)\right\} = \frac{\lambda_{n0}}{k_0} = c_n$$

С другой стороны

$$c_{j+k} = F\{x^j x^k\} = F\left\{\sum_{r=0}^{j} \lambda_{jr}\pi_r(x) \sum_{s=0}^{k} \lambda_{ks}\pi_s(x)\right\} = \sum_{r=0}^{\min(k, j)} \lambda_{jr}\lambda_{kr} \tag{2.9}$$

Если теперь ввести треугольную матрицу

$$\Lambda_n = \begin{Vmatrix} \lambda_{00} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n0} & \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \det \Lambda_n = \prod_{j=0}^{n} d_{jj} \neq 0$$

и транспонированную ей Λ_n', $\det \Lambda_n' = \det \Lambda_n$, то полученное равенство (2.9) означает ничто иное как $\|c_{j+k}\|_0^n = \Lambda_n, \Lambda_n'$ и, стало быть,

$$\det \|c_{j+k}\|_0^n = \det\Lambda_n, \ \det\Lambda_n' \neq 0$$

Переходим к доказательству достаточности условий теоремы 2.1. Для этого умножим обе части первого соотношения (2.1) на $p_-(x)x^n$ $(n = 0, 1, 2,\ldots)$ и проинтегрируем по x в интервале (a, b), после чего в левой части переставим интегралы на основании (2.2). В результате использования второго соотношения из (2.1) и обозначения (2.3) получим

$$\sum_{j=0}^{n} b_{jn}^- c_{m+j}^+ = \sum_{j=0}^{m} b_{jm}^+ c_{n+j}^- \tag{2.10}$$

Далее, воспользовавшись условием г), построим ([18], стр. 416) два семейства полиномов

$$\pi_n^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{D_n^\pm D_{n-1}^\pm}} \begin{vmatrix} c_0^\pm & c_1^\pm & \ldots & c_n^\pm \\ c_1^\pm & c_1^\pm & \ldots & c_{n+1}^\pm \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1}^\pm & c_n^\pm & \ldots & c_{2n-1}^\pm \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix}, \qquad k_n^\pm = \left(\frac{D_{n-1}^\pm}{D_n^\pm}\right)^{1/2} \tag{2.11}$$

удовлетворяющих условиям (1.4).

Обозначив алгебраические дополнения членов нижне строки определителя в (2.11) через $A_{jn}^\pm (j = 0,1,2,\ldots,n)$, можем записать

$$\pi_n^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{D_n^\pm D_{n-1}^\pm}} \sum_{j=0}^{n} A_{jn}^\pm x^j \tag{2.12}$$

Воспользовавшись последней формулой, а также первым соотношением из (2.1) вычислим интеграл

$$\int_a^b \Pi(x, y)\, p_+(y)\, \pi_n^+(y)\, dy = g_+(x)\, P_n^-(x)$$

$$P_n^-(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{A_{jn}^+}{\sqrt{D_n^+ D_{n-1}^+}} \sum_{r=0}^{j} b_{rj}^+ x^r \tag{2.13}$$

Остается теперь показать, что многочлен (2.13) только константой отличается от $\pi_n^-(x)$, определяемого формулой (2.11) или (2.12), т. е. $P_n^-(x) = \sigma_n^- \pi_n^-(x)$, $\sigma_n^- \neq 0$. Как известно [18], для этого достаточно доказать, что

$$J_n = \int_a^b P_n^-(x)\, x^m w_-(x)\, dx = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Подставив в левую часть последнего равенства выражение (2.13) и приняв во внимание (2.10), будем иметь

$$J_n = \sum_{j=0}^{n} A_{jn}^+ \sum_{r=0}^{j} b_{rj}^+ \frac{c_{m+r}^-}{\sqrt{D_n^+ D_{n-1}^+}} = \sum_{r=0}^{m} \frac{b_{rm}^-}{\sqrt{D_n^+ D_{n-1}^+}} \sum_{j=0}^{n} A_{jn}^+ c_{j+r}^+ = 0 \qquad (m < n)$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что A_{jn}^+ — суть алгебраические дополнения членов нижней строки определителя в (2.11). Наконец, сравнивая коэффициенты при x^n в полиномах $P_n^-(x)$ и $\pi_n^-(x)$, находим $\sigma_n^- = b_{nn}^+ k_n^+ [k_n^-]^{-1} \neq 0$, так как b_{nn}^+, $k_n^+ \neq 0$. Итак, доказано, что

$$\int_a^b \Pi(x, y)\, p_+(y)\, \pi_n^+(y)\, dy = \sigma_n^- g_+(x)\, \pi_n^-(x) \tag{2.14}$$

Очевидно, аналогичным образом можно доказать следующее равенство:

$$\int_a^b \Pi(x, y)\, p_-(x)\, \pi_n^-(x)\, dx = \sigma_n^+ g_-(y)\, \pi_n^+(y) \tag{2.15}$$

и при этом $\sigma_n^+ = b_{nn}^- k_n^- [k_n^+]^{-1} \neq 0$.

Остается теперь показать, что

$$b_{nn}^- k_n^- \, [k_n^+]^{-1} = b_{nn}^+ k_n^+ \, [k_n^-]^{-1} = \sigma_n \tag{2.16}$$

Но это равенство будет следствием условия б). Чтобы убедиться в этом, следует обе части равенства (2.14) умножить на $\pi_n^-(x) p_-(x)$, проинтегрировать по x от a до b, изменить затем порядок интегрирования в левой части на основании (2.2) и, наконец, сравнивать с равенством, полученным из (2.15) путем интегрирования его по x с весом $\pi_n^+(y) p_+(y)$ в интервале (a, b).

Таким образом, теорема полностью доказана.

Сделаем несколько замечаний. Теорема справедлива, когда вместо (a, b) взята произвольная линия (или несколько линий) в комплексной плоскости. При неотрицательности весовых функций $w_\pm(x)$ условие г) теоремы выполняется автоматически ([18], стр. 39); и, наконец, в случае гильбертовых ядер условия (2.1) и (1.3) эквивалентны. В этом можно убедиться, если ввести ядро (1.6) и связанные с ним итерированные ядра Шмидта, воспользоваться положениями теории Гильберта — Шмидта [17] и соображениями, приведенными в начале работы [4].

§ 3. **Построение П-ядер на конечном интервале.** Введем в рассмотрение ядро

$$K(x, y) = \int_a^{\min(x, y)} K_+(x - s)\, K_-(y - s)\, \rho(s)\, ds \quad (a \leqslant x, \ y \leqslant b) \tag{3.1}$$

и займемся выяснением того, каковы должны быть функции K_+, K_-, ρ, чтобы оно было П-ядром на интервале (a, b). Для этого займемся преобразованием интегралов

$$J_+ = \int_a^b K(x, y)\, \varphi_+(y)\, dy, \quad J_- = \int_a^b K(y, x)\, \varphi_-(y)\, dy \tag{3.2}$$

где $\varphi_\pm(x)$ — пока произвольные функции.

Разбив интервал интегрирования в формулах (3.2) на два: (a, x) и (x, b), подставим туда (3.1). В результате перестановки интегралов, что будет обосновано в дальнейшем, будем иметь

$$J_\pm = \int_a^x \rho(s)\, K_\pm(x - s)\, ds \int_s^b K_\mp(y - s)\, \varphi_\pm(y)\, dy$$

После очевидных замен переменных получим

$$\int_0^1 \xi\rho(\xi\tau + a)\, K_\pm[\xi(1 - \tau)]\, (b - a - \xi\tau)\, d\tau \int_0^1 K_\mp\, [t(b - a - \xi\tau)]\, \varphi_\pm \times$$

$$\times [\xi\tau + a + t(b - a - \xi\tau)]\, dt = J_\pm \qquad (\xi = x - a) \tag{3.3}$$

Теперь положим

$$\varphi_\pm(y) = y^n p_\pm(y) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

Тогда нетрудно будет усмотреть из (3.3), что соотношение (2.1) будет иметь место, если

$$\xi\rho(\xi\tau + a) K_\pm\, [\xi(1 - \tau)]\, (b - a - \xi\tau) K_\mp\, [t(b - a - \xi\tau)] p_\pm\, [\xi\tau + a + t(b - a -$$

$$- \xi\tau)] = g_\pm(x) F_\pm(\tau, t) \qquad (\xi = x - a) \tag{3.5}$$

Легко видеть, что последнее будет выполнено, когда

$$\rho(s) = (s-a)^\rho (b-s)^\sigma, \qquad K_+(u) = u^{-\alpha} \qquad K_-(u) = u^{-\beta}, \qquad p_\pm(y) = (b-y)^{-\beta\pm} \tag{3.6}$$

При этом

$$\beta_+ = 1+\sigma-\beta, \qquad \beta_- = 1+\sigma-\alpha \tag{3.7}$$

$$g_+(x) = (x-a)^{1+\rho-\alpha}, \qquad g_-(x) = (x-a)^{1+\rho-\beta} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} F_+(\tau, t) = \tau^\rho (1-\tau)^{-\alpha} t^{-\beta} (1-t)^{\beta-\sigma-1} \\ F_-(\tau, t) = \tau^\rho (1-\tau)^{-\beta} t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-\sigma-1} \end{gathered} \tag{3.9}$$

В результате вычисления интегралов в (3.3) с учетом (3.4) — (3.9) найдем

$$b_{nn}^+ = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\sigma+n)\Gamma(1+\rho+n)}{\Gamma(2+\rho-\alpha+n)\Gamma(1-\sigma+n)} \tag{3.10}$$

Формула для b_{nn}^- получается из (3.10) путем перестановки местами параметров α и β. Таким образом, на основании изложенного функция

$$\Pi^*(x, y) = \int_a^c \frac{(s-a)^\rho (b-s)^\sigma}{(x-s)^\alpha (y-s)^\beta} ds \qquad \begin{gathered}(\operatorname{Re}(1+\rho,\ 1+\sigma,\ 1-\alpha,\ 1-\beta) > 0) \\ c = \min(x, y)\end{gathered} \tag{3.11}$$

может оказаться П-ядром. Чтобы убедиться в этом, следует проверить выполнимость всех условий теоремы 2.1. Условие $b_{nn}^\pm \neq 0$ $(n = 0,1,2)$ и условие в) указанной теоремы будут выполнены, если, помимо ограничений, наложенных на параметры в (3.11), дополнительно потребовать $\operatorname{Re}(\beta-\sigma,\ \alpha-\sigma) > 0$ $(\sigma \neq 1,2,3)$.

Таким образом, приходим в итоге к следующим ограничениям:

$$\operatorname{Re}(1+\rho,\ 1+\sigma,\ 1-\alpha,\ 1-\beta,\ \beta-\sigma,\ \alpha-\sigma) > 0 \qquad (\sigma \neq 1,2,3,\ldots) \tag{3.12}$$

Эти ограничения, как нетрудно проверить, обеспечивают равенство (2.2) и вместе с тем делают справедливыми перестановки интегралов, выполненные при получении (3.3) и (3.5). Остается показать выполнение условия 2) теоремы 2.1. Вместо этого докажем существование π-многочленов для рассматриваемого ядра (3.11). Для этого на основании (3.6) — (3.8) достаточно указать многочлены, удовлетворяющие следующим условиям ортонормированности:

$$\int_a^b \frac{\pi_n^+(x)\pi_m^+(x)\,dx}{(b-x)^{1+\sigma-\beta}(x-a)^{\beta-\rho-1}} = \int_a^b \frac{\pi_n^-(x)\pi_m^+(x)\,dx}{(b-x)^{1+\sigma-\alpha}(x-a)^{\alpha-\rho-1}} = \delta_{mn} \tag{3.13}$$

Учитывая свойства полиномов Якоби $P_n^{\lambda,\mu}(z)$ (см., например, [18, 20]), можно убедиться, что первому условию ортонормированности (3.13) будут удовлетворять ногочлены

$$\begin{gathered} \pi_n^+(x) = \delta_n^+ P_n^{\beta-\sigma-1,\,1+\rho-\beta}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \\ (\delta_n^+)^2 = \frac{n!\,\Gamma(1+\rho-\sigma+n)(1+\rho-\sigma+2n)}{(b-a)^{1+\rho-\sigma}\Gamma(2+\rho-\beta+n)\Gamma(\beta-\sigma+n)} \end{gathered} \tag{3.14}$$

Формула же для $\pi_n^-(x)$ получается из (3.14) путем перестановки местами параметров α и β. Итак, функция (3.11) действительно является П-ядром при условии (3.12). Для вычисления σ-чисел этого ядра следует воспользоваться формулой (2.16) с учетом (3.10) и (3.14). Подставив в первое спектральное соотношение (1.3) элементы для П-ядра (3.11), определяемые формулами (3.6) — (3.8), будем иметь

$$\int_a^b \frac{\Pi^*(x, y)}{(b-y)^{1+\sigma-\beta}} P_n^{\beta-\sigma-1,\,1+\rho-\beta}\left(\frac{2y-a-b}{b-a}\right) dy =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\sigma+n)\Gamma(1+\rho+n)\,P_n^{\alpha-\sigma-1,\,1+\rho-\alpha}}{\Gamma(1-\sigma+n)\Gamma(2+\rho-\alpha+n)(x-a)^{\alpha-\rho-1}}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \tag{3.15}$$

Второе спектральное соотношение получим из (3.15) перестановкой параметров α и β и заменой $\Pi^*(x, y)$ на $\Pi^*(y, x)$.

Отметим, что П-ядро (3.11) можно выразить через первую функцию [20,21] Аппеля $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$. Действительно, рассмотрев отдельно в (3.11) случаи: $x < y$, $y < x$ и приняв во внимание известное [21] интегральное представление для упомянутой функции, получим (3.16)

$$\Pi^*(x, y) = \frac{\Gamma(1+\rho)\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{1-\alpha+\rho}}{\Gamma(2+\rho-\alpha)(y-\alpha)^{\beta}(b-a)^{-\sigma}} F_1\left(1+\rho, -\sigma, \beta, 2+\rho-\alpha; \frac{x-a}{b-a}, \frac{x-a}{y-a}\right)$$

В случае $y < x$ в формуле (3.16) следует поменять α на β и x на y.

Представляет интерес выяснить, при каких ограничениях на параметры полученное П-ядро (3.11) будет являться гильбертовым. Из определения следует, что для этого требуется неотрицательность весовых функций $w_{\pm}(x)$ и выполнение условия (1.5). В разбираемом случае в силу (3.6) — (3.8) неотрицательность будет обеспечена, если

$$\operatorname{Im}(\alpha-\sigma, \beta-\sigma, \alpha-\rho, \beta-\rho) = 0 \tag{3.17}$$

Условие же (1.5) для ядра $\Pi^*(x, y)$, если иметь в виду связанную с ним по формуле (1.6) функцию $H^*(x, y)$, можно записать в виде

$$\int_a^b\int_a^b |H^*(x, y)|^2 dxdy < \infty \tag{3.18}$$

Для $H^*(x, y)$ оказывается справедливым и такое представление

$$H^*(x, y) = \int_a^b H_\alpha(x, t) H_\beta(y, t)\, dt \tag{3.19}$$

$$H_\gamma(x, y) = \left(\frac{(b-x)^{\gamma-\sigma-1}(b-y)^{\sigma}}{(x-a)^{1+\rho-\gamma}(y-a)^{-\rho}}\right)^{1/2} \begin{cases}(x-y)^{-\gamma}, & x > y\\ 0, & x < y\end{cases} \quad (\gamma = \alpha, \beta)$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. В силу неравенства Коши — Буняковского, примененного к интегралу в (3.14), для выполнимости условия (3.18) достаточно того, чтобы

$$\int_a^b\int_a^b |H_\gamma(x, y)|^2 dxdy < \infty \qquad (\gamma = \alpha, \beta)$$

Содержащийся здесь интеграл при выполнении условий (3.12) и $2\operatorname{Re}\gamma < 1$ вычисляется, если после подстановки в него выражения для $H_\gamma(x, y)$, сделать замены, приводящие интервал интегрирования (a, b) к $(0,1)$, и воспользоваться формулами 9.111 и 7.512 (б) из [20].

Таким образом, при выполнении (3.12) и (3.17), а также $2\operatorname{Re}(\alpha, \beta) < 1$ функция 3.11) или (3.16) будет гильбертовым П-ядром и стало быть

$$\Pi^*(x, y) = \Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)(b-a)^{\sigma-\rho-1}(x-a)^{1-\alpha+\rho}(y-a)^{1-\beta+\rho}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,\Gamma(1-\sigma+\rho+n)\Gamma(1+\rho+n)P_n^{\alpha-\sigma-1,\,1+\rho-\alpha}(u)\,P_n^{\beta-\sigma-1,\,1+\rho-\beta}(v)}{\Gamma(1-\sigma+n)\Gamma(2-\alpha+\rho+n)\Gamma(2-\beta+\rho+n)(1-\sigma+\rho+2n)^{-1}} \tag{3.20}$$
$$(a \leqslant x, y \leqslant b)$$

Здесь и всюду в дальнейшем принято

$$u = (b-a)^{-1}(2x-a-b), \qquad v = (b-a)^{-1}(2y-a-b)$$

Благодаря наличию в построенном П-ядре большого количества параметров можем из него получить большой набор П-ядер, в том числе и все ранее найденные П-ядра на конечном интервале. Начнем со случая $\sigma = \alpha+\beta-\rho-2$, когда функция

Аппеля в (3.15) приводится ([21], стр. 231) к функции Гаусса $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$. Последующее же введение параметров

$$\mu = 1 + \rho - \alpha, \qquad \gamma = 1 + \rho - \beta, \qquad \nu = \alpha + \beta - 1 \tag{3.21}$$

и использование формул 6.574 из [20] приводит, если принять $\operatorname{Re}(1 - \nu) > 0$, к такому П-ядру

$$\frac{\Pi(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{y-a}{b-x}\right)^{1/2\gamma}\left(\frac{x-a}{b-y}\right)^{1/2\mu} \times$$

$$\times W^{\nu}_{\mu,\gamma}\left(\sqrt{(x-a)(b-y)},\ \sqrt{(b-x)(y-a)}\right) \tag{3.22}$$

Здесь

$$W^{\nu}_{\mu,\gamma}(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} t^{\nu} J_{\mu}(t\xi)\, J_{\gamma}(t\eta)\, dt$$

так называемый разрывной интеграл Вебера — Шафхейтлина [22].

Для П-ядра (3.22) спектральное соотношение и билинейное разложение получим из (3.15) и (3.20), если вместо (3.16) возьмем (3.22) и примем во внимание $\sigma = \alpha + \beta - \rho - 2$ и (3.21). При этом ограничения на параметры будут иметь вид

$$\operatorname{Re}[1 + \gamma,\ 1 + \mu,\ 1 + \nu + \mu + \gamma,\ 1 + \nu - \mu - \gamma,\ 1 - \nu + \gamma - \mu,\ 1 - \nu + \mu - \gamma,\ 1 - \nu] > 0$$

$$\operatorname{Re}(1 + \nu - \mu + \gamma,\ 1 + \nu - \gamma + \mu) < 1, \qquad \operatorname{Im}(\mu, \gamma) = 0 \tag{3.23}$$

Последние два ограничения необходимо добавлять только для гильбертовости ядра (3.22). Для случая $a = 0$, $b = 1$ спектральное соотношение и билинейное разложение для П-ядра (3.22) формальным путем получены в работе [14]. Там же можно найти и многочисленные частные случаи. Если теперь в (3.16) положим $\sigma = 0$ и примем (3.21), то придем к такому П-ядру

$$\frac{\Pi(x, y)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} = \frac{1}{2^{\nu}}\frac{(x-a)^{1/2\mu}}{(y-a)^{-1/2\gamma}} W^{\nu}_{\mu,\gamma}\left(\sqrt{x-a},\ \sqrt{y-a}\right) \quad (\operatorname{Re}(1-\nu) > 0) \tag{3.24}$$

Спектральное соотношение и билинейное разложение для этого гильбертового ядра (если выполнены условия $2\operatorname{Re}(\alpha, \beta) < 1$, (3.12) и (3.17)) вытекают из (3.15) и (3.20) при $\sigma = 0$ и (3.21). Они были указаны для случая $a = 0$, $b = 1$ в работе [14]. Там же, а также в работе [4], можно найти многочисленные частные случаи П-ядра (3.24), многие из которых нашли свое применение в контактных задачах [4]. Следует, однако сказать, что полученные в цитируемых работах билинейные разложения не обоснованы из-за отсутствия доказательства гильбертовости соответствующих ядер. Полученные здесь условия гильбертовости $2\operatorname{Re}(\alpha, \beta) < 1$ (3.12) и (3.17) и их частный случай (3.23) ликвидируют этот пробел (до некоторой степени).

Не останавливаясь в целях экономии места на различных частных случаях П-ядра (3.24), укажем только один важный случай, хотя и содержащийся в работе [4], но не отмеченный там. К этому случаю П-ядра придем, если в (3.24) положим $a = 0$, $b = 1$, $\mu = \gamma = 1/2$, $\nu = 0$, $x = \xi^2$, $y = \eta^2$ и примем во внимание формулы 6.576 (2) и 9.121 (6) из [20]. Соответствующее ему спектральное соотношение и билинейное разложение

$$\int_0^1 \frac{T_{2n+1}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\, d\eta = \frac{\pi}{1+2n} T_{2n+1}(\xi)$$

$$\ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{1+2n} T_{2n+1}(\xi)\, T_{2n+1}(\eta)$$

$(0 \leqslant \xi,\ \eta \leqslant 1,\ T_n(x)$ — многочлен Чебышева) получим из (3.15) и (3.20), зафиксировав указанным образом параметры. Записанное билинейное разложение использовано при решении одной задачи гидромеханики в работе [19].

Чтобы получить П-ядра, построенные в работе [15], следует и в (3.16) или (3.11) принять $\sigma = 0$, $\beta = 2 + \rho - \alpha$, $1 + \rho = \nu$. В результате придем к такому П-ядру

$$\Pi(x, y) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)(y-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\,|x-y|^{\nu}(x-a)^{\alpha-\nu}} \begin{cases} \sin\pi(\alpha-\nu)\operatorname{cosec}\pi\alpha, & x<y \\ 1, & y<x \end{cases}$$

которое можно записать еще и так:

$$\Pi(x, y) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)\left[a_1 \operatorname{sign}(x-y) + a_2\right]^{\mu}(y-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(a_2+a_1)^{\mu}(x-a)^{\alpha-\nu}\,|x-y|^{\nu}} \tag{3.25}$$

При этом

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{\sin\pi\nu}{A}\right), \qquad A = \sqrt{1 - 2a_*^{\,\mu}\cos\pi\nu + a_*^{\,2\mu}} \qquad \left(a_* = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}\right)$$

Здесь параметры a_1, a_2, μ, а также однозначная ветвь арксинуса должны быть выбраны так, чтобы было обеспечено условие $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Именно это П-ядро при $a = 0$, $b = 1$ и было построено в работе [15], там же можно найти и другие П-ядра, полученные из (3.25) переходом к частным значениям параметров. Указанные в цитируемой работе спектральные соотношения и билинейные разложения, разумеется, вытекают из (3.15) и (3.20). Приложение П-ядра (3.25) к контактным задачам дано в работе [9].

В (3.15) положим $\sigma = 0$, $\rho = \alpha + \beta - 2(\rho = \nu - 1$, $\beta = 1 + \nu - \alpha$, $\nu = \alpha + \beta - 1)$; тогда, принимая во внимание (3.16), будем иметь

$$\int_a^b \frac{\left[a^+ + a^- \operatorname{sign}(x-y)\right] P_n^{\nu-\alpha,\,\alpha-1}(v)}{|x-y|^{\nu}(y-a)^{1-\alpha}(b-y)^{\alpha-\nu}}\,dy = \frac{\pi(\nu)_n P_n^{\alpha-1,\,\nu-\alpha}(u)}{n!\,\sin\pi\alpha\,\sin\pi(\alpha-\nu)}$$

$$(a^{\pm} = [2\sin\pi\alpha\sin\pi(\alpha-\nu)]^{-1}\,[\sin\pi\alpha \pm \sin\pi(\alpha-\nu)])$$

Используя ортогональность многочленов Якоби, полученное соотношение можно записать в таком виде:

$$\int_a^b \left[\frac{1}{|x-y|^{\nu}} - 1\right]\frac{1}{\nu}\,\frac{a^+ P_n^{\nu-\alpha,\,\alpha-1}(v)}{(y-a)^{1-\alpha}(b-y)^{\alpha-\nu}} + \frac{a_-}{\nu}\int_a^b \frac{\operatorname{sign}(x-y)\,P_n^{\nu-\alpha,\,\alpha-1}(v)\,dy}{(y-a)^{1-\alpha}(b-y)^{\alpha-\nu}\,|x-y|^{\nu}} =$$

$$= \frac{\pi\Gamma(\nu+n)\,P_n^{\alpha-1,\,\nu-\alpha}(u)}{\Gamma(1+\nu)\sin\pi\alpha\,\sin\pi(\alpha-\nu)\,n!} - \delta_{n0}\,\frac{a^+\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\nu-\alpha)}{(b-a)^{-\nu}\,\nu\Gamma(\nu+1)}$$

(δ_{nm} — символ Кронекера)

Выполнив здесь предельный переход $\nu \to 0$ раздельно для случая $n = 0$ и $n \neq 0$ (аналогичная операция, но по другому поводу, проделывалась в работе [4]), придем к спектральному соотношению для П-ядра вида

$$\Pi(x, y) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-y) + \frac{\operatorname{tg}\pi\alpha}{\pi}\ln\frac{1}{|x-y|} \tag{3.26}$$

Применительно к случаю $a = -1$, $b = 1$ оно получено и применено к контактным задачам в работе [7]. Аналогичным путем из (3.20) можно получить и билинейное разложение для П-ядра (3.26).

§ 4. Построение П-ядер на полубесконечном интервале. Чтобы построить П-ядра на полубесконечном интервале таким же путем, как в предыдущем параграфе, следует взять представление ядра, аналогичное (3.1). Другое семейство П-ядер можно получить, если взять за основу следующее представление:

$$K(x, y) = \int_{\max(x,y)}^{\infty} K_+(s-x)\,K_-(s-y)\,\rho(s)\,ds \tag{4.1}$$

Однако к тем же результатам, но быстрее, приведет такой формальный прием. В спектральном соотношении (3.15) полагаем $a = 0$, $\sigma = -b$, после чего устремляем b к ∞. В результате использования предельных равенств

$$\lim_{b\to\infty} P_n^{\alpha,\, b+\beta}(1 - 2x / b) = L_n^{(\alpha)}(x)$$

$$\lim_{b\to\infty} (b - x)^b = e^{-x}, \qquad \lim_{|z|\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\, z^a} = 1 \tag{4.2}$$

будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{\Pi_\infty(x, y)}{e^y} L_n^{(1+\rho-\beta)}(y)\, dy = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\rho+n)}{\Gamma(2+\rho-\alpha+n)\, x^{\alpha-\rho-1}} L_n^{(1+\rho-\alpha)}(x) \tag{4.3}$$

Здесь $L_n^{(\alpha)}(x)$ — многочлен Чебышева — Лагерра, а П-ядро имеет вид

$$\Pi_\infty(x, y) = \int_0^\chi \frac{e^s s^\rho\, ds}{(x-s)^\alpha (y-s)^\beta} \qquad (\operatorname{Re}(1+\rho,\ 1-\alpha,\ 1-\beta) > 0,\ \chi = \min(x, y)) \tag{4.4}$$

Построенное П-ядро можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию $\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma;\ x, y)$ двух переменных [21]. Для этого следует в (4.4) при $x < y$ сделать замену $s = xt$, разложить в ряд экспоненту, после чего оставшиеся интегралы тоже разложить в ряд по x / y. В результате будем иметь

$$\Pi_\infty(x, y) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(2+\alpha+\rho)} \Phi_1(1+\rho,\ \beta,\ \alpha+\rho+2,\ x,\ x / y) \qquad (x < y)$$

При $x > y$ в правой части следует поменять α на β и x на y.

К этим результатам могли бы прийти и отправляясь непосредственно от интегрального представления (3.1) при $a = 0$. К результатам же, которые можно получить на основе представления (4.1), придем, если в том же спектральном соотношении (3.15) и формуле (3.11) при $a = 0$, $\rho = b$ сделаем замену $s = b - t$, $x = b - \xi$, $y = b - \eta$, после чего устремим $b \to \infty$. В результате использования (4.2) будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{\Pi^\infty(\xi, \eta)}{\eta^{1+\sigma-\beta}} L_n^{(\beta-\sigma-1)}(\eta)\, d\eta = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\beta-\sigma+n)}{\Gamma(1-\sigma+n)\, e^\xi} L_n^{(\alpha-\sigma-1)}(\xi) \tag{4.5}$$

При этом

$$\Pi^\infty(\xi, \eta) = \int_{\max(\xi,\, \eta)}^\infty \frac{e^{-s} s^\sigma\, ds}{(s-\xi)^\alpha (s-\eta)^\beta}, \qquad \operatorname{Re}(1-\alpha,\ 1-\beta,\ \alpha-\sigma,\ \beta-\sigma) > 0 \tag{4.6}$$

Не останавливаясь на многочисленных частных случаях П-ядер (4.4) и (4.6), отметим только, что последнее при $\sigma = 0$ выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию [21] второго рода. Действительно, рассмотрев, например, случай $\xi > \eta$, после очевидных замен переменных и использования формулы 9.211 (4) из [20], можно убедиться, что

$$\Pi^\infty(x, y) = e^{-x} (x-y)^{1-\alpha-\beta}\, \Gamma(1-\alpha)\, \Psi(1-\alpha,\ 2-\alpha-\beta;\ x-y) \qquad (x > y)$$

при $y > x$ в правой части последней формулы следует заменить y на x и α на β. Если $\alpha = \beta$, то оба случая ($x > y$ и $x < y$) объединяются в одну формулу, что позволяет спектральное соотношение (4.5) записать в виде

$$\int_0^\infty \frac{\Psi(\mu, 2\mu, |\xi-\eta|)\, L_n^{(-\mu)}(\eta)\, d\eta}{\eta^\mu \sqrt{e^\eta e^{|\xi-\eta|}}\, |\xi-\eta|^{1-2\mu}} = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu+n)}{n!\, e^{\xi/2}} L_n^{(-\mu)}(\xi) \tag{4.7}$$

$$(\mu = 1 - \alpha,\ 0 < \operatorname{Re}\mu < 1)$$

Если здесь положить $\mu = \nu + {}^1/_2$, сделать замену $\xi = 2x$, $\eta = 2y$ и воспользоваться известной ([21], стр. 253) формулой для функции Макдональда $K_\nu(z)$, то получим спектральное соотношение для П-ядра вида

$$K_\nu(|x-y|)\,|x-y|^{-\nu} \tag{4.8}$$

которое впервые было найдено и применено к нескольким задачам в работах [4,6].

Следует отметить, что приведенное в работе [4] билинейное разложение для П-ядра (4.8) носит формальный характер, ибо не доказана его гильбертовость. Более того, можно показать, что П-ядро (4.8) при $\nu = 0$ не будет гильбертовым и билинейное разложение, указанное в работе [4], сходится в более слабом смысле, нежели сходимость в метрике L_2.

Поступила 3 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Клубин П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. Инж. сб., 1952, т. 12.
2. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., 1961, т. 14, № 3.
3. Попов Г. Я. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
4. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5; ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. Александров В. М. О приближенном решении одного класса интегральных уравнений. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., 1964, т. 17, № 2.
6. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. Ж. техн. физ. 1965, т. 35, вып. 3.
7. Попов Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
8. Лутченко С. А. О вдавливании штампа в боковую поверхность упругого основания в виде клина. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 12.
9. Попов Г. Я. Вдавливание штампа в линейно-деформируемое основание с учетом сил трения. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
10. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе. Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т. 2, № 2.
11. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
12. Лутченко С. А. Об изгибе балки на упругом основании переменной глубины. Изв. вузов, Строительство и архитектура, 1967, № 9.
13. Попов Г. Я. Интегральные уравнения математической физики и ортогональные многочлены. Тезисы кратких научн. сообщ. на Международн. конгр. математиков (секция 12). М., 1966.
14. Попов Г. Я. О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений. Изв. вузов, Математика, 1966, № 1.
15. Попов Г. Я. Некоторые новые соотношения для многочленов Якоби. Сиб. матем. ж., 1967, т. 8, № 6.
16. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехтеоризидат, 1949.
17. Трикоми Ф. Дж. Интегральные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
18. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
19. Цельник Д. С. Симметричные формы контакта струи с поверхностью тяжелой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
21. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., «Наука», 1965.
22. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, М., «Наука», 1966.