О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДЛИННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

В. Е. Ковальчук

(Ростов-на-Дону)

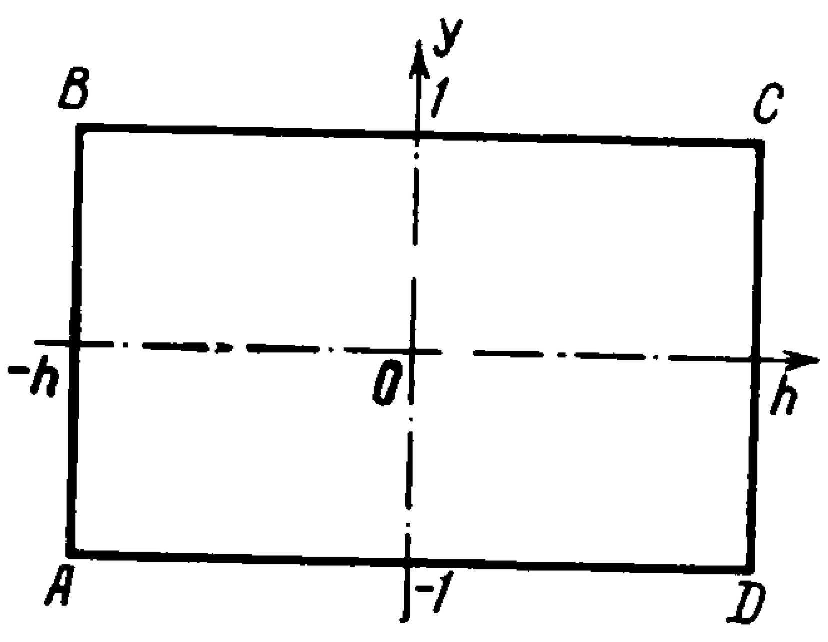
В работе получено представление решения первой основно задачи теории упругости для прямоугольника в окрестностях угловых точек. На основе этого представления делается ряд выводов о дифференциальных свойствах решения в зависимости от свойств граничных функций и указывается окончательная формулировка основного результата работы [1]. В заключение выясняется поведение решения при стремлении относительной ширины прямоугольника к нулю.

1. Рассмотрим на прямоугольнике $ABCD$ (фиг. 1) первую основную задачу теории упругости

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1.1}$$

$$u = u_y = 0, \quad y = \pm 1; \quad u = f(y), \quad u_x = \pm f_1(y), \quad x = \pm h \tag{1.2}$$

Основной целью работы будет анализ поведения решения u задачи (1.1), (1.2) при стремлении относительной ширины плиты к нулю, т. е., при $h \to \infty$. Указанная задача возникает при обосновании прикладной теории изгиба стержней и исследовании ее точности. Ее решение основывается на специальном представлении (3.22) работы [1], полученном в предположении, что $u \in W_p{}^4$ $(p > 2)$. Вопрос о том, что нужно требовать от граничных функций $f(y)$ и $f_1(y)$, чтобы выполнялось условие $u \in W_p{}^4$ $(p>2)$, в [1] оставался открытым.



Дифференциальные свойства решений эллиптических уравнений внутри области и вблизи гладких частей границы в настоящее время хорошо изучены. Из работ, посвященных исследованию решений в окрестностях особых точек границы, следует отметить работу В. А. Кондратьева [2], в которой изучаются общие эллиптические уравнения в областях с коническими или угловыми точками. Остальные работы этого направления или посвящены уравнениям второго порядка, или накладывают на решения слишком жесткие ограничения.

В предлагаемой работе проводится анализ поведения решения задачи (1.1), (1.2) в окрестностях углов прямоугольника $ABCD$, отличающийся, несмотря на общую идею, от исследования, проводимого В. А. Кондратьевым в [2]. Метод, которым пользуется автор, разработан И. И. Воровичем, рассмотревшим смешанную задачу теории упругости для полосы и слоя и выяснившим характер поведения решения этих задач на бесконечности и в точках раздела граничных условий [1].

2. В этом пункте будет собран весь вспомогательный материал, используемый в дальнейшем.

а) Основные обозначения: Ω — прямоугольник $ABCD$; $\Omega_{R,A}$ — сектор радиуса R с центром в точке A; $C_{l+\alpha}(D)$ — пространство функций, определенных в области D и имеющих в этой области l-е производные, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α (при $l = 0$ пишем C_α); $L_p(a, b)$ — пространство функций, суммируемых в p-й степени на отрезке $[a, b]$; $W_p{}^l(D)$ — пространство функций, имеющих в области D обобщенные l-е производные, суммируемые в p-й степени [3]; H_0 — множество функций $u \in W_2{}^2(\Omega)$ и удовлетворяющих граничным условиям $u|_S = du/dn|_S = 0$, где S — граница области Ω; $W_p^{l-1/p}(a, b)$ — пространства Л. М. Слободецкого [4].

б) Обобщенным решением задач (1.1), (1.2) называется функция $u \in W_2{}^2(\Omega)$,

[1] См. аннотации докладов III Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике.

удовлетворяющая граничным условиям (1.2) и интегральному тождеству

$$\iint\limits_{\Omega} \Delta u \Delta v dxdy = 0 \qquad (v \in H_0) \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. Если система граничных значений (1.2) допустима, то существует единственная функция $u \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющая задаче (1.1), (1.2) в обобщенном смысле [3].

Вопрос о допустимости системы граничных значений в случае области с гладкой границей полностью решен в работе Л. М. Слободецкого [4], при наличии же угловых точек он по-прежнему остается открытым. Для задачи (1.1), (1.2) можно привести следующее достаточное условие.

Лемма 2.2. Если $f(y)$, $f_1(y) \in W_2^2(-1,1)$, и, кроме того, $f(\pm 1) = f'(\pm 1) = f_1(\pm 1) = f_1'(\pm 1) = 0$, то система граничных значений (1.2) допустима.

В дальнейшем, однако, не будет предполагаться выполнение условий леммы 2.2. Будем считать только, что система граничных значений допустима. Тогда из теорем вложения Соболева — Кондрашова следует, что

$$f(y) \in C_\alpha(-1,1) \qquad (\alpha < 1), \qquad f(\pm 1) = 0 \tag{2.2}$$

$$f'(y),\ f_1(y) \in L_p(-1,1) \quad (p < \infty) \tag{2.3}$$

а также

$$u \in C_\alpha(\Omega) \ \ (\alpha < 1) \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. Функция u, являющаяся обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), бесконечно дифференцируема внутри Ω (см., например, [3], стр. 117).

Лемма 2.4. Если $f \in C_{l+\alpha}(a, b)$, $f_1 \in C_{l-1+\alpha}(a, b)$, $l \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, $a > -1$, $b < 1$, то $u \in C_{l+\alpha}(D)$, где D — замкнутая подобласть Ω, примыкающая к интервалу (a, b) и не содержащая угловых точек Ω. Справедлива оценка

$$\| u \|_{C_{l+\alpha}} \leqslant C(\| f \|_{C_{l+\alpha}} + \| f_1 \|_{C_{l-1+\alpha}})$$

Лемма 2.5. Если $f \in W_p^{l-1/p}(a, b)$, $f_1 \in W_p^{l-1-1/p}(a, b)$, $l \geqslant 2$, $1 < p < \infty$ ($p \geqslant 2$ при $l = 2$), то $u \in W_p^l(D)$ во всякой замкнутой подобласти D области Ω, примыкающей к интервалу (a, b) и не содержащей угловых точек Ω. Имеет место оценка

$$\| u \|_{W_p^l} \leqslant C(\| f \|_{W_p^{l-1/p}} + \| f_1 \|_{W_p^{l-1-1/p}})$$

Леммы 2.4, 2.5 следуют из результатов работы [5].

в) Трансформантой Меллина функции $f(r)$ называется интеграл

$$F(s) = \int_0^\infty r^{s-1} f(r) dr, \qquad s = \sigma + i\tau$$

Лемма 2.6. Если $r^{\sigma-1} f(r) \in L_1(0, \infty)$, причем функция $f(r)$ непрерывна и имеет ограниченное изменение, то

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} r^{-s} F(s) ds$$

где интеграл понимается в смысле главного значения [6].

Лемма 2.7. Если $f(r) \in L_1(a, b)$ и $f(r) \equiv 0$ вне $[a, b]$ $(a > 0,\ b < \infty)$, то $F(s)$ есть целая функция.

Лемма 2.8. Если $f(r) \equiv 0$ при $r \geqslant a$ и $f(r) \in L_p(0, a)$, то $F(s)$ есть аналитическая функция в полуплоскости $\sigma > 1/p$.

Лемма 2.9. Если $f(r) \equiv 0$ вне $[a, b]$ $(a > 0,\ b < \infty)$ и $f(r) \in C_{l+\alpha}(0, \infty)$, то при больших τ

$$| F(s) | \leqslant C \| f \|_{C_{l+\alpha}} | s |^{-l} | e^{\pi / |\tau|} - 1 |^\alpha$$

Лемма 2.10. Если $f(r) \in C_{l+\alpha}(0, \infty)$ и $f(r) \equiv 0$ при $r \geqslant a > 0$, то $F(s)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\sigma > -(l+\alpha)$, кроме, быть может, точек $s = 0, -1, \ldots, -l$, где возможны простые полюса. Для больших τ справедлива оценка

$$|F(s)| \leqslant C(\gamma) \|f\|_{C_{l+\alpha}} |s|^{-l} |e^{\pi/|\tau|} - 1|^{\gamma} \qquad (\gamma = \min(\alpha, \sigma + l + \alpha))$$

Леммы 2.7 — 2.10 взяты из еще не опубликованной работы И. И. Воровича.

3. Интегральное тождество (2.1) для всякой четырежды непрерывно дифференцируемой функции $v \in H_0$ может быть переписано следующим образом:

$$\iint\limits_{\Omega} u\Delta^2 v dx dy + \int\limits_{-1}^{1} \left[f_1(y)\Delta v \Big|_{x=h} - f(y)\frac{\partial(\Delta v)}{\partial x}\Big|_{x=h}\right] dy +$$
$$+ \int\limits_{-1}^{1} \left[f_1(y)\Delta v \Big|_{x=-h} + f(y)\frac{\partial(\Delta v)}{\partial x}\Big|_{x=-h}\right] dy = 0 \tag{3.1}$$

Легко заметить, что тождество (3.1) имеет место для более широкого класса функций v, именно, для $v \in H_0 \cap W_p{}^4(\Omega)$ $(p > 1)$. Перейдем в (3.1) к полярным координатам, поместив их начало в точку A. Возьмем функцию v в виде

$$v = r^{s+2}\chi(r)\, a(\varphi) \tag{3.2}$$

где $\chi(r) \equiv 1$ при $r \leqslant R - \delta$ $(0 < R < 1,\ \ 0 < \delta < R)$, $\chi(r) \equiv 0$ при $r \geqslant R$ и $\chi(r)$ бесконечно дифференцируема при $0 \leqslant r < \infty$, а $a(\varphi)$ — четырежды непрерывно дифференцируема. Чтобы функция v вида (3.2) принадлежала $H_0 \cap W_p{}^4(\Omega)$, необходимо выполнение условий: $\sigma > 0$ $(\sigma = \operatorname{Re} s)$, $a(0) = a'(0) = a(^1\!/_2\pi) = a'(^1\!/_2\pi) = 0$. Тождество (3.1) примет теперь следующий вид:

$$\iint\limits_{\Omega_{R,A}} u\{r^{s-2}\chi(r)[a^{\mathrm{IV}} + (s^2 + (s+2)^2)a'' + s^2(s+2)^2 a] + r^{s-1}\chi'(r)[(4s+6)a'' +$$
$$+ (4s^3 + 18s^2 + 24s + 9)a] + r^s\chi''(r)[2a'' + (6s^2 + 24s + 23)a] + r^{s+1}\chi'''(r)(4s+10)a +$$
$$+ r^{s+2}\chi^{\mathrm{IV}}(r)a\}\, r dr d\varphi + \int\limits_0^R [f_1(r-1)r^s\chi(r)a''(^1\!/_2\pi) - f(r-1)r^{s-1}\chi(r)a'''(^1\!/_2\pi)]\, dr = 0 \tag{3.3}$$

Положим

$$U(\varphi, s) = \int\limits_0^R u(r, \varphi)\chi(r) r^{s-1} dr \tag{3.4}$$

$$U_k(\varphi, s) = \int\limits_{R-\delta}^{R} u(r, \varphi)\chi^{(k)}(r) r^{s-1+k} dr \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{3.5}$$

$$F(s) = \int\limits_0^R f(r-1)\chi(r) r^{s-1} dr \tag{3.6}$$

$$F_1(s) = \int\limits_0^R f_1(r-1)\chi(r) r^s dr \tag{3.7}$$

Очевидно, $U(\varphi, s)$ будет трансформантой Меллина функции $u(r, \varphi)\chi(r)$. Из (2.4) следует, что $U(\varphi, s)$ и $U_k(\varphi, s)$ будут непрерывными на $[0, {}^1\!/_2\pi]$ функциями переменной φ, а из леммы 2.3 вытекает, что $U_k(\varphi, s)$ бесконечно дифференцируемы при $\varphi < {}^1\!/_2\pi$.

Подставляя (3.4) — (3.7) в (3.3), получим

$$\int_0^{1/2\pi}\{U[a^{IV}+(s^2+(s+2)^2)a''+s^2(s+2)^2a]+U_1[(4s+6)a''+(4s^3+18s^2+$$
$$+24s+9)a]+U_2[2a''+(6s^2+24s+23)a]+$$
$$+U_3(4s+10)a+U_4a\}d\varphi+F_1(s)+a''(1/{}_2\pi)-F(s)a'''(1/{}_2\pi)=0 \qquad (3.8)$$

Введем операторы

$$KU=\int_\varphi^{1/{}_2\pi}(\vartheta-\varphi)U(\vartheta)d\vartheta,\qquad K_1U=\int_\varphi^{1/{}_2\pi}\frac{(\vartheta-\varphi)^3}{3!}U(\vartheta)d\vartheta$$

Легко проверить, что для всякой четырежды непрерывно дифференцируемой функции $a(\varphi)$, удовлетворяющей условиям $a(0)=a'(0)=a''(0)=a'''(0)=0$

$$\int_0^{1/{}_2\pi}Ua''d\varphi=\int_0^{1/{}_2\pi}KUa^{IV}d\varphi,\qquad \int_0^{1/{}_2\pi}Uad\varphi=\int_0^{1/{}_2\pi}K_1Ua^{IV}d\varphi \qquad (3.9)$$

Также очевидно равенство

$$F_1(s)a''(1/{}_2\pi)-F(s)a'''(1/{}_2\pi)=\int_0^{1/{}_2\pi}[1/{}_2\pi F_1(s)-F(s)-\varphi F_1(s)]a^{IV}d\varphi \qquad (3.10)$$

Наложив на функцию $a(\varphi)$ в (3.8) новое ограничение $a''(0)=a'''(0)=0$ и воспользовавшись (3.9), (3.10), получим

$$\int_0^{1/{}_2\pi}\{U+K[(s^2+(s+2)^2)U+(4s+6)U_1+2U_2]+K_1[s^2(s+2)^2U+$$
$$+(4s^3+18s^2+24s+9)U_1+(6s^2+24s+23)U_2+ \qquad (3.11)$$
$$+(4s+10)U_3+U_4]+1/{}_2\pi F_1(s)-F(s)-\varphi F_1(s)\}a^{IV}(\varphi)d\varphi=0$$

Так как выражение, стоящее в фигурных скобках в тождестве (3.11), будет непрерывной функцией переменной φ, а $a^{IV}(\varphi)$ — произвольная непрерывная функция, то по основной лемме вариационного исчисления из (3.11), следует, что

$$U(\varphi,s)=-K[(s^2+(s+2)^2U+(4s+6)U_1+2U_2]-K_1[s^2(s+2)^2U+$$
$$+(4s^3+18s^2+24s+9)U_1+(6s^2+24s+23)U_2+(4s+10)U_3+U_4]+$$
$$+F(s)-1/{}_2\pi F_1(s)+\varphi F_1(s)\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant 1/{}_2\pi) \qquad (3.12)$$

Правая часть тождества (3.12) имеет две непрерывные производные. Дифференцируя два раза, найдем

$$U''=-(s^2+(s+2)^2)U-(4s+6)U_1-2U_2-K[s^2(s+2)^2U+(4s^3+18s^2+$$
$$+24s+9)U_1+(6s^2+24s+23)U_2+(4s+10)U_3+U_4] \qquad (3.13)$$

Функция U дважды непрерывно дифференцируема на $[0, 1/{}_2\pi]$, а U_k бесконечно дифференцируемы при $\varphi<1/{}_2\pi$, поэтому равенство (3.13) можно дифференцировать при $\varphi<1/{}_2\pi$ еще два раза. В результате получим

$$U^{IV}+(s^2+(s+2)^2)U''+s^2(s+2)^2U=M(\varphi,s) \qquad (3.14)$$

Здесь

$$M(\varphi,s)=-[(4s+6)U''_1+2U_2''+(4s^3+18s^2+24s+9)U_1+(6s^2+24s+23)\times$$
$$\times U_2+(4s+10)U_3+U_4] \qquad (3.15)$$

Полагая в (3.12) $\varphi=1/{}_2\pi$, получим

$$U(\varphi,s)|_{\varphi=1/{}_2\pi}=F(s) \qquad (3.16)$$

Дифференцируя (3.12) и полагая $\varphi=1/{}_2\pi$, найдем

$$U'(\varphi,s)|_{\varphi=1/{}_2\pi}=F_1(s) \qquad (3.17)$$

Граничные условия для $U(\varphi, s)$ при $\varphi = 0$ получим из (3.4)

$$U|_{\varphi=0} = U'|_{\varphi=0} = 0 \tag{3.18}$$

Таким образом, трансформанта Меллина функции $u(r, \varphi)\chi(r)$ удовлетворяет уравнению (3.14) и граничным условиям (3.16) — (3.18).

4. Пусть $G(\varphi, \psi, s)$ — функция Грина [7] дифференциального оператора, определяемого уравнением (3.14) и граничными условиями

$$U|_{\varphi=0} = U|_{\varphi={}^1/_2\pi} = U'|_{\varphi=0} = U'|_{\varphi={}^1/_2\pi} = 0$$

Тогда решение задачи (3.14), (3.16) — (3.18) запишется следующим образом:

$$U(\varphi, s) = \int\limits_0^{{}^1/_2\pi} G(\varphi, \psi, s) M(\psi, s) d\psi + G_{\psi_3}{}'''(\varphi, {}^1/_2\pi, s) F(s) - G_{\psi_2}{}''(\varphi, {}^1/_2\pi, s) F_1(s) \tag{4.1}$$

Функция Грина $G(\varphi, \psi, s)$ в явном виде дается формулой

$$G(\varphi, \psi, s) = \frac{1}{8s(s+1)(s+2)} \Big\{ (s+1)\sin[(s+2)\varphi - s\psi] + \sin(s+1)\frac{\pi}{2} \times$$
$$\times \sin\left[\frac{\pi}{2}s - (s+2)\varphi - s\psi\right] \pm s\sin(s+2)(\varphi-\psi) \mp (s+2)\sin s(\varphi-\psi) +$$
$$+ \frac{a^{(1)}(\varphi, s) b^{(1)}(\psi, s)}{D_1(s)} + \frac{a^{(2)}(\varphi, s) b^{(2)}(\psi, s)}{D_2(s)} \Big\} \tag{4.2}$$

$$a^{(1)}(\varphi, s) = (s+2)\sin s(\varphi - {}^1/_4\pi) - \cos {}^1/_2(s+1)\pi\cos[(s+2)\varphi - {}^1/_4 s\pi]$$
$$a^{(2)}(\varphi, s) = (s+2)\cos s(\varphi - {}^1/_4\pi) - \cos {}^1/_2(s+1)\pi\sin[(s+2)\varphi - {}^1/_4 s\pi]$$
$$b^{(1)}(\psi, s) = s\cos[(s+2)\psi - {}^1/_4 s\pi] + \cos {}^1/_2(s+1)\pi\sin s(\psi - {}^1/_4\pi)$$
$$b^{(2)}(\psi, s) = s\sin[(s+2)\psi - {}^1/_4 s\pi] + \cos {}^1/_2(s+1)\pi\cos s(\psi - {}^1/_4\pi)$$
$$D_1(s) = \sin {}^1/_2(s+1)\pi - (s+1), \quad D_2(s) = \sin {}^1/_2(s+1)\pi + (s+1) \tag{4.3}$$

В (4.2) верхний знак берется при $\varphi < \psi$, нижний — при $\varphi > \psi$.

Из (4.2) видно, что $G(\varphi, \psi, s)$ будет мероморфной функцией параметра s, имеющей простые полюса в тех точках, в которых обращаются в нуль знаменатели $D_1(s)$ и $D_2(s)$ Исключение составляют точки $s = 0, -1, -2$, которые, как легко проверить, не будут особыми для $G(\varphi, \psi, s)$. Для дальнейшего представляют интерес только те нули s_k функций $D_1(s)$ и $D_2(s)$, у которых $\operatorname{Re} s_k < 0$ $(1_k \neq 0, -1, -2)$. Перенумеруем их в порядке возрастания модулей, присваивая один и тот же номер k равным по модулю нулям (как видно из (4.3), одному номеру k будут соответствовать два комплексно-сопряженных нуля $D_1(s)$ или $D_2(s)$. Нетрудно показать, что

$$s_k = -2 - 2k \pm i{}^1/_2\pi\ln 2(1+2k) + O(k^{-1}\ln k)$$

В [8] приведена таблица корней уравнений $\operatorname{sh} z \pm 2z/\pi = 0$, из которой после соответствующих преобразований следует, что [1]

$$s_1 \approx -3.739 \pm 1.119i, \quad s_2 \approx -5.808 \pm 1.464i, \quad s_3 \approx -7.843 \pm 1.681i, \ldots \tag{4.4}$$

Используя явное представление (4.2) функции Грина, непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$|G(\varphi, \psi, s)| \leqslant C|s|^{-1}, \; |G''_{\psi_2}(\varphi, {}^1/_2\pi, s)| \leqslant C, \; |G'''_{\psi_3}(\varphi, {}^1/_2\pi, s)| \leqslant C|s| \tag{4.5}$$

во всей s-плоскости за исключением окрестностей полюсов.

[1] Утверждение В. А. Кондратьева [2] (стр. 289), о том, что в полосе $1 < \operatorname{Re} z < 2$ есть корень уравнения $\sin^2 {}^1/_2\pi z - z^2 = 0$, ошибочно, неверен и вывод, сделанный на основе этого утверждения.

5. Представление (4.1) функции $U(\varphi, s)$ было получено для $\sigma > 0$, однако оно имеет место и для $\sigma > -1$ в силу аналитичности правой части (4.1) (аналитичность следует из (2.2), (2.3), лемм 2.7, 2.8, 2.10 и свойств функции Грина). Применим к (4.1) обратное преобразование Меллина. Считая $r < R - \delta$, получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} r^{-s} U(\varphi, s)\, ds \tag{5.1}$$

Здесь в силу леммы 2.6 можно положить $\sigma = -1 + \delta$, где $\delta > 0$ может быть взято сколь угодно малым.

Из (5.1) следует, что $u(r, \varphi)$ не может иметь особенности r^s, где $\operatorname{Re} s < 1$, точнее, при $\operatorname{Re} s < 1$

$$\lim_{r \to 0} u(r, \varphi)\, r^{-s} = 0$$

При выводе формулы (5.1) использовалась только принадлежность функции u пространству $W_2^2(\Omega)$ с вытекающими отсюда следствиями (2.2) — (2.4). Предположим теперь, что $f \in C_{l+\alpha}(-1, R-1)$, $f_1 \in C_{l-1+\alpha}(-1, R-1)$, $l \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$. Тогда по лемме 2.9 (см. (3.15), (3.5), лемму 2.4)) $M(\psi, s)$ есть целая функция и справедлива оценка

$$|M(\psi, s)| \leqslant C(\|f\|_{C_{l+\alpha}} + \|f_1\|_{C_{l-1+\alpha}})\, |s|^{-l+3}\, |e^{\pi/|\tau|} - 1|^{\alpha} \tag{5.2}$$

По лемме 2.10 $F(s)$ и $F_1(s)$ аналитичны в полуплоскости $\sigma > -(l + \alpha)$ за исключением, быть может, точек $s = -1, -2, \ldots, -l$ и справедливы оценки

$$|F(s)| \leqslant C \|f\|_{C_{l+\alpha}} |s|^{-l}\, |e^{\pi/|\tau|} - 1|^{\gamma}$$

$$|F_1(s)| \leqslant C \|f_1\|_{C_{l-1+\alpha}} |s|^{-l+1}\, |e^{\pi/|\tau|} - 1|^{\gamma} \tag{5.3}$$

Отсюда следует, что $U(\varphi, s)$ аналитически продолжима в полосу $-(l + \alpha) < \sigma \leqslant -1$ и имеет, может быть, в этой полосе простые полюса в точках $s = s_k$ и $s = -k$ ($k = 1, 2, \ldots, l$). Из (5.2), (5.3) и (4.5) вытекает оценка

$$|U(\varphi, s)| \leqslant C(\|f\|_{C_{l+\alpha}} + \|f_1\|_{C_{l-1+\alpha}})\, |s|^{-l+2}\, |e^{\pi/|\tau|} - 1|^{\gamma} \tag{5.4}$$

Аналитичность $U(\varphi, s)$ и оценка (5.4) дают возможность перейти в (5.1) от интегрирования по прямой $\sigma = -1 + \delta$ к интегрированию по прямой $\sigma = \sigma_{l+\alpha} = -(l + \alpha) + \delta$. При этом получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_{l+\alpha} - i\infty}^{\sigma_{l+\alpha} + i\infty} r^{-s} U(\varphi, s)\, ds + \sum \operatorname{res} r^{-s} U(\varphi, s) \tag{5.5}$$

Вычеты в (5.5) следует брать относительно всех полюсов подынтегральной функции, лежащих в полосе $\sigma_{l+\alpha} < \sigma < -1 + \delta$. Имеем

$$\operatorname{res} r^{-s} U(\varphi, s)\, |_{s=-k} = r^k A_k(\varphi) \tag{5.6}$$

Здесь

$$A_1(\varphi) = \frac{2}{\pi^2 - 4} \{[2\varphi \cos\varphi + (\pi\varphi - 2)\sin\varphi]\, f'(0) - [\pi\varphi\cos\varphi + (2\varphi - \pi)\sin\varphi]\, f_1(0)\}$$

$$A_2(\varphi) = {}^1/_2\, [\sin^2\varphi\, f''(0) - ({}^1/_2\pi \sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi - \varphi)\, f_1'(0)]$$

$$A_{2n+1}(\varphi) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big[\Big(\cos 2n\varphi \sin\varphi - \frac{1}{2n} \sin 2n\varphi \cos\varphi\Big) f^{(2n+1)}(0) + \Big(1 + \frac{1}{2n}\Big) \sin 2n\varphi \sin\varphi\, f_1^{(2n)}(0)\Big] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$A_{2n+2}(\varphi)=\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\left\{\sin(2n+1)\varphi\sin\varphi f^{(2n+2}(0)-\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cos(2n+1)\varphi\sin\varphi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2n}\sin(2n+1)\varphi\cos\varphi\right]f_1^{(2n+1)}(0)\right\}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$\operatorname{res} r^{-s}U(\varphi,\ s)|_{s=s_k}=c_k r^{-s_k}a_k(\varphi)\tag{5.7}$$

где

$$c_k=\frac{1}{\gamma_k}\left[\sin{}^1/_4 s_k\pi F(s_k)+\frac{\cos{}^1/_4 s_k\pi}{s_k+2}F_1(s_k)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{s_k(s_k+1)(s_k+2)}\int\limits_0^{{}^1/_2\pi}M(\psi,\ s_k)\,b_k(\psi)\,d\psi\right]\quad(k=2n)$$

$$c_k=\frac{1}{\gamma_k}\left[-\cos{}^1/_4 s_k\pi F(s_k)+\frac{\sin{}^1/_4 s_k\pi}{s_k+2}F_1(s_k)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{s_k(s_k+1)(s_k+2)}\int\limits_0^{{}^1/_2\pi}M(\psi,\ s_k)\,b_k(\psi)\,d\psi\right]\quad(k=2n-1)$$

$$a_k(\varphi)=a^{(1)}(\varphi,\ s_k),\qquad b_k(\psi)=b^{(1)}(\psi,\ s_k),\qquad \gamma_k=\pi\sin{}^1/_2 s_k\pi+2\qquad(k=2n)$$

$$a_k(\varphi)=a^{(2)}(\varphi,\ s_k),\qquad b_k(\psi)=b^{(2)}(\psi,\ s_k),\qquad \gamma_k=\pi\sin{}^1/_2 s_k\pi-2\qquad(k=2n-1)$$

Вставляя (5.6), (5.7) в (5.5), окончательно получим

$$u(r,\ \varphi)=\sum_{k=1}^{l}r^k A_k(\varphi)+\sum_{\operatorname{Re}s_k\geq\sigma_{l+\alpha}}c_k r^{-s_k}a_k(\varphi)+O(r^{(l+\alpha)-\delta})\tag{5.8}$$

Как видно из оценки (5.4), формулу (5.8) можно дифференцировать по обеим переменным l — 3 раза. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 5.1. Если $f\in C_{l+\alpha}(-1,R-1)$, $f_1\in C_{l-1+\alpha}(-1,R-1)$, $l\geq 2$, $0<\alpha<1$, то функция u, являющаяся обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), имеет в окрестности точки A l — 3 раза дифференцируемое представление (5.8).

Представление (5.8) позволяет делать некоторые выводы о дифференциальных свойствах функции u в окрестностях угловых точек. Например:

а) если $f\in C_{4+\alpha}(-1,\ R-1)$, $f_1\in C_{3+\alpha}(-1,R-1)$ и $f'(-1)=f_1(-1)=0$, то

$$u(x,\ y)\in C_{1+\beta}(\Omega_{R-\varepsilon,A})\quad(0<\beta\leq 1);$$

б) если $f\in C_{5+\alpha}(-1,\ R-1)$, $f_1\in C_{4+\alpha}(-1,\ R-1)$ и $f'(-1)=f''(-1)=f_1(-1)=f_1'(-1)=0$, то

$$u(x,\ y)\in C_{2+\beta}(\Omega_{R-\varepsilon,A})\quad(0<\beta\leq 1)$$

в) если $f\in C_{6+\alpha}(-1,\ R-1)$, $f_1\in C_{5+\alpha}(-1,\ R-1)$ и $f'(-1)=f''(-1)=f'''(-1)=f_1(-1)=f_1'(-1)=f_1''(-1)=0$, то

$$u(x,\ y)\in C_{3+\beta}(\Omega_{R-\varepsilon,A})\quad(0<\beta\leq\approx 0.739)$$

г) если $f\in C_{7+\alpha}(-1,\ R-1)$, $f_1\in C_{6+\alpha}(-1,\ R-1)$ и $f'(-1)=f''(-1)=f'''(-1)=f_1(-1)=f_1'(-1)=f_1''(-1)=0$, то

$$u(x,\ y)\in W_p^4(\Omega_{R-\varepsilon,A})\qquad(p\leq\approx 7.66)$$

Для дальнейшего улучшения дифференциальных свойств функции u в окрестности точки A нужно требовать обращения в нуль не только соответствующих производных функций f и f_1 в точке —1, но и нескольких первых коэффициентов c_k.

Утверждение г) и леммы 2.2, 2.5 позволяют сформулировать основной результат работы [1] в следующей замкнутой форме.

Теорема 5.2. Если $f \in W_p^{4-1/p}(-1,1) \cap C_{7+\alpha}(-1,\ R-1) \cap C_{7+\alpha}(1-R,\ 1)$, $f_1 \in W_p^{3-1/p}(-1,1) \cap C_{6+\alpha}(-1,\ R-1) \cap C_{6+\alpha}(1-R,\ 1)$, $p > 2$, $0 < \alpha < 1$, и $f(\pm 1) = f'(\pm 1) = f''(\pm 1) = f'''(\pm 1) = f_1(\pm 1) = f_1'(\pm 1) = f_1''(\pm 1) = 0$, то решение u задачи (1.1), (1.2) единственным образом представимо в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [c_k^{(1)} a_k^{(1)}(y) \cos \lambda_k^{(1)} x + c_k^{(2)} a_k^{(2)}(y) \cos \lambda_k^{(2)} x] \tag{5.9}$$

6. Представление функции $u(x, y)$ в виде ряда (5.9) дает возможность проанализировать ее поведение при стремлении относительной ширины прямоугольника $ABCD$ к нулю, т. е. при $h \to \infty$.

Теорема 6.1. Если выполнены условия теоремы 5.2, то функция $u(x, y)$, являющаяся решением задачи (1.1), (1.2), равномерно исчезает вместе со всеми производными при $h \to \infty$ во всякой ограниченной подобласти прямоугольника $ABCD$.

В представлении (5.9), как показано в [1], $c_k = O(e^{-k\pi h} k^{-5/2})$, $a_k(y) = O(k^{3/2})$, $\cos \lambda_k x = O(e^{k\pi |x|})$, так что, если $h \to \infty$, а x остается ограниченным, то каждый член ряда (5.9) экспоненциально убывает, что и доказывает теорему 6.1.

Поступила 12 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Ковальчук В. Е. О базисных свойствах одной системы однородных решений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
4. Слободецкий Л. М. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, т. 197.
5. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
7. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., Гостехиздат, 1954.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.

О МЕТОДЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. Я. Попов
(Одесса)

Показывается, что применение ортогональных многочленов к контактным задачам [1–12] тесно связано с наличием некоторого специального класса так называемых полиномиальных ядер [13]. В работах [4,6,14,15] различными путями были построены частные случаи таких ядер. Указывается один способ построения полиномиальных ядер, на основе которого получаются как все ранее построенные ядра, так и более общие.

§ 1. **Сущность метода ортогональных многочленов.** Известно, что пространственные контактные задачи без сил трения можно свести к двумерному интегральному уравнению первого рода. К этому уравнению приходится добавлять еще и дифференциальное уравнение, если контактируется не штамп, а пластинка. Для таких областей контакта как полуплоскость, полоса, круг, кольцо путем применения того или иного интегрального преобразования можно указанную двумерную систему уравнений привести к одномерной. При этом в случае контакта штампа будем иметь только одно одномерное интегральное уравнение первого рода. В случае же контакта пластин-