Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК. ПОСТРОЕНИЕ УТОЧНЕННЫХ ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРИЙ

Н. А. Базаренко, И. И. Ворович

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается неосесимметричная задача теории упругости для круговых цилиндрических оболочек, загруженных по торцовой поверхности Γ_2. С помощью метода разложения в тригонометрические ряды изучаются однородные решения замкнутой оболочки ($\Gamma_2 : z = \pm l$) и открытой оболочки ($\Gamma_2 : \varphi = \pm \varphi_0$) при уменьшении их толщин.

Доказывается, что напряженное состояние замкнутой оболочки включает четыре части: (1) элементарное напряженное состояние, проникающее внутрь оболочки без затухания, (2) медленно затухающее, основное напряженное состояние, (3) напряженное состояние, быстро затухающее (краевой эффект оболочек), (4) напряженное состояние типа погранслоя.

В случае открытой цилиндрической оболочки, загруженной периодической нагрузкой с периодом l_0, имеют место напряженные состояния типа (1), (3) и (4). При этом скорость затухания краевых эффектов существенно зависит как от номера члена тригонометрического ряда, так и от величины l_0. В обоих случаях приводятся асимптотические разложения составляющих напряженного и деформированного состояний.

На базе точного решения трехмерной задачи дается уточненная прикладная теория круговой цилиндрической оболочки, предназначаемая для снятия напряжений с торцевой поверхности Γ_2. Прикладные теории, снимающие напряжения с цилиндрической части границы оболочки, были рассмотрены ранее в работе [1].

§ 1. Построение однородных решений. Рассмотрим произвольную деформацию упругой изотропной оболочки, ограниченной коаксиальными круговыми цилиндрами Γ_1 радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) и торцевой поверхностью Γ_2. Будем предполагать, что усилия, приложенные к границе Γ_2, образуют статически эквивалентную нулю систему, а граница Γ_1 свободна от напряжений. Возьмем за исходные соотношения выражения для перемещений и напряжений, полученные в работе [1] на основе символической записи А. И. Лурье [2]

$$\begin{gathered}u = R_3\{Z_\nu' A - \xi^{-1} Z_\nu \partial_2 N - \xi Z_\nu C + *\}\\ v = R_3\{\xi^{-1} Z_\nu \partial_2 A + Z_\nu' N + *\}\\ w = R_3\{Z_\nu A + [\xi Z_\nu' + 2\varkappa Z_\nu]\, C + *\}\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\sigma_r = 2Gp\{[Z_\nu(\nu^2\xi^{-2} - 1) - \xi^{-1}Z_\nu']\, A + (\xi^{-2}Z_\nu - \xi^{-1}Z_\nu')\,\partial_2 N + \\ + [(1-\varkappa) Z_\nu - \xi Z_\nu']\, C + *\}\\ \tau_{r\varphi} = Gp\{2(-\xi^{-2}Z_\nu + \xi^{-1}Z_\nu')\,\partial_2 A + \\ + [Z_\nu(2\nu^2\xi^{-2} - 1) - 2\xi^{-1}Z_\nu']\, N - Z_\nu \partial_2 C + *\}\\ \tau_{rz} = Gp\{2Z_\nu' A - \xi^{-1}Z_\nu\partial_2 N + [Z_\nu(\nu^2\xi^{-1} - 2\xi) + 2\varkappa Z_\nu']\, C + *\}\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\sigma_z = 2Gp\{Z_\nu A + [(2+\varkappa) Z_\nu + \xi Z_\nu'] C + *\}$$

$$\tau_{z\varphi} = Gp\{2\xi^{-1} Z_\nu \partial_2 A + Z_\nu' N + (2\xi^{-1}\varkappa Z_\nu + Z_\nu')\partial_2 C + *\} \qquad (1.3)$$

$$\sigma_\varphi = 2Gp\{(-\nu^2\xi^{-2} Z_\nu + \xi^{-1} Z_\nu') A + (-\xi^{-2} Z_\nu + \xi^{-1} Z_\nu')\partial_2 N + (1-\varkappa) Z_\nu C + *\}$$

$$\left(p = \frac{\partial}{\partial\zeta},\ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi},\quad \nu = -i\partial_2,\quad \xi = p\rho,\quad \zeta = \frac{z}{R_3},\quad \rho = \frac{r}{R_3},\quad \varkappa = \frac{2(m-1)}{m}\right)$$

Здесь m — число Пуассона, A, N, C — произвольные функции от ζ и φ, $Z_\nu(\xi)$ — цилиндрическая оператор-функция (см., например, работу [1]), R_3 — характерный размер, звездочкой обозначены аналогичные выражения, получаемые заменой функций $Z_\nu(\xi), A, N, C$ на функции $X_\nu(\xi)$, A^*, N^*, C^*.

Выделим из (1.1)—(1.3) класс однородных решений, т. е. решений, для которых отсутствуют напряжения на границе Γ_1

$$\sigma_r = 0,\quad \tau_{r\varphi} = 0,\quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } r = R_1, R_2 \qquad (1.4)$$

Подставив σ_r, $\tau_{r\varphi}$, τ_{rz} из (1.2) в (1.4), получим систему однородных дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка относительно неизвестных функций $A, N, \ldots C^*$

$$\begin{gathered} d_{11}A + d_{12}N + \ldots + d_{16}C^* = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{61}A + d_{62}N + \ldots + d_{66}C^* = 0 \end{gathered} \qquad (1.5)$$

где через d_{ik} обозначены соответствующие операторы. Следуя работам [3-5], в качестве решения (1.5) можно взять

$$A = A_{1k}\Psi(\zeta,\varphi),\qquad N = A_{2k}\Psi(\zeta,\varphi), \ldots,\qquad C^* = A_{6k}\Psi(\zeta,\varphi) \qquad (1.6)$$

Здесь операторы A_{ik} суть алгебраические дополнения элементов k-й строки оператора-определителя Q системы (1.5); $\Psi(\zeta,\varphi)$ — функция напряжений, удовлетворяющая уравнению

$$Q\,\Psi(\zeta,\varphi) = 0 \qquad (1.7)$$

Уравнение (1.7) определяет счетное множество решений $\Psi_k(\zeta,\varphi)$, а соответствующие им функции $A_k, N_k, \ldots, C_k^*$ после подстановки в (1.1)—(1.3) образуют однородные решения круговой цилиндрической оболочки.

Вычисляя определитель системы (1.5), получим

$$Q = p^5 \sum_{k,\,j=0}^{1} \sum_{i,\,\mu=0}^{1} L_{kj}(L_{i\mu}^2 P_{kj,\,i\mu} + P_{kj}) \qquad (1.8)$$

$$L_{ki} = [J_\nu^{(k)}(\xi_1) K_\nu^{(i)}(\xi_2) - J_\nu^{(i)}(\xi_2) K_\nu^{(k)}(\xi_1)]\, p$$

$$f^{(0)}(x) = f(x),\quad f^{(1)}(x) = df(x)\,/\,dx,\quad \xi_1 = pR_1\,/\,R_3,\quad \xi_2 = pR_2\,/\,R_3 \qquad (1.9)$$

Здесь J_ν — функция Бесселя первого рода, K_ν — функция Вебера — Шлефли второго рода. $P_{kj,i\mu}$ и P_{kj} — выражения следующей структуры

$$\sum_{k=0}^{6}\sum_{i=0}^{6} a_{ki}\frac{\gamma^{2k}}{p^i} \qquad \left(\gamma = \frac{\nu}{p},\ 2k + i \leqslant 12\right) \qquad (1.10)$$

Теперь, положив $R_3 = \sqrt{R_1 R_2}$ и учитывая, что в этом случае оператор Q — целая функция не только от D^2, p^2, но и от ε ($\varepsilon = 0.5 \ln (R_2 / R_1)$, $D^2 = p^2 + \partial_2{}^2$), представим правую часть соотношения (1.8) в виде ряда по степеням ε^2. Вычисления дают

$$Q = \varepsilon^3 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \Omega_k (D^2, p^2) \qquad (1.11)$$

$$\Omega_0 = 2b_0 p^4, \quad \Omega_1 = b_0 (8 - 4D^2) p^4 + {}^{16}/_3 (D^2 + 1) p^4 - {}^4/_3 (D^4 + D^2 + p^2)^2$$

$$\Omega_2 = {}^8/_5 D^{10} + {}^{112}/_{45} D^8 - ({}^{32}/_{45}\varkappa + {}^{16}/_{45}) D^6 p^2 + ({}^{52}/_{15} b_0 - {}^{32}/_5) D^4 p^4 + \Omega_2{}^*$$

$$\Omega_3 = - {}^{808}/_{945} D^{12} + \Omega_3{}^* \quad (2b_0 = \varkappa^2 - 4\varkappa) \qquad (1.12)$$

Здесь $\Omega_2{}^*$ и $\Omega_3{}^*$ — операторы более низкого порядка, чем выписанные.

Если же воспользоваться разложениями величин L_{jk} по степеням p

$$L_{00} = p b_0{}^* - {}^1/_4 p^3 b_1 + {}^1/_{16} p^5 (b_1 \operatorname{ch} 2\varepsilon - {}^1/_2 b_2) + \ldots \qquad (1.13)$$

$$L_{11} = - b_0{}^* \nu^2 / p + {}^1/_2 p ({}^1/_2 b_1 - a_0 \operatorname{sh} 2\varepsilon - b_0{}^* \operatorname{ch} 2\varepsilon) +$$
$$+ {}^1/_8 p^3 (b_0{}^* \operatorname{sh}^2 2\varepsilon - {}^3/_2 b_1 \operatorname{ch} 2\varepsilon + b_2) + \ldots$$

$$L_{01} = e^{-\varepsilon} \{ a_0 - {}^1/_2 p^2 (b_0{}^* \operatorname{sh} 2\varepsilon + {}^1/_2 b_1) + {}^1/_{16} p^4 (b_1 \operatorname{ch} 2\varepsilon + e^{\varepsilon} b_1 - b_2) + \ldots \}$$

$$L_{10} = e^{\varepsilon} \{ - a_0 + {}^1/_2 p^2 (b_0{}^* \operatorname{sh} 2\varepsilon - {}^1/_2 b_1) + {}^1/_{16} p^4 (b_1 \operatorname{sh} 2\varepsilon + e^{-\varepsilon} b_1 - b_2) + \ldots \}$$

$$(a_0 = \operatorname{ch} 2\varepsilon\nu, \qquad b_0{}^* = \operatorname{sh} 2\varepsilon\nu / \nu$$

$$b_k = [\operatorname{sh} 2\varepsilon (k + \nu) / (k + \nu) - \operatorname{sh} 2\varepsilon (k - \nu) / (k - \nu)] \, {}^1 / \nu$$

то, подставляя (1.13) в (1.8), получим

$$Q (\varepsilon, \partial_2{}^2, p^2) = {}^1/_8 (\partial_2 + \partial_2{}^3) \sin 2\partial_2 \varepsilon (\sin^2 2\partial_2 \varepsilon - \partial_2{}^2 \operatorname{sh}^2 2\varepsilon) +$$
$$+ p^2 \partial^2 (1 + \partial_2{}^2) U_1 (\varepsilon, \partial_2{}^2) + p^4 U_2 (\varepsilon, \partial_2{}^2) + \ldots \qquad (1.14)$$

где целые функции $U_1 (\varepsilon, \partial_2{}^2)$ и $U_2 (\varepsilon, \partial_2{}^2)$ не обращаются в нуль при $\partial_2{}^2 = -1$ и $\partial_2{}^2 = 0$.

В силу (1.10) оператор Q можно записать в виде

$$Q = p^5 \{ Q^* L_{00} \Delta_1{}^2 \Delta_2{}^2 \} + p^4 \{ 2 Q^* [L_{10} e^{\varepsilon} \} (1 + \varkappa\gamma^2 e^{2\varepsilon}) \Delta_2{}^2 +$$
$$+ L_{01} e^{-\varepsilon} (1 + \varkappa\gamma^2 e^{-2\varepsilon}) \Delta_1{}^2] + 8\varkappa \{ \operatorname{sh}^2 2\varepsilon (L_{10} e^{\varepsilon} \Delta_2 + L_{01} e^{-\varepsilon} \Delta_1) \gamma^2 \} +$$
$$+ p^3 \{ 2 Q^* [2L_{11} (1 + 2\varkappa\gamma^2 \operatorname{ch} 2\varepsilon + \varkappa^2 \gamma^4) - L_{00} \gamma^2 (\Delta_1 \Delta_2 + 2 \operatorname{sh}^2 2\varepsilon)] -$$
$$- \varkappa L_{00} \langle (\gamma^4 \operatorname{ch} 2\varepsilon - 2\gamma^2 + \operatorname{ch} 2\varepsilon) (2L_{11}{}^2 - 2L_{00}{}^2 \gamma^4 + L_{01}{}^2 + L_{10}{}^2 - 2 \operatorname{ch} 2\varepsilon) +$$
$$+ 2\gamma^2 L_{00}{}^2 (\Delta_1 \Delta_2 + 2 \operatorname{sh}^2 2\varepsilon) + (\gamma^4 - 1) \operatorname{sh} 2\varepsilon [L_{01}{}^2 - L_{10}{}^2 - 2\gamma^2 \rangle \times$$
$$\times \langle (L_{01}{}^2 e^{2\varepsilon} - L_{10}{}^2 e^{-2\varepsilon})] \rangle - 2\varkappa \operatorname{sh}^2 2\varepsilon [L_{00} - 8L_{11} \gamma^2 - (9 + 2\varkappa) L_{00} \gamma^4] \} + \ldots \qquad (1.15)$$

где

$$Q^* = L_{00}{}^2 \Delta_1 \Delta_2 + L_{10}{}^2 \Delta_2 + L_{01}{}^2 \Delta_1 + L_{11}{}^{2\varepsilon} - e^{-2\varepsilon} \Delta_1 - e^{2\varepsilon} \Delta_2$$

$$\Delta_1 = 1 - \gamma^2 e^{2\varepsilon}, \qquad \Delta_2 = 1 - \gamma^2 e^{-2\varepsilon}$$

Наконец, оператор Q допускает еще одно представление, которое обусловлено соответствующим разложением величин L_{jk}

$$Q = (2\varepsilon)^{-3} / 8 \sum_{k=0}^{\infty} (2\varepsilon)^{2k} Q_k (D_*{}^2, p_*{}^2) \qquad (1.16)$$

где

$$Q_0 = D_*^3 \sin D_* (\sin^2 D_* - D_*^2) \qquad (D_*^2 = (2\varepsilon)^2 D^2,\ p_* = 2\varepsilon p)$$

$$Q_1 = \sin^3 D_* \{p_*^4 [(-{}^{41}/_8 + 4\varkappa + \varkappa^2) D_*^{-3} - {}^3/_4 D_*^{-1}] +$$
$$+ p_*^2 [({}^1/_2 - 6\varkappa) D_*^{-1} + {}^3/_4 D_*] + D_*\} +$$
$$+ \sin^2 D_* \cos D_* \{p_*^4 [(-{}^9/_8 - 3\varkappa) D_*^{-2} - {}^1/_8] +$$
$$+ p_*^2 [(-{}^1/_2 + 2\varkappa) + {}^1/_4 D_*^2]\} + \sin D_* \{p_*^4 [({}^7/_8 - 3\varkappa) D_*^{-1} + {}^3/_2 D_*] +$$
$$+ p_*^2 [(-{}^3/_2 + 2\varkappa) D_* - {}^5/_4 D_*^3] - D_*^3 - {}^1/_3 D_*^5\} +$$
$$+ \cos D_* \{p_*^4 [({}^{43}/_8 - 2\varkappa) + {}^1/_{24} D_*^2] + p_*^2 [(-{}^7/_2 + 2\varkappa) D_*^2 - {}^1/_{12} D_*^4]\} \qquad (1.17)$$

Будем изучать особенности поведения однородных решений, используя метод разложения в тригонометрические ряды. В случае полого цилиндра конечной длины ($\Gamma_2 : z = \pm l$) функцию напряжений $\Psi_1(\zeta, \varphi)$ можно отыскать, положив

$$\Psi_1(\zeta, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} H_{ki} \begin{cases} \operatorname{sh} \lambda_{ki}\zeta \sin k\varphi \\ \operatorname{ch} \lambda_{ki}\zeta \cos k\varphi \end{cases} \qquad (1.18)$$

Для цилиндрической панели ($\Gamma_2 : \varphi = \pm \varphi_0$), загруженной периодической нагрузкой с периодом l_0, функцию напряжений $\Psi_2(\zeta, \varphi)$ будем разыскивать в виде

$$\Psi_2(\zeta, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} H_{ni}^* \begin{cases} \operatorname{sh} k_{ni}\varphi \sin n_m\zeta \\ \operatorname{ch} k_{ni}\varphi \cos n_m\zeta \end{cases} \qquad \left(n_m = m\frac{\pi}{l_0}\right) \qquad (1.19)$$

В формулах (1.18), (1.19) H_{ki} и H_{ni}^* — произвольные постоянные, а λ_{ki} и k_{ni} — некоторые параметры.

Подставив (1.18) и (1.19) в (1.7), получим характеристические уравнения относительно λ_{ki} и k_{ni}

$$Q(\varepsilon, -k^2, \lambda_{ki}^2) = 0, \qquad Q(\varepsilon, k_{ni}^2, -n_m^2) = 0 \qquad (1.20)$$

§ 2. Анализ корней характеристического уравнения замкнутой цилиндрической оболочки. Произведем анализ корней первого трансцендентного уравнения (1.20) при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим сначала случай малых k ($k < \varepsilon^{-1/2}$). Будем разыскивать корни, имеющие при $\varepsilon \to 0$ конечный предел. Очевидно, если такие корни имеются, то их предельные значения λ_{ki0} найдутся из предельного уравнения

$$[\varepsilon^{-3} Q(\varepsilon, -k^2, \lambda_{ki0}^2)]|_{\varepsilon=0} = 0$$

которое в рассматриваемом случае имеет вид $2b_0\lambda_{ki0}^4 = 0$. Отсюда заключаем, что для каждого k уравнение (1.20) определяет четыре исчезающе малых при $\varepsilon \to 0$ корня. Используя это свойство для малых λ_{ki} и ε, первое уравнение (1.20) запишем в виде (2.1)

$$\varepsilon^3\{2b_0\lambda_{ki}^4 + \varepsilon^2[-{}^4/_3 k^4(k^2-1)^2 + {}^{16}/_3 \lambda_{ki}^2 k^2 (k^2-1)^2 + 4b_0\lambda_{ki}^4 (k^2+2) -$$
$$- 8\lambda_{ki}^4 k^2 (k^2-1) + \ldots] + \varepsilon^4[-{}^8/_{45} k^4 (k^2-1)^2 (4+9k^2) + \ldots] + \ldots\} = 0$$

Из (2.1) вытекает асимптотическое разложение

$$\begin{gathered}\lambda_{ki} = \varepsilon^{1/2}p_0, \quad p_0 = \lambda_{ki0} + \varepsilon\lambda_{ki1} + \varepsilon^2\lambda_{ki2} + \ldots, \\ \lambda_{ki0}^4 - {}^2/_3k^4(k^2-1)^2b_0^{-1} = 0 \\ \lambda_{ki1} = -{}^2/_3\lambda_{ki0}^{-1}k^2(k^2-1)^2b_0^{-1} \\ \lambda_{ki2} = \lambda_{ki0}\,[{}^1/_3b_0^{-1}(k^2-1)(4k^2-1) - {}^1/_5k^2 - {}^{13}/_{15}]\end{gathered} \tag{2.2}$$

Принимая во внимание (2.2) и (1.14), легко убедиться, что $\lambda_{0i} = 0$ и $\lambda_{1i} = 0$ — точные четырехкратные корни.

Предположим теперь, что все остальные корни $\lambda_{ki} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда, используя асимптотические разложения цилиндрических функций от аргумента, стремящегося к бесконечности и с малым индексом, уравнению (1.20) можно придать вид

$$\begin{gathered}[\alpha_{ki}^3 \sin(a\alpha_{ki})\ (\sin^2(a\alpha_{ki}) - (a\alpha_{ki})^2)] + \varepsilon^2[\alpha_{ki}\ \sin^3(a\alpha_{ki})({}^{11}/_2 - 8\varkappa + \\ + 4\varkappa^2 - 6k^2) - \alpha_{ki}^2\sin^2(a\alpha_{ki})\cos(a\alpha_{ki})({}^{13}/_2 + 4\varkappa + 6k^2) - \\ - \alpha_{ki}^3\sin(a\alpha_{ki})({}^{13}/_2 + 4\varkappa - 10k^2) + \alpha_{ki}^4\cos(a\alpha_{ki})({}^{15}/_2 + 2k^2)] + \ldots = 0 \\ (\alpha_{ki} = 2\lambda_{ki}\varepsilon,\ a = \varepsilon^{-1}\operatorname{sh}\varepsilon)\end{gathered} \tag{2.3}$$

При $\varepsilon \to 0$ и $\lambda_{ki} \to \infty$ для величин α_{ki} возможны предельные соотношения $\alpha_{ki} \to 0$, $d_{ki} \to \text{const}$ и $\alpha_{ki} \to \infty$.

В первом случае $\alpha_{ki} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая это свойство для малых α_{ki} и ε, уравнение (2.3) запишем в виде

$$\begin{gathered}[-{}^1/_3\alpha_{ki}^8 + {}^1/_{10}\alpha_{ki}^{10} - {}^{101}/_{7560}\alpha_{ki}^{12} + \ldots] + \\ + \varepsilon^2\,[8b_0\alpha_{ki}^4 + ({}^{16}/_3k^2 - 4b_0)\,\alpha_{ki}^6 + ({}^{13}/_{15}b_0 - {}^{16}/_{15} - {}^8/_{45}\varkappa - 2k^2)\,\alpha_{ki}^8 + \ldots] + \\ + \varepsilon^4\,[32\alpha_{ki}^4(b_0 + {}^1/_2k^2b_0 + k^2 - k^4) + \ldots] + \ldots = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует асимптотическое разложение

$$\begin{gathered}\lambda_{ki} = \varepsilon^{-1/2}p_1, \quad p_1 = \alpha_{ki0} + \varepsilon\alpha_{ki1} + \varepsilon^2\alpha_{ki2} + \ldots, \quad \alpha_{ki0}^4 - {}^3/_2b_0 = 0 \\ \alpha_{ki1} = (k^2 - {}^3/_{10}b_0)\alpha_{ki0}^{-1}, \\ \alpha_{ki2} = [(k^2 - {}^2/_3k^4)b_0^{-1} + {}^{167}/_{2100}b_0 - {}^2/_{15}\varkappa + {}^1/_5]\alpha_{ki0}\end{gathered} \tag{2.5}$$

Рассмотрим второй случай $\alpha_{ki} \to \alpha_{ki}^*$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда, как легко видеть из (2.3), α_{ki}^* удовлетворяет уравнению

$$(a\alpha_{ki}^*)^{-5}\sin(a\alpha_{ki}^*)\,(\sin^2(a\alpha_{ki}^*) - (a\alpha_{ki}^*)^2) = 0 \tag{2.6}$$

Следует отметить, что уравнение (2.6) совпадает с уравнением, определяющим показатели краевых эффектов погранслоев в теории плит [6]. Уравнение (2.6) имеет счетное множество корней, поэтому и (2.3) также имеет счетное множество корней таких, что $\lambda_{ki}\varepsilon \to \text{const}$ при $\varepsilon \to 0$. Можно получить уточненные значения указанных корней, воспользовавшись разложением

$$\lambda_{ki} = p_2\,(2\operatorname{sh}\varepsilon)^{-1}, \quad p_2 = x_1 + \varepsilon^2\delta_{k2} + \varepsilon^4\delta_{k4} + \ldots \tag{2.7}$$

$$\delta_{k2} = (4k^2 + 4\varkappa - 1)(2x_1)^{-1} - 8b_0(\sin 2x_1 - 2x_1)^{-1}(\sin^2 x_1 - x_1^2) \,/\, x_1^4 = 0$$

$$p_2 = x_0 + \varepsilon^2\delta_{k2}^* + \varepsilon^4\delta_{k4}^* + \ldots \tag{2.8}$$

$$\delta_{k2}^* = (4k^2 + 15)(2x_0)^{-1}, \quad \sin x_0 \,/\, x_0 = 0$$

Покажем, что третий случай неосуществим. В самом деле, из (2.6) видно, что если $\varepsilon \to 0$, то выполнение асимптотического равенства $\sin(a\alpha_{ki})(\sin^2(a\alpha_{ki}) - (a\alpha_{ki})^2) \sim 0$ для α_{ki}, непрерывно стремящегося к бесконечности, невозможно.

Обращаясь к случаю средних k ($\varepsilon^{-1/2} \lesssim k < \varepsilon^{-1}$), введем в рассмотрение величины $\lambda = \lambda_{ki}\sqrt{\varepsilon}$ и $k_0 = k\sqrt{\varepsilon}$. В новых обозначениях первое характеристическое уравнение (1.20) примет вид

$$(2b_0\lambda^4 - {}^4/_3\Delta^8) + \varepsilon[-{}^8/_3\Delta^6 - {}^8/_3\Delta^4\lambda^2 + ({}^{16}/_3 - 4b_0)\Delta^2\lambda^4 + {}^8/_5\Delta^{10}] +$$
$$+ \varepsilon^2[(8b_0 + 4)\lambda^4 - {}^4/_3\Delta^4 - {}^8/_3\Delta^2\lambda^2 + {}^{112}/_{45}\Delta^8 - ({}^{16}/_{45} + {}^{32}/_{45}\varkappa)\Delta^6\lambda^2 -$$
$$- ({}^{32}/_5 - {}^{52}/_{15}b_0)\Delta^4\lambda^4 - {}^{808}/_{945}\Delta^{12}] + \ldots = 0 \qquad (2.9)$$
$$(\Delta^2 = \lambda^2 - k_0^2)$$

Разыскивая λ в виде ряда по степеням ε, получим

$$\lambda_{ki} = \varepsilon^{-1/2}(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots), \qquad \lambda_0^2 - \varkappa_k\lambda_0 - k_0^2 = 0, \ \varkappa_k^4 - {}^3/_2b_0 = 0$$
$$\lambda_1 = \{\lambda_0\varkappa_k^2({}^1/_5 - {}^1/_3b_0^{-1}) + {}^1/_2\varkappa_k^{-1} + \varkappa_k k_0^2({}^1/_5 - {}^2/_3b_0^{-1})\}(1 - 2\lambda_0\varkappa_k^{-1})^{-1}$$
$$\lambda_2 = \{\lambda_0[-{}^{167}/_{2100}b_0 + {}^2/_{15}\varkappa - {}^1/_5 - {}^7/_{12}b_0^{-1} + \varkappa_k^2k_0^2(-{}^{709}/_{3150} + {}^{16}/_{45}b_0^{-1}\varkappa -$$
$$- {}^2/_3b_0^{-1} - {}^4/_9b_0^{-2}) + k_0^4(-{}^{82}/_{1575} - {}^8/_{15}b_0^{-1} + {}^8/_9b_0^{-2})] + \varkappa_k[{}^2/_3b_0^{-1} +$$
$$+ \varkappa_k^2k_0^2(-{}^{167}/_{3150} + {}^4/_{45}b_0^{-1}\varkappa + {}^{17}/_{45}b_0^{-1} + {}^1/_3b_0^{-2}) + k_0^4(-{}^{271}/_{1575} +$$
$$+ {}^{16}/_{45}b_0^{-1}\varkappa + {}^{92}/_{45}b_0^{-1} - {}^4/_9b_0^{-2})] - {}^1/_{12}\lambda_0^{-1}\varkappa_k^2b_0^{-1}\}(1 - 2\lambda_0\varkappa_k^{-1})^{-3},$$
$$(2.10)$$

Для больших значений k ($k \approx \varepsilon^{-1}$), учитывая представление оператора Q в виде (1.16), первому уравнению (1.20) можно придать вид

$$[-{}^4/_3D_1^8 + {}^8/_5D_1^{10} - {}^{808}/_{945}D_1^{12} + \ldots] + \varepsilon^2[2b_0p_3^4 + ({}^{16}/_3 - 4b_0)D_1^2p_3^4 +$$
$$+ D_1^4(-{}^8/_3p_3^2 - {}^{32}/_5p_3^4 + {}^{52}/_{15}b_0p_3^4) + \ldots] + \ldots = 0$$
$$(D_1^2 = p_3^2 - k_1^2, \ k_1 = \varepsilon k, \ p_3 = \varepsilon\lambda_{ki}) \qquad (2.11)$$

Отсюда находим

$$\lambda_{ki} = \varepsilon^{-1}(p_{30} + \varepsilon^{1/2}p_{31} + \varepsilon p_{32} + \varepsilon^{3/2}p_{33} + \ldots), \qquad p_{30}^2 - k_1^2 = 0$$
$$p_{31}^4 - {}^3/_{32}b_0 = 0, \qquad p_{32} = p_{31}^2[{}^1/_2p_{30}^{-1} + p_{30}({}^4/_3b_0^{-1} - {}^2/_5)] \qquad (2.12)$$
$$p_{33} = p_{31}^{-1}[{}^1/_8 - {}^3/_{40}b_0 + p_{30}^2(-{}^1/_{12}b_0^{-1} + {}^1/_{20} + {}^{41}/_{8400}b_0)]$$

Ниже приводятся формулы, вытекающие из (1.16) и дающие хорошее приближение для корней типа (2.7), (2.8), когда $k \lesssim \varepsilon^{-1}$

$$\lambda_{ki} = (2\varepsilon)^{-1}\nu_0 + 2\varepsilon\nu_1 + (2\varepsilon)^3\nu_2 + \ldots, \qquad k_* = 2\varepsilon k$$
$$(\sin^2 x_1 - x_1^2) / x_1^4 = 0, \qquad \nu_0^2 = k_*^2 + x_1^2 \qquad (2.13)$$
$$\nu_1 = (\sin 2x_1 - 2x_1)^{-1}[{}^1/_3x_1^3\nu_0^{-1} + {}^1/_3x_1\nu_0 - \nu_0^3(2b_0x_1^{-3} + {}^2/_3x_1^{-1})] +$$
$$+ \nu_0[(2 - 2\varkappa)x_1^{-2} - {}^1/_{12}] + \nu_0^3[(-{}^{17}/_8 + {}^5/_2\varkappa)x_1^{-4} + {}^1/_{24}x_1^{-2}]$$
$$\lambda_{ki} = (2\varepsilon)^{-1}\mu_0 + 2\varepsilon\mu_1 + (2\varepsilon)^3\mu_2 + \ldots, \qquad \mu_0^2 = k_*^2 + x_0^2 \qquad (2.14)$$
$$\mu_1 = \mu_0^3[({}^{43}/_8 - 2\varkappa)x_0^{-4} + {}^1/_{24}x_0^{-2}] + \mu_0[(-{}^7/_2 + 2\varkappa)x_0^{-2} - {}^1/_{12}]$$

Наконец, для очень больших λ_{ki} и k ($k \gg \varepsilon^{-1}$) корни λ_{ki} следует отыскивать из асимптотического уравнения

$$(\operatorname{sh}\gamma_1 \operatorname{sh}\gamma_2)^{-1/2} (1 - e^{2\varepsilon}k^2 / \lambda_{ki}^2)^2 (1 - e^{-2\varepsilon} k^2 / \lambda_{ik}^2)^2 Q^{**} \operatorname{sh}\theta + O(\zeta_1^{-1}) = 0$$
$$\theta = k(\operatorname{th}\gamma_1 - \operatorname{th}\gamma_2 - \gamma_1 + \gamma_2), \qquad \operatorname{ch}\gamma_1 = e^{\varepsilon}k / \lambda_{ki}, \qquad \operatorname{ch}\gamma_2 = e^{-\varepsilon}k / \lambda_{ki}$$
$$Q^{**} = 2\lambda_{ki}^2 [\operatorname{ch} 2\varepsilon - \operatorname{ch}(\gamma_2 - \gamma_1)] + \operatorname{sh}^2\theta (1 - \operatorname{cth}^2\gamma_1)(1 - \operatorname{cth}^2\gamma_2) \quad (2.15)$$
$$\zeta_1 = \max\{\lambda_{ki}, k\}$$

которое обусловлено представлением оператора Q в виде (1.15), и асимптотическими разложениями величин L_{kj} при больших и комплексных k и λ_{ki} (см., например, [7]).

$$L_{00} = (\operatorname{sh}\gamma_1\operatorname{sh}\gamma_2)^{-1/2} \{\operatorname{sh}\theta + k^{-1}\,{}^1/_2 \operatorname{ch}\theta A_1 + \ldots\}$$
$$L_{11} = (\operatorname{sh}\gamma_1 \operatorname{sh}\gamma_2)^{1/2} - \{\operatorname{sh}\theta + k^{-1}\,{}^1/_2 \operatorname{ch}\theta(\operatorname{cth}\gamma_1 - \operatorname{cth}\gamma_2 - \operatorname{cth}^3\gamma_1 +$$
$$+ \operatorname{cth}^3\gamma_2 - A_1) + \ldots\}$$

$$L_{01} = (\operatorname{sh}\gamma_2 / \operatorname{sh}\gamma_1)^{1/2} \{-\operatorname{ch}\theta + k^{-1}\,{}^1/_2 \operatorname{sh}\theta(\operatorname{cht}^3\gamma_2 - \operatorname{cth}\gamma_2 - A_1) + \ldots\}$$
$$L_{10} = (\operatorname{sh}\gamma_1 / \operatorname{sh}\gamma_2)^{1/2} \{\operatorname{ch}\theta + k^{-1}\,{}^1/_2 \operatorname{sh}\theta(\operatorname{cth}^3\gamma_1 - \operatorname{cth}\gamma_1 + A_1) + \ldots\}$$
$$(A_1 = {}^1/_4 (\operatorname{cth}\gamma_1 - \operatorname{cth}\gamma_2) - {}^5/_{12} (\operatorname{cth}^3\gamma_1 - \operatorname{cth}^3\gamma_2)) \quad (2.16)$$

Из (2.15) заключаем, что восьми корням λ_{ki} отвечают асимптотические равенства

$$\lambda_{ki} \approx \pm ke^{\varepsilon}, \quad \lambda_{ki} \approx \pm ke^{-\varepsilon} \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad (2.17)$$

а главные части остальных корней находятся из уравнений

$$\theta = 2\lambda_{km} \operatorname{sh}\varepsilon i(-1 + {}^1/_2\gamma_0^2 + \ldots) = im\pi \qquad (i = \sqrt{-1},\ m = 1, 2, \ldots)$$
$$Q^{**} = (2\lambda_{ki} \operatorname{sh}\varepsilon)^2 (1 + \gamma_0^2 + \ldots) + \operatorname{sh}^2\theta(1 + 2\gamma_0^2 \operatorname{ch} 2\varepsilon + \ldots) = 0$$
$$(\gamma_0 = k / \lambda_{ki}) \quad (2.18)$$

которые получаются из (2.15) при помощи разложений, справедливых когда $|\gamma_0 e^{\varepsilon}| \leqslant 1$.

Проведенный анализ показывает, что первое характеристическое уравнение (1.20) содержит три группы корней.

В первую группу входят два точных четырехкратных корня $\lambda_{0i} = 0$ при $k = 0$ и $\lambda_{1i} = 0$ при $k = 1$.

Вторая группа состоит из восьми корней, определяемых по формулам (2.2), (2.5), (2.10), (2.12), (2.17). При этом порядок модулей этих корней зависит от величины k. Если $k < \varepsilon^{-1/2}$, то модули четырех из них соизмеримы с $\varepsilon^{1/2}k^2$ (малые корни), а четыре других корня по модулю соизмеримы с $\varepsilon^{-1/2}$ (большие корни). При $k \gtrsim \varepsilon^{-1/2}$ все восемь корней соизмеримы по модулю с k. В случае больших и весьма больших k ($k \approx \varepsilon^{-1}$ и $k \gg \varepsilon^{-1}$) справедливы асимптотические равенства $\lambda_{ki} \approx \pm k$ и $\lambda_{ki} \approx \pm k \exp(\pm\varepsilon)$, соответственно.

Третья группа состоит из счетного множества корней, определяемых по формулам (2.7), (2.8), (2.13), (2.14), (2.18) и растущих как $1 / \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

§ 3. Анализ напряженного и деформированного состояния, соответствующего каждой группе корней. *Группа* (1). Четырехкратным корням $\lambda_{0i} = 0$ и $\lambda_{1i} = 0$ соответствует функция напряжений (3.1)

$$\Psi_1^* (\zeta, \varphi) = T_{-1}\zeta + T_0\zeta^2 + T_1\zeta^3 + (N_{1,2} + N_{1,2}^*\zeta + M_{1,2}\zeta^2 + M_{1,2}^*\zeta^3)\, e^{i\varphi}$$

где $T_{-1}, \ldots, M_{1,2}^*$ — произвольные постоянные, а индекс 1,2 обозначает условную запись $a_{1,2}e^{i\varphi} \equiv a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi$.

Подставляя (3.1) в (1.6) и, далее, (1.6) в (1.1—3), получим

$$u = -{}^1/_2 R_1 a_2 \rho_1 T_0, \qquad v = 0, \qquad w = -R_1\zeta_1 T_0$$
$$\sigma_z = G a_0 T_0, \quad |\sigma_r = \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = \tau_{z\varphi}| = 0 \tag{3.2}$$

$$u = 0, \qquad v = R_1\zeta_1\rho_1 T_1, \qquad w = 0$$
$$\tau_{z\varphi} = G\rho_1 T_1, \qquad \sigma_r = \sigma_z = \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0 \tag{3.3}$$

$$u = R_1 \,[(a_2\rho_1^2 - 2\zeta_1^2)\, M_{1,2} + (a_2\rho_1^2 - {}^2/_3\zeta_1^2)\, \zeta_1 M_{1,2}^*]\, e^{i\varphi}$$
$$v = -R_1 \,[(a_2\rho_1^2 + 2\zeta_1^2)\, M_{1,2} + (a_2\rho_1^2 + {}^2/_3\zeta_1^2)\, \zeta_1 M_{1,2}^*]\, ie^{i\varphi}$$
$$w = R_1\{4\rho_1\zeta_1 M_{1,2} - [a_{-1}\,(c_0^*\rho_1 + d_0\rho_1^{-1}) + \rho_1^3 - 2\rho_1\zeta_1^2]\, M_{1,2}^*\}e^{i\varphi} \tag{3.4}$$
$$\tau_{rz} = G a_{-1}\,(d_0\rho_1^{-2} + \rho_1^2 - c_0^*)\, M_{1,2}^* e^{i\varphi}, \quad \sigma_z = -4Ga_0\rho_1\,(M_{1,2} + M_{1,2}^*\zeta_1)e^{i\varphi}$$
$$\tau_{z\varphi} = -G\,[a_{-1}\,(c_0^* + d_0\rho_1^{-2}) + a_3\rho_1^2]\, M_{1,2}^* ie^{i\varphi}, \quad \tau_{r\varphi} = \sigma_r = \sigma_\varphi = 0 \tag{3.5}$$
$$(\rho_1 = r\,/\,R_1,\ \zeta_1 = z\,/\,R_1,\ a_k = \varkappa - 4 + k,\ d_0 = (R_2\,/\,R_1)^2,\ c_0^* = 1 + d_0)$$

Здесь ρ_1, ζ_1, φ — безразмерные координаты, G — модуль сдвига.

Таким образом, функции напряжений (3.1) отвечают следующие элементарные напряженные состояния: 1) растяжение вдоль оси ζ (T_0), 2) кручение вокруг оси ζ (T_1), 3) изгиб нормальными и поперечными силами, действующими по торцевой поверхности Γ_2 ($M_{1,2}$ и $M_{1,2}^*$). Константам T_{-1}, $N_{1,2}$ $N_{1,2}^*$ соответствуют перемещения цилиндра как твердого тела.

Группа (2). Если $k < \varepsilon^{-1/2}$, то малым корням, определяемым по формулам (2.2) и соизмеримым с $\varepsilon^{1/2}k^2$, соответствуют следующие решения, разложенные по степеням ε

$$u = R_3\,\{\varkappa k^2 + \varepsilon b_{-2}p_0^2 + \ldots\}\, \partial\Psi_1\,/\,\partial\varphi$$
$$v = R_3\{-\varkappa k^2 + \varepsilon\,[t\varkappa\,(k^4 - k^2) - 2b_0p_0^2] + \ldots\}\, \Psi_1$$
$$w = R_3\{-\varkappa - \varepsilon\varkappa t k^2 + \ldots\}\, \partial^2\Psi_1\,/\,\partial\zeta\partial\varphi$$
$$\tau_{r\varphi} = 2G\,\{\varepsilon^2\,(t^2 - 1)\,(k^6 - k^4) + \ldots\}\, \Psi_1$$
$$\sigma_r = 2G\,\{\varepsilon^2\,(t^2 - 1)\,(k^4 - k^2) + \ldots\}\, \partial\Psi_1\,/\,\partial\varphi$$
$$\tau_{rz} = 2G\,\{\varepsilon^2\,(1 - t^2)\,(k^4 - k^2) + \ldots\}\, \partial^2\Psi_1\,/\,\partial\zeta\partial\varphi \tag{3.6}$$

$$\tau_{z\varphi} = 2G\,\{\varepsilon[t\varkappa\,(k^4 - k^2) - b_0p_0^2] + \varepsilon^2\,[tp_0^2(b_{-2}k^2 - b_0) - {}^1/_3k^2\,(a_2k^4 + 2k^2 - \varkappa)] + \ldots\}\, \partial\Psi_1\,/\,\partial\zeta$$

$$\sigma_z = 2G\,\{\varepsilon[ta_2\,(k^2 - k^4) + b_0p_0^2] + \varepsilon^2\,[2tp_0^2\langle k^2\,(a_0 - {}^1/_2b_0) + b_0 - a_0\rangle + {}^1/_3a_2k^2\,(k^4 + k^2 - 2)] + \ldots\}\, \partial\Psi_1\,/\,\partial\varphi$$

$$\sigma_\varphi = 2G\,\{\varepsilon[2t\,(k^4 - k^2)\,] + \varepsilon^2\,[2ta_0p_0^2\,(k^2 - 1) + {}^1/_3k^2\,(1 + k^2 - 2k^4)] + \ldots\}\, \partial\Psi_1\,/\,\partial\varphi$$

$$(b_k = {}^1/_2\varkappa a_k, \quad t = \varepsilon^{-1}\ln\rho, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1) \tag{3.7}$$

Из (3.6), (3.7) можно заметить, что при малых ε и $k < \varepsilon^{-1/2}$ имеют место соотношения

$$| u | \approx k^3, \quad | v | \approx k^2, \quad | w | \approx \varepsilon^{1/2} k^3, \quad | \tau_{z\varphi} | \approx \varepsilon^{3/2} k^6 \tag{3.8}$$

$$| \sigma_z |, | \sigma_\varphi | \approx \varepsilon k^5, \quad | \sigma_r | \approx \varepsilon^2 k^5, \quad | \tau_{rz} | \approx \varepsilon^{5/2} k^7, \quad | \tau_{r\varphi} | \approx \varepsilon^2 k^6$$

При этом величины u, v, . . ., $\tau_{r\varphi}$ убывают при продвижении внутрь области оболочки как $\exp(-\varepsilon^{1/2} k^2 p^* s_1)$, где $\operatorname{Re} p^* > 0$, а s_1 — расстояние от торцевой поверхности Γ_2. Следовательно, решения, отвечающие малым корням, представляют собой медленно затухающие напряженные и деформированные состояния, зоны затухания которых тем шире, чем меньше $\varepsilon^{1/2} k^2$.

Большим корням, определяемым по формулам (2.5) и соизмеримым с $\varepsilon^{-1/2}$ $(k < \varepsilon^{-1/2})$, а также восьми корням второй группы, определяемым по формулам (2.10) и соизмеримым с k $(\varepsilon^{-1/2} \lesssim k < \varepsilon^{-1})$, соответствуют решения (3.9)

$$\begin{aligned} u = R_3 \varepsilon^{-1} \{ & [\varkappa \Delta^2 + b_0 \lambda^2] + \varepsilon [-(c_1 + a_0) \Delta^2 \lambda^2 - (7/3 + 13/6 \varkappa) \Delta^4 + \\ & + t (b_2 \lambda^2 + 1/3 a_2 \Delta^6) + 1/2 t^2 \langle (a_0 - b_0) \Delta^2 \lambda^2 - a_2 \Delta^4 \rangle] + \ldots \} \, \partial \Psi_1 / \partial \zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = R_3 \varepsilon^{-1} \{ & [\lambda^2 B_0 (t) + \varkappa \lambda^2 + 4/3 \Delta^6 - t \varkappa \Delta^2 \lambda^2] + \varepsilon [\lambda^2 B_1 (t) + 8/3 \Delta^4 - \\ & - 1/3 b_5 \lambda^4 - (8/3 + 7/6 \varkappa) \Delta^2 \lambda^2 - 62/45 \Delta^8 + t (1/3 + 13/6 \varkappa) \Delta^4 \lambda^2 - \\ & - t^2 \langle 1/2 \varkappa (\Delta^2 \lambda^2 + \lambda^4) + 2/3 \Delta^8 \rangle + 1/6 t^3 a_6 \Delta^4 \lambda^2] + \ldots \} \Psi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = R_3 \{ & [B_0 (t) - \varkappa - t \varkappa \Delta^2] + \varepsilon [B_1 (t) + 1/3 b_3 \lambda^2 - (4/3 - 23/6 \varkappa) \Delta^2 - \\ & - t \langle \varkappa + (1 - 5/2 \varkappa) \Delta^4 \rangle - t^2 (1/2 \varkappa \Delta^2 + b_1 \lambda^2) + 1/6 t^3 a_6 \Delta^4] + \ldots \} \, \partial^2 \Psi_1 / \partial \zeta \partial \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{z\varphi} = 2G \varepsilon^{-1} \{ & [\lambda^2 B_0 (t) + 2/3 \Delta^6 - t \varkappa \Delta^2 \lambda^2] + \varepsilon [\lambda^2 B_1 (t) + 4/3 \Delta^4 - 1/6 \varkappa \lambda^4 - \\ & - 31/45 \Delta^8 - (2 - 4/3 \varkappa) \Delta^2 \lambda^2 + t \langle (1/3 + 13/6 \varkappa) \Delta^4 \lambda^2 - 2/3 \Delta^6 - \varkappa \lambda^2 \rangle - \\ & - t^2 (1/2 \varkappa \lambda^4 + 1/3 \Delta^8) + 1/6 t^3 a_6 \Delta^4 \lambda^2] + \ldots \} \, \partial \Psi_1 / \partial \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = 2G \varepsilon^{-1} \{ & [\lambda^2 B_0 (t) - 1/3 a_{-2} \Delta^6 - b_0 \lambda^2 + t \langle a_2 \Delta^4 + (b_0 - 2a_2) \Delta^2 \lambda^2 \rangle] + \\ & + \varepsilon [\lambda^2 B_1 (t) + 1/3 b_{-1} \lambda^4 + (3/4 \varkappa^2 - 1/3 a_{26}) \Delta^2 \lambda^2 + (6 - 5/3 \varkappa) \Delta^4 - \\ & - (c_2 + 26/45) \Delta^8 + t \langle a_2 (\Delta^2 - \lambda^2 - 5/2 \Delta^6) + (1/3 a_{-17} - 11/6 b_{-4}) \Delta^4 \lambda^2 \rangle + \\ & + t^2 (1/2 b_0 \Delta^2 \lambda^2 - 1/2 \varkappa \lambda^4 + 1/6 a_{-2} \Delta^8) + \\ & + t^3 \langle - 1/6 a_2 \Delta^6 + (1/2 a_2 - c_3) \Delta^4 \lambda^2 \rangle] + \ldots \} \partial \Psi_1 / \partial \zeta \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = 2G \varepsilon^{-1} \{ & [- \lambda^2 B_0 (t) - 2/3 \Delta^6 - 2t (\Delta^4 - 2\Delta^2 \lambda^2)] + \varepsilon [- \lambda^2 B_1 (t) + \\ & + 1/3 b_1 \lambda^4 - 1/3 \Delta^4 + 4/5 \Delta^8 - 1/3 \varkappa \Delta^2 \lambda^2 + t (2\lambda^2 - 2\Delta^2 + 14/3 \Delta^6 - 1/2 a_{18} \Delta^4 \lambda^2) + \\ & + t^2 (\Delta^4 - 2\Delta^2 \lambda^2 + 1/2 \varkappa \lambda^4) + t^3 (2/3 \Delta^6 + 1/6 a_{-8} \Delta^4 \lambda^2)] + \ldots \} \partial \Psi_1 / \partial \zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = 2G (t^2 - 1) \{ & [2\Delta^2 \lambda^2 + 1/3 \Delta^8 - \Delta^4 - t (1/3 \Delta^6 + 1/6 a_0 \Delta^4 \lambda^2)] + \\ & + \varepsilon [\lambda^2 - \Delta^2 + 17/6 \Delta^6 - 1/3 a_{10} \Delta^4 \lambda^2 + 1/3 a_{-4} \Delta^2 \lambda^4 - 31/90 \Delta^{10} + t (1/3 \Delta^4 - \\ & - 1/6 a_{10} \Delta^2 \lambda^2 - 1/3 b_{-2} \lambda^4 + 7/10 \Delta^8 - c_0 \Delta^6 \lambda^2) + t^2 (1/2 \Delta^6 + 1/6 a_{-6} \Delta^4 \lambda^2 - \\ & - 1/3 a_0 \Delta^2 \lambda^4 - 1/18 \Delta^{10}) + t^3 (1/30 \Delta^8 + 1/60 a_0 \Delta^6 \lambda^2)] + \ldots \} \, \partial \Psi_1 / \partial \zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi} = 2G (t^2 - 1) \{ & B_2 (t) + \varepsilon [B_3 (t) + \Delta^2 + 1/2 a_2 \lambda^2 - 5/2 \Delta^6 - 1/6 t^2 \Delta^6 + \\ & + t (2\Delta^2 \lambda^2 - \Delta^4)] + \ldots \} \partial^2 \Psi_1 / \partial \zeta \, \partial \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = 2G (t^2 - 1) \varepsilon^{-1} \{ & \lambda^2 B_2 (t) + \varepsilon [\lambda^2 B_3 (t) + \Delta^2 \lambda^2 - \lambda^4 + 2/3 \Delta^8 - \\ & - (25/6 - 1/3 \varkappa) \Delta^6 \lambda^2 + t \langle (2/3 a_3 - 1/2 b_0) \Delta^2 \lambda^4 - 1/3 a_3 \Delta^4 \lambda^2 + 1/9 \Delta^{10} \rangle - \\ & - 1/6 t^2 \Delta^6 \lambda^2] + \ldots \} \Psi_1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$B_0(t) = {}^1/_3 a_0 \Delta^4 - t b_0 \lambda^2, \quad B_2(t) = \Delta^4 + {}^1/_2 a_0 \Delta^2 \lambda^2, \quad B_1(t) = \Delta^6 (c_2 - {}^1/_6 t^2 a_2) + t\Delta^2\lambda^2 (c_1 + c_3 t^2)$$

$$B_3(t) = -{}^{13}/_{12} a_0 \Delta^4 \lambda^2 + {}^1/_3 t (b_0 \lambda^4 + {}^1/_3 \Delta^8) - {}^1/_{12} t^2 a_0 \Delta^4 \lambda^2$$

$$c_1 = 2b_0 - c_3, \quad c_2 = {}^{77}/_{45} - {}^{41}/_{90}\varkappa, \quad c_3 = {}^1/_6 (a_0 + b_0), \quad c_0 = {}^{53}/_{180}\varkappa - {}^{43}/_{45}$$

Из (3.9), (3.10) и (2.5) следует, что величины $u, v, \ldots, \tau_{r\varphi}$, соответствующие большим корням и удовлетворяющие соотношениям

$$|u|, |\sigma_z|, |\sigma_\varphi| \approx \varepsilon^{-3/2}, \qquad |\tau_{z\varphi}| \approx \varepsilon^{-1} k$$

$$|w|, |\tau_{rz}| \approx \varepsilon^{-1}, \qquad |v|, |\tau_{r\varphi}| \approx \varepsilon^{-1/2} k, \quad |\sigma_r| \approx \varepsilon^{-1/2} \tag{3.12}$$

убывают при продвижении внутрь области, занятой оболочкой как $\exp(-\varepsilon^{-1/2} p^{**} s_1)$ ($\operatorname{Re} p^{**} > 0$). Итак, решения, отвечающие большим корням, представляют собой краевые эффекты, зоны затухания которых тем уже, чем меньше ε.

В случае корней, определяемых по формулам (2.10) и соизмеримых с k ($\varepsilon^{-1/2} \lessapprox k < \varepsilon^{-1}$), из (3.9), (3.10) получаются следующие оценки:

$$|u| \approx k^3, \qquad |v|, |w| \approx \varepsilon k^4, \qquad |\tau_{z\varphi}|, |\sigma_z|, |\sigma_\varphi| \approx \varepsilon k^5$$

$$|\sigma_r| \approx \varepsilon^2 k^5, \qquad |\tau_{r\varphi}|, |\tau_{rz}| \approx \varepsilon^{3/2} k^5 \tag{3.13}$$

При этом все характеристики напряженного и деформированного состояния убывают как $\exp(-ks_1)$. Таким образом, с увеличением k соответствующие им однородные решения становятся все более быстро затухающими. При $k \approx \varepsilon^{-1}$ корням, определяемым по формулам (2.12), отвечают решения

$$u = R_3 \varepsilon^{-2} \{b_0 p_3^2 + \varepsilon^{1/2} [\varkappa\Lambda^2 - (c_1 + a_0)\Lambda^2 p_3^2 + {}^1/_3 t a_2 \Lambda^6 + {}^1/_2 t^2 (a_0 - b_0)\Lambda^2 p_3^2] + \ldots\} \partial\Psi_1 / \partial\zeta$$

$$v = R_3 \varepsilon^{-1} \{B_0^*(t) + \varepsilon^{1/2} [B_1^*(t) - t\varkappa\Lambda^2] + \ldots\} \partial^2\Psi_1 / \partial\zeta\partial\varphi \tag{3.14}$$

$$w = R_3 \varepsilon^{-3} \{p_3^2 B_0^*(t) + \varepsilon^{1/2} [p_3^2 B_1^*(t) + {}^4/_3 \Lambda^6 - t\varkappa\Lambda^2 p_3^2] + \ldots\} \Psi_1$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon^{-3} \{p_3^2 B_0^*(t) + \varepsilon^{1/2} [p_3^2 B_1^*(t) - {}^1/_3 a_{-2} \Lambda^6 + t\Lambda^2 p_3^2 (b_0 - 2a_2)] + \ldots\} \partial\Psi_1 / \partial\zeta$$

$$\sigma_\varphi = 2G\varepsilon^{-3} \{-p_3^2 B_0^*(t) + \varepsilon^{1/2} [-p_3^2 B_1^*(t) - {}^2/_3 \Lambda^6 + 4t\Lambda^2 p_3^2] + \ldots\} \partial\Psi_1 / \partial\zeta$$

$$\tau_{z\varphi} = 2G\varepsilon^{-3} \{p_3^2 B_0^*(t) + \varepsilon^{1/2} [p_3^2 B_1^*(t) + {}^2/_3 \Lambda^6 - t\varkappa\Lambda^2 p_3^2] + \ldots\} \partial\Psi_1 / \partial\varphi$$

$$\tau_{rz} = 2G(t^2 - 1)\varepsilon^{-7/2} \{[{}^1/_2 a_0 \Lambda^2 p_3^4] + \varepsilon^{1/2} [p_3^2 B_2^*(t)] + \ldots\} \Psi_1 \tag{3.15}$$

$$\tau_{r\varphi} = 2G(t^2 - 1)\varepsilon^{-5/2} \{[{}^1/_2 a_0 \Lambda^2 p_3^2] + \varepsilon^{1/2} [B_2^*(t)] + \ldots\} \partial^2\Psi_1 / \partial\zeta\partial\varphi$$

$$\sigma_r = 2G(t^2 - 1)\varepsilon^{-2} \{[{}^1/_3 \Lambda^8 - {}^1/_6 t a_0 \Lambda^4 p_3^2] + \varepsilon^{1/2} [\Lambda^2 (2p_3^2 + {}^1/_3 a_{-4} p_3^4 - {}^{31}/_{90} \Lambda^8) + t\Lambda^6 (c_0 p_3^2 - {}^1/_3) - {}^1/_3 t^2 \Lambda^2 (a_0 p_3^4 + {}^1/_6 \Lambda^8) + {}^1/_{60} t^3 a_0 \Lambda^6 p_3^2] + \ldots\} \partial\Psi_1 / \partial\zeta$$

$$B_0^*(t) = {}^1/_3 a_0 \Lambda^4 - t b_0 p_3^2, \qquad \Lambda^2 = \varepsilon^{-1/2} D_1^2$$

$$B_1^*(t) = \Lambda^6 (c_2 - {}^1/_6 t^2 a_2) + t\Lambda^2 p_3^2 (c_1 + c_3 t^2) \tag{3.16}$$

$$B_2^*(t) = \Lambda^4 (1 - {}^{13}/_{12} a_0 p_3^2) + {}^1/_3 t (b_0 p_3^4 + {}^1/_3 \Lambda^8) - {}^1/_{12} t^2 a_0 \Lambda^4 p_3^2$$

Анализируя оценочные формулы (3.13), пригодные и к соотношениям (3.14), (3.15), можно заметить, что при больших k ($k \gtrsim \varepsilon^{-1}$) однородные решения (3.14), (3.15) в первом приближении определяются величинами $v, w, \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau_{z\varphi}$, т. е. отвечают некоторому плоскому напряженному состоянию.

Группа (3). Если $k \lesssim \varepsilon^{-1}$, то, раскладывая по степеням малого параметра ε решения этой группы и ограничиваясь первым членом разложения, находим следующие асимптотические выражения:

$$\begin{gathered} u = \varepsilon R_3 D_0^2 \{\sin t_1 D_0 \; [(1 - \varkappa - t_1) D_0 \sin^2 D_0 - {}^1/_2 \, t_1 D_0^2 \sin 2D_0] + \\ + \cos t_1 D_0 \; [(t_1 D_0^2 - \varkappa) \sin^2 D_0 - {}^1/_2 \varkappa D_0 \sin 2D_0]\} \, \Psi_1 \\ v = 2\varepsilon^2 R_3 P_1 (t_1) \, \partial \Psi_1 / \partial \varphi, \qquad w = 2\varepsilon^2 R_3 P_1 (t_1) \, \partial \Psi_1 / \partial \zeta \end{gathered} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} \sigma_r = G D_0^3 \{\sin t_1 D_0 \; [(1 - t_1 D_0^2) \sin^2 D_0 + {}^1/_2 D_0 \sin 2D_0] - \\ - \cos t_1 D_0 \; [t_1 D_0 \sin^2 D_0 + {}^1/_2 t_1 D_0^2 \sin 2D_0]\} \, \Psi_1 \\ \tau_{r\varphi} = \varepsilon G P_2 (t_1) \, \partial \Psi_1 / \partial \varphi, \quad \tau_{rz} = \varepsilon G P_2 (t_1) \partial \Psi_1 / \partial \zeta, \\ \tau_{z\varphi} = 4\varepsilon^2 G P_1 (t_1) \, \partial^2 \Psi_1 / \partial \zeta \partial \varphi \\ \sigma_z = G (\lambda_*^2 P_1 (t_1) - a_2 P_3 (t_1) \, \Psi_1, \qquad \sigma_\varphi = - G (k_*^2 P_1 (t_1) + a_2 P_3 (t_1)) \Psi_1 \end{gathered} \tag{3.18}$$

$$\begin{gathered} P_1 (t_1) = D_0 \{\sin t_1 D_0 \; [(t_1 D_0^2 - 1 + \varkappa) \sin^2 D_0 + {}^1/_2 D_0 (\varkappa - 1) \sin 2D_0] + \\ + \cos t_1 D_0 \; [D_0 (t_1 - \varkappa) \sin^2 D_0 + {}^1/_2 t_1 D_0^2 \sin 2D_0]\} \\ P_2 (t_1) = D_0^3 \{\sin t_1 D_0 \; [2 (1 - t_1) \sin^2 D_0 - t_1 D_0 \sin 2D_0] + \\ + 2 t_1 D_0 \sin^2 D_0 \cos t_1 D_0\} \\ P_3 (t_1) = D_0^3 \; \{\sin t_1 D_0 (\sin^2 D_0 + {}^1/_2 D_0 \sin 2D_0) - D_0 \sin^2 D_0 \cos t_1 D_0\} \\ D_0^2 = \lambda_*^2 - k_*^2, \qquad \lambda_* = 2\varepsilon \lambda_{ki}, \qquad k_* = 2\varepsilon k, \qquad t_1 = (2\varepsilon)^{-1} \ln \rho_1 \end{gathered} \tag{3.19}$$

а корни λ_{ki} находятся по формулам (2.7), (2.13).

В случае корней, определяемых по формулам (2.8), (2.14), находим следующие выражения: (3.20)

$$\begin{gathered} u = 0, \quad v = 2\varepsilon^2 R_3 \lambda_*^2 \cos t_1 D_0 \partial \Psi_1 / \partial \varphi, \quad w = 2\varepsilon^2 R_3 k_*^2 \cos t_1 D_0 \partial \Psi_1 / \partial \zeta \\ \tau_{z\varphi} = 2\varepsilon^2 G (k_*^2 + \lambda_*^2) \cos t_1 D_0 \partial^2 \Psi_1 / \partial \zeta \partial \varphi, \quad \sigma_z = -\sigma_\varphi = G \lambda_*^2 k_*^2 \cos t_1 D_0 \Psi_1 \\ \tau_{rz} = - \varepsilon G D_0 k_*^2 \sin t_1 D_0 \partial \Psi_1 / \partial \zeta, \quad \tau_{r\varphi} = - \varepsilon G D_0 \lambda_*^2 \sin t_1 D_0 \, \partial \Psi_1 / \partial \varphi \\ \sigma_r = 0 \end{gathered} \tag{3.21}$$

Из (3.17), (3.18) и (3.20), (3.21) следует, что при малых ε и $k \lesssim \varepsilon^{-1}$ перемещения и напряжения, соответствующие корням третьей группы, подчиняются соотношениям

$$|u|, |w| \approx \varepsilon, \quad |v| \approx \varepsilon^2 k, \quad |\sigma_r|, |\sigma_z|, |\sigma_\varphi|, |\tau_{rz}| \approx 1, \quad |\tau_{r\varphi}|_z \, |\tau_{z\varphi}| \approx \varepsilon k \tag{3.22}$$

$$|v| \approx \varepsilon^2 k, \quad |w| \approx \varepsilon^3 k^2, \quad |\sigma_z|, |\sigma_\varphi|, |\tau_{rz}| \approx \varepsilon^2 k^2, \quad |\tau_{z\varphi}|, |\tau_{r\varphi}| \approx \varepsilon k \tag{3.23}$$

и убывают при отходе от границы Γ_2 как $\exp(- \varepsilon^{-1} p^{***} s_1)$ ($\operatorname{Re} p^{***} > 0$). Важно подчеркнуть, что соотношения (3.17) — (3.21) фактически совпадают с однородными решениями, полученными в теории плит [6].

Все вышеизложенное дает основание заключить, что краевые эффекты прикладных теорий оболочек соответствуют второй группе решений. Третья же группа решений дает погранслои, которые в теории Кирхгофа—Лява вообще отсутствуют.

§ 4. Анализ корней характеристического уравнения открытой цилиндрической оболочки. Используя представление оператора Q в виде (1.14), легко установить, что при $n_m = 0$ второе уравнение (1.20) приводится к виду

$$(k_{ni} + k_{ni}^3)\sin 2\varepsilon k_{ni}\,(\sin^2 2\varepsilon k_{ni} - k_{ni}^2 \operatorname{sh}^2 2\varepsilon) = 0 \tag{4.1}$$

Последнее содержит две группы корней:

1) четырехкратный корень $k_{0i} = 0$ и двукратные корни $k_{0i} = \pm i$;

2) счетное множество корней, растущих как $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ и определяемых по формулам

$$\begin{gathered}k_{0m} = (2\varepsilon)^{-1} m\pi \quad (m = 1,2,\ldots), \qquad k_{0i} = (2\varepsilon)^{-1}k_{00} + 2\varepsilon k_{11} + (2\varepsilon)^3 k_{22} + \ldots \\ (\sin^2 k_{00} - k_{00}^2)\,/\,k_{00}^4 = 0, \qquad k_{11} = 1/3 k_{00}^2\,(\sin 2k_{00} - 2k_{00})^{-1} \\ k_{22} = 2/45\,[k_{00}^3\,(\sin 2k_{00} - 2k_{00})^{-2} + k_{00}^6\,(\sin 2k_{00} - 2k_{00})^{-3}]\end{gathered} \tag{4.2}$$

Для исследования корней характеристического уравнения (1.20), когда $n_m \neq 0$, $\varepsilon \to 0$, применим методику, изложенную в монографии А. Л. Гольденвейзера [8]. В случае малых n_m ($n_m \lesssim \varepsilon^{1/2}$), произведя в (1.20) замену $n_m = \varepsilon^{1/2} n_0$, получим

$$\begin{gathered}[2b_0 n_0^4 - {}^4/_3 k_{ni}^4\,(1 + k_{ni}^2)^2] + \varepsilon[{}^{16}/_3 k_{ni}^2\,(1 + k_{ni}^2)^2 n_0^2] + \varepsilon^2\,[4b_0 n_0^4\,(2 - k_{ni}^2) - \\ - 8k_{ni}^2\,(1 + k_{ni}^2) n_0^4 - {}^8/_{45} k_{ni}^4\,(1 + k_{ni}^2)^2\,(4 - 9k_{ni}^2)] + \ldots = 0\end{gathered} \tag{4.3}$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ вытекает асимптотическое разложение

$$\begin{gathered}k_{ni} = k_{ni0} + \varepsilon k_{ni1} + \varepsilon^2 k_{ni2} + \cdots, \qquad k_{ni0}^4\,(1 + k_{ni0}^2)^2 - {}^3/_2 b_0 n_0^4 = 0 \\ k_{ni1} = \frac{n_0^2\,(1 + k_{ni0}^2)}{k_{ni0}\,(1 + 2k_{ni0}^2)} \\ k_{ni2} = \frac{n_0^4}{k_{ni0}^3}\left[\frac{b_0\,(13 - 3k_{ni0}^2)}{10\,(1 + k_{ni0}^2)(1 + 2k_{ni0}^2)} + \frac{1 + 3k_{ni0}^2 + 3k_{ni0}^4 - 2k_{ni0}^6}{2\,(1 + 2k_{ni0}^2)^3}\right]\end{gathered} \tag{4.4}$$

Для средних значений n_m ($\varepsilon^{1/2} < n_m < \varepsilon^{-1/2}$) замена $k_{ni} = \varepsilon^{-1/4} k_2$ приводит уравнение (1.20) к виду

$$\begin{gathered}(2b_0 n_m^4 - {}^4/_3 k_2^8) + \varepsilon^{1/2} k_2^6\,(-{}^8/_3 + {}^{16}/_3\, n_m^2) + \varepsilon k_2^4\,(-{}^4/_3 + {}^{32}/_3 n_m^2 - 8n_m^4) + \\ + \varepsilon^{3/2}\, k_2^2\,({}^{16}/_3 n_m^2 - 4b_0 n_m^4 - 8n_m^4 + {}^{16}/_3\, n_m^6 + {}^8/_5 k_2^8) + \ldots = 0\end{gathered} \tag{4.5}$$

Отсюда находим

$$\begin{gathered}k_{ni} = \varepsilon^{-1/4}\,(k_{20} + \varepsilon^{1/2}\, k_{21} + \varepsilon k_{22} + \varepsilon^{3/2}\, k_{23} + \ldots), \qquad k^8_{20} - {}^3/_2 b_0 n_m^4 = 0 \\ k_{21} = k_{20}^{-1}\,(-{}^1/_4 + {}^1/_2 n_m^2), \qquad k_{22} = k_{20}^{-3}\,({}^1/_{32} + {}^3/_8 n_m^2 - {}^1/_8 n_m^4) \\ k_{23} = k_{20}^{-5}\,[{}^1/_{128} + {}^5/_{64} n_m^2 + ({}^9/_{32} - {}^3/_{20} b_0) n_m^4 + {}^1/_{16} n_m^6]\end{gathered} \tag{4.6}$$

В случае больших значений n_m ($\varepsilon^{-1/2} \lesssim n_m < \varepsilon^{-1}$), применяя подстановку $n_m = \varepsilon^{-1/2} n_1$ и $k_{ni} = \varepsilon^{-1/2} k_3$, уравнение (1.20) представим в виде (2.9), где следует положить $\Delta^2 = k_3^2 - n_1^2$, $\lambda^2 = -n_1^2$. Разыскивая теперь k_3 в виде ряда по ε, получим

$$\begin{gathered}k_{ni} = \varepsilon^{-1/2}\,(k_{30} + \varepsilon k_{31} + \varepsilon^2 k_{32} + \ldots), \quad k_{30}^2 - \varkappa_k n_1 - n_1^2 = 0 \\ k_{31} = k_{30}^{-1}\,[-{}^1/_4 + {}^1/_4 \varkappa_k^{-1} n_1 + n_1^2\,({}^1/_2 - {}^3/_{20} b_0)\varkappa_k^{-2}], \qquad \varkappa_k^4 - {}^3/_2 b_0 = 0 \\ k_{32} = k_{30}^{-3}\,[{}^1/_{16} b_0^{-1} - {}^1/_{32} + {}^1/_{16}\varkappa_k^{-1}\,(1 + b_0^{-1}) n_1 + \varkappa_k^2({}^3/_{16} b_0^{-1} + {}^{11}/_{24}) n_1^2 + \varkappa_k\,({}^5/_{24} \\ b_0^{-1} + {}^{19}/_{24} + {}^1/_{15}\varkappa) n_1^3 + (-{}^1/_4 b_0^{-1} + {}^{29}/_{60} + {}^1/_{15}\varkappa + {}^{19}/_{84000} b_0)\, n_1^4 + \\ + \varkappa_k^{-1}\,(-{}^1/_6 b_0^{-1} + {}^1/_{10} + {}^{41}/_{4200} b_0) n_1^5]\end{gathered} \tag{4.7}$$

Наконец, для $n_m \approx \varepsilon^{-1}$, в силу (1.16), уравнение (1.20) можно записать в виде (2.11), положив

$$D_1^2 = k_4^2 - n_2^2, \quad p_3^2 = -n_2^2, \quad k_4 = \varepsilon k_{ni}, \quad n_2 = \varepsilon n_m \tag{4.8}$$

Из (2.11) с учетом (4.8) следует:

$$\begin{gathered} k_{ni} = \varepsilon^{-1}(k_{40} + \varepsilon^{1/2} k_{41} + \varepsilon k_{42} + \varepsilon^{3/2} k_{43} + \ldots), \qquad k_{40}^2 - n_2^2 = 0 \\ k_{41}^4 - {}^3/_{32}b_0 = 0, \qquad k_{42} = k_{40}^2\,[-{}^1/_2 n_2^{-1} + n_2({}^4/_3 b_0^{-1} - {}^2/_5)] \\ k_{43} = k_{40}^{-1}\,[{}^3/_{64} b_0 n_2^{-2} + {}^3/_{80} b_0 + n_2^2(-{}^1/_{12} b_0^{-1} + {}^1/_{20} + {}^{41}/_{8400} b_0)] \end{gathered} \tag{4.9}$$

Далее, учитывая представление оператора Q в виде (1.16), нетрудно установить что второе характеристическое уравнение (1.20), наряду с выше найденными восемью корнями, имеет также счетное множество других корней, для которых $k_{ni}\varepsilon \to \mathrm{const}$ при $\varepsilon \to 0$. Для $n_m \lesssim \varepsilon^{-1}$ можно получить асимптотику указанных корней, воспользовавшись разложениями

$$\begin{gathered} k_{ni} = (2\varepsilon)^{-1}\sigma_0 + 2\varepsilon\sigma_1 + (2\varepsilon)^3\sigma_2 + \ldots \\ x_0^{-1}\sin x_0 = 0, \quad \sigma_0^2 = n_*^2 + x_0^2, \quad n_* = 2\varepsilon n_m \\ \sigma_1 = \sigma_0^{-1} n_*^2\,\{n_*^2[({}^{43}/_8 - 2\varkappa)x_0^{-4} + {}^1/_{24} x_0^{-2}] + (-{}^7/_{12} + 2\varkappa)x_0^{-2} - {}^1/_{12}\} \end{gathered} \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered} k_{ni} = (2\varepsilon)^{-1}\omega_0 + 2\varepsilon\omega_1 + (2\varepsilon)^3\omega_2 + \ldots \\ (\sin^2 x_1 - x_1^2)\,/\,x_1^4 = 0, \qquad \omega_0^2 = n_*^2 + x_1^2 \\ \omega_1 = \omega_0^{-1}\,\{(\sin 2x_1 - 2x_1)^{-1}\,[{}^1/_3 x_1^3 + {}^1/_3 n_*^2 x_1 - n_*^4(2b_0 x_1^{-3} + {}^2/_3 x_1^{-1})] + n_*^2\,[(2 - \\ - 2\varkappa)x_1^{-2} - {}^1/_{12}] + n_*^4\,[(-{}^{17}/_8 + {}^5/_2\varkappa)x_1^{-4} + {}^1/_{24} x_1^{-2}]\} \end{gathered} \tag{4.11}$$

В случае очень больших k_{ni} и n_m ($n_m \gg \varepsilon^{-1}$) корни уравнения (1.20) следует отыскивать из асимптотического уравнения (2.15), в котором следует заменить λ_{ki} на in_m, k на ik_{ni}. Преобразованное указанным образом оно определяет восемь корней, которые удовлетворяют асимптотическим равенствам

$$k_{ni} \approx \pm\, n_m e^{\varepsilon}, \quad k_{ni} \approx \pm\, n_m e^{-\varepsilon} \quad \text{при } n_m \to \infty \tag{4.12}$$

а главные части остальных корней находятся из уравнений

$$\begin{gathered} \theta = 2k_{ni}\varepsilon i\,(-1 + {}^1/_2\gamma_*^2 \mathrm{sh}\,2\varepsilon\,/\,2\varepsilon + {}^1/_8\gamma_*^4 \mathrm{sh}\,4\varepsilon\,/\,4\varepsilon + \ldots) = in\pi \\ Q^{**} = \gamma_*^4[k_{ni}^2 \mathrm{sh}^2 2\varepsilon(1 + \gamma_*^2 \mathrm{ch}\,2\varepsilon + \ldots) + \mathrm{sh}^2\theta(1 + 2\gamma_*^2\mathrm{ch}\,2\varepsilon + \ldots)] = 0 \\ (n = 1, 2, \ldots, \gamma_* = n_m\,/\,k_{ni}) \end{gathered} \tag{4.13}$$

которые получаются из (2.15) при помощи разложений, справедливых, когда $|\gamma_* e^{\varepsilon}| \leqslant \leqslant 1$.

Итак, вышеизложенный анализ показывает, что второе характеристическое уравнение (1.20) содержит три группы корней. В первую группу входят четырехкратный корень $k_{0i} = 0$ и двукратные корни $k_{0i} = \pm\, i$, определяемые при $n_m = 0$. Вторая группа состоит из восьми корней, определяемых по формулам (4.4), (4.6), (4.7), (4.9). (4.12). При этом порядок модулей этих корней существенно зависит от величины n_m При малых n_m ($n_m \lesssim \varepsilon^{1/2}$) модули четырех из них соизмеримы с $\varepsilon^{-1/2} n_m$ (малые корни), а четыре других корня подчиняются соотношению $|k_{ni}| \approx 1$ (большие корни). Для средних значений n_m ($n_m \approx 1$) все восемь корней по модулю соизмеримы с $\varepsilon^{-1/4}$. В случае больших и весьма больших n_m ($n_m \approx \varepsilon^{-1}$ и $n_m \gg \varepsilon^{-1}$) выполняются соотношения $k_{ni} \approx \pm\, n_m$ и $k_{ni} \approx \pm\, n_m \exp(\pm\varepsilon)$, соответственно. Третья группа включает счетное множество корней, определяемых по формулам (4.2), (4.10), (4.11), (4.13) и растущих как $1\,/\,\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

§ 5. Анализ напряженного и деформированного состояния открытой цилиндрической оболочки. *Группа* (1). Четырехкратному корню $k_{0i} = 0$ и двукратным корням $k_{0i} = \pm\, i$, определяемым при $n_m = 0$, отвечает функция напряжений

$$\Psi_2^*(\zeta, \varphi) = E_{-1}\varphi + E_0\varphi^2 + E_1\varphi^3 + (K_{1,2} + K_{1,2}^*\varphi)e^{i\varphi} \tag{5.1}$$

где E_{-1}, $E_0, \ldots, K_{1,2}$ — произвольные постоянные.

Используя (5.1), (1.6), (1.1—3), находим перемещения и напряжения

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = R_1 \varphi E_0$$

$$\tau_{z\varphi} = G\rho_1^{-1} E_0, \qquad \sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{r\varphi} = 0$$

$$u = R_1 [(a_3\rho_1 + \rho_1^{-1}) c_1^* + (2a_3 \ln\rho_1 - \varkappa)\rho_1] E_1, \qquad v = R_1 2\varkappa\rho_1\varphi E_1, \qquad w = 0 \quad (5.2)$$

$$\sigma_\varphi = 2G [c_1^* (1 + \rho_1^{-2}) + 2(\ln\rho_1 + 1)] E_1, \qquad \sigma_r = 2G [c_1^* (1 - \rho_1^{-2}) + 2\ln\rho_1] E_1$$

$$\sigma_z = -2Ga_2 (1 + c_1^* + 2\ln\rho_1) E_1, \qquad \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = \tau_{z\varphi} = 0 \quad (5.3)$$

$$u = R_1 [2a_3 (d_1 \ln\rho_1 + d_2\rho_1^2) - d_2\rho_1^2 - d_1 + d_3\rho_1^{-2} - i2\varkappa d_1\varphi] K_{1,2}^* e^{i\varphi}$$

$$v = R_1 [2a_3 (d_1 \ln\rho_1 - d_2\rho_1^2) - 3d_2\rho_1^2 + d_1 - d_3\rho_1^{-2} - i2\varkappa d_1\varphi] i K_{1,2}^* e^{i\varphi}, \qquad w = 0 \quad (5.4)$$

$$\sigma_\varphi = 4G (3d_2\rho_1 + d_1\rho_1^{-1} + d_3\rho_1^{-3}) K_{1,2}^* e^{i\varphi}, \qquad \tau_{rz} = 0$$

$$\sigma_z = -4Ga_2 (d_1\rho_1^{-1} + 2d_2\rho_1) K_{1,2}^* e^{i\varphi}, \qquad \tau_{z\varphi} = 0$$

$$\tau_{r\varphi} = -i\sigma_r = 4G (d_3\rho_1^{-3} - d_1\rho_1^{-1} - d_2\rho_1) i K_{1,2}^* e^{i\varphi} \quad (5.5)$$

$$(c_1^* = d_0 d_3^{-1} \ln d_0, \qquad d_3 = 1 - d_0, \ d_2 = 1 - d_0^{-1}, \ d_1 = d_0^{-1} - d_0)$$

Легко показать, что функции напряжений (5.1) соответствуют следующие элементарные напряженные состояния: 1) чистый сдвиг (E_0), 2) чистый изгиб краевыми моментами (E_1), 3) изгиб от совместного действия момента и растягивающих усилий, приложенных к границе Γ_2 ($K_{1,2}^*$).

Константы E_{-1} и $K_{1,2}$ отвечают движению оболочки как жесткого целого.

Группа (2). Корням, определяемым при малых n_m ($n_m \lesssim \varepsilon^{1/2}$) по формулам (4.4), соотвутствуют решения (3.6), (3.7), в которых следует заменить k на ik_{ni}, p_0 на in_0, а функцию напряжений Ψ_1 на Ψ_2. Тогда величины $u, v, \ldots, \tau_{r\varphi}$ будут удовлетворять соотношениям

$$|\tau_{z\varphi}| \approx n_m^3, \quad |\sigma_\varphi|, \quad |\sigma_z| \approx k_{ni} n_m^2, \quad |\tau_{r\varphi}| \approx \varepsilon k_{ni}^2 n_m^2, \quad |\sigma_r| \approx \varepsilon k_{ni} n_m^2$$

$$|\tau_{rz}| \approx \varepsilon k_{ni} n_m^3, \quad |v| \approx k_{ni}^2, \quad |u| \approx k_{ni}^3, \quad |w| \approx k_{ni} n_m$$

$$(|k_{ni}| \approx \varepsilon^{-1/2} n_m \, |k_{ni}| \approx 1) \quad (5.6)$$

Следовательно, при $n_m \lesssim \varepsilon^{1/2}$ напряженное состояние открытой оболочки в первом приближении определяется величинами σ_φ и σ_z и оказывается, как это видно из (3.7), преимущественно моментным. Итак, решения, соответствующие восьми корням второй группы при $n_m \lesssim \varepsilon^{1/2}$, представляют собой обобщенные краевые эффекты [8], убывающие как $\exp(-\varepsilon^{-1/2} n_m \gamma^* s_2)$, где $\operatorname{Re}\gamma^* > 0$ и s_2 — угловое расстояние от границы Γ_2.

Для средних значений n_m ($\varepsilon^{1/2} < n_m < \varepsilon^{-1/2}$) корни k_{ni} определяются из (4.6), а соответствующие им решения даются формулами [1]

$$u = R_3 \varepsilon^{-1/2} \{-\varkappa k_2^2 - \varepsilon^{1/2} b_{-2} n_m^2 + \ldots\} \partial\Psi_2 / \partial\varphi$$

$$v = R_3 \varepsilon^{-1/2} \{\varkappa k_2^2 + \varepsilon^{1/2} (\varkappa t k_2^4 + 2b_0 n_m^2) + \ldots\} \Psi_2$$

$$w = R_3 \{-\varkappa + \varepsilon^{1/2} \varkappa t k_2^2 + \ldots\} \partial^2\Psi_2 / \partial\zeta\partial\varphi$$

$$\sigma_r = 2G \{\varepsilon (t^2 - 1) k_2^4 + \ldots\} \partial\Psi_2 / \partial\varphi \quad (5.7)$$

$$\tau_{r\varphi} = 2G \{\varepsilon^{1/2} (1 - t^2) k_2^6 + \ldots\} \Psi_2$$

$$\tau_{rz} = 2G \{\varepsilon (1 - t^2) k_2^4 + \ldots\} \partial^2\Psi_2 / \partial\zeta\partial\varphi$$

$$\sigma_z = 2G \{[-b_0 n_m^2 - a_2 t k_2^4] + \varepsilon^{1/2} k_2^2 [(2a_0 - b_0) n_m^2 t - a_2 t - {}^1/_3 a_2 k_2^4] + \ldots\} \partial\Psi_2 / \partial\varphi$$

$$\sigma_\varphi = 2G \{[2t k_2^4] + \varepsilon^{1/2} k_2^2 [2t(1 + a_0 n_m^2) + {}^2/_3 k_2^4] + \ldots\} \partial\Psi_2 / \partial\varphi$$

$$\tau_{z\varphi} = 2G \{[\varkappa t k_2^4 + b_0 n_m^2] + \varepsilon^{1/2} k_2^2 [t(\varkappa + b_{-2} n_m^2) + {}^1/_3 a_2 k_2^4] + \ldots\} \partial\Psi_2 / \partial\zeta \quad (5.8)$$

[1] Решения (5.7), (5.8) могут быть уточнены членами при ε и $\varepsilon^{3/2}$, если использовать соотношения (3.9), (3.10), а также формулы (3.1), (3.9) работы [1].

Из соотношения (5.7), (5.8) вытекают соотношения

$$|u| \approx \varepsilon^{-3/4} n_m^{3/2}, \quad |v| \approx \varepsilon^{-1/2} n_m, \quad |w| \approx \varepsilon^{-1/4} n_m^{3/2}, \quad |\sigma_z|, \quad |\sigma_\varphi| \approx \varepsilon^{-1/4} n_m^{5/2}$$

$$|\tau_{z\varphi}| \approx n_m^3, \quad |\tau_{r\varphi}| \approx \varepsilon^{1/2} n_m^3, \quad |\tau_{rz}| \approx \varepsilon^{3/4} n_m^{7/2}, \quad |\sigma_r| \approx \varepsilon^{3/4} n_m^{5/2} \tag{5.9}$$

При этом напряженное состояние (5.8), оставаясь преимущественно моментным, затухает как exp $(-\varepsilon^{-1/4} n_m^{1/2} \gamma^{**} s_2)$ $(\mathrm{Re}\gamma^{**} > 0)$. Таким образом, однородные решения, соответствующие средним значениям n_m $(\varepsilon^{1/2} < n_m < \varepsilon^{-1/2})$, суть краевые эффекты, зоны затухания которых тем уже, чем больше $\varepsilon^{-1/4} n_m^{1/2}$.

Для больших значений n_m $(\varepsilon^{-1/2} \lesssim n_m < \varepsilon^{-1}$ и $n_m \approx \varepsilon^{-1})$ корням, определяемым по формулам (4.7) и (4.9), отвечают решения (3.9), (3.10) и (3.14), (3.15), соответственно, в которых следует заменить k на ik_{ni}, λ_{ki} на in_m, Ψ_1 на Ψ_2. И на этот раз для величин u, $v, \ldots, \tau_{z\varphi}$ сохраняются оценки (3.13). При этом все характеристики однородных решений (3.9), (3.10) и (3.14), (3.15) убывают как exp $(-n_m s_2)$, включая в себя компоненты как моментного, так и безмоментного напряженных состояний.

Группа (3). Ниже приводятся точные решения третьей группы при $n_m = 0$.

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = R_1 \cos\eta \Psi_2, \quad \sigma_z = \sigma_\varphi = \sigma_r = 0$$

$$\tau_{rz} = -G\rho_1^{-1} \sin\eta \Psi_2', \quad \tau_{z\varphi} = G\rho_1^{-1} \cos\eta \Psi_2', \quad \tau_{r\varphi} = 0 \tag{5.10}$$

В формулах (5.10) k_{0i} — корни уравнения $\sin 2\varepsilon k_{0i} / 2\varepsilon k_{0i} = 0$

$$\begin{aligned} u &= R_1\rho_1 [(2\varkappa - 1) C_\eta' - E_\eta' + \rho_1^{-2} k_{0i} K_\eta'] \Psi_2, \qquad w = 0 \\ v &= R_1\rho_1 [(1 - 2\varkappa) C_\eta - E_\eta + \rho_1^{-2} k_{0i} K_\eta] \Psi_2' / k_{0i}, \qquad \tau_{rz} = \tau_{z\varphi} = 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= 2G(-E_\eta' + \rho_1^{-2} H_\eta') \Psi_2', \qquad \sigma_\varphi = 2G(2E_\eta' - k_{0i} E_\eta + \rho_1^{-2} k_{0i} H_\eta) \Psi_2 \\ \sigma_r &= 2G(2E_\eta' + k_{0i} E_\eta - \rho_1^{-2} k_{0i} H_\eta) \Psi_2, \qquad \sigma_z = -4Ga_2 E_\eta' \Psi_2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$C_\eta = -(\cos\eta + k_{0i} \sin\eta) \pm R_2 / R_1 [\cos(\eta - \theta_1) + k_{0i} \sin(\eta - \theta_1)]$$

$$K_\eta = -(R_2 / R_1)^2 (\sin\eta + k_{0i} \cos\eta) \pm R_2 / R_1 [\sin(\eta - \theta_1) + k_{0i} \cos(\eta - \theta_1)]$$

$$E_\eta = C_\eta + k_{0i} C_\eta', \quad H_\eta = K_\eta' + k_{0i} K_\eta, \quad \eta = k_{0i} \ln \rho_1, \quad \theta_1 = 2\varepsilon k_{0i} \tag{5.13}$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по η и φ, k_{0i} — ненулевые корни уравнений $\sin 2\varepsilon k_{0i} \pm k_{0i} \,\mathrm{sh} 2\varepsilon = 0$. В случае, когда $0 < n_m \lesssim \varepsilon^{-1}$, однородные решения в первом приближении даются формулами (3.17), (3.18) и (3.20), (3.21), в которых величины k, λ_{ki}, Ψ_1 заменяются величинами ik_{ni}, in_m, Ψ_2 соответственно, и, следовательно, поведение решений третьей группы цилиндрической панели такое же, что и аналогичных решений полого цилиндра.

§ 6. Построение уточненных прикладных теорий для круговых] цилиндрических оболочек. Как это видно из (3.1)—(3.9) работы [1], однородные решения (1.1)—(1.3) могут быть представлены в трех формах

$$\left.\begin{aligned} (u, \sigma_\varphi, \sigma_r, \sigma_z) &= (\Omega_{11}, \Omega_{21}, \Omega_{31}, \Omega_{41}) p\Psi, \qquad \tau_{z\varphi} = \Omega_{51}\partial_2\Psi \\ (v, \tau_{r\varphi}) &= (\Omega_{61}, \Omega_{71}) p\partial_2\Psi, \qquad (w, \tau_{rz}) = (\Omega_{81}, \Omega_{91})\Psi \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

$$\left.\begin{aligned} (u, \sigma_\varphi, \sigma_r, \sigma_z) &= (\Omega_{12}, \Omega_{22}, \Omega_{32}, \Omega_{42})\partial_2\Psi, \quad \tau_{z\varphi} = \Omega_{52} p\Psi \\ (v, \tau_{r\varphi}) &= (\Omega_{62}, \Omega_{72})\Psi, \qquad (w, \tau_{rz}) = (\Omega_{82}, \Omega_{92})\partial_2 p\Psi \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

$$\left.\begin{aligned} (u, \sigma_\varphi, \sigma_r, \sigma_z) &= (\Omega_{13}, \Omega_{23}, \Omega_{33}, \Omega_{43}), \ \Psi, \qquad \tau_{z\varphi} = \Omega_{53}\partial_2 p\Psi \\ (v, \tau_{r\varphi}) &= (\Omega_{63}, \Omega_{73})\partial_2\Psi, \qquad (w, \tau_{rz}) = (\Omega_{83}\Omega_{93}) p\Psi \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Здесь запись $(u, \sigma_\varphi, \ldots) = (\Omega_{13}, \Omega_{23}, \ldots)\Psi$ обозначает систему равенств $u = \Omega_{13}\Psi$, $\sigma_\varphi = \Omega_{23}\Psi, \ldots$, а величины] $\Omega_{j\mu}$ суть целы оператор-функции от D^2, p^2, ε и $\ln\rho$, представимые рядами следующего вида:

$$\Omega_{j\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Omega_{j\mu k}(D^2, p^2, t), \qquad \Omega_{j\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Omega^*_{j\mu k}(D_*^2, p_*^2, t_1) \tag{6.4}$$

где операторы $\Omega_{j\mu k}$ и $\Omega^*{}_{j\mu k}$ имеют структуру типа (1.12) и (1.17).

Таким образом, если функция напряжений Ψ имеет показатель изменяемости $p^\circ \lesssim \varepsilon^{-1}$ ($p^\circ = \max\{k, n_m, |k_{ni}|, |\lambda_{ki}|\}$), то, удерживая в рядах (6.1) — (6.4) достаточное число членов, можно построить серию прикладных теорий круговых цилиндрических оболочек, имеющих любую, наперед заданную точность по ε. При этом, располагая решениями третьей группы, можно удовлетворить граничным условиям более точно, чем в интегральном смысле [9, 10]. В этом случае получается система алгебраических уравнений относительно H_{ki} и H_{ni}^*, которая при малых ε асимптотически разделяется на одну систему восьмого порядка и две счетные системы бесконечного порядка (см., например, работу [3]). Последние изучены в работах [6, 11] и эффективно решаются методом урезания.

Что касается ограничения, накладываемого на показатель изменяемости p°, то оно несущественно, поскольку такие теории предназначаются для снятия плавно меняющейся внешней нагрузки, приложенной к границе Γ_2. В качестве конкретной уточненной прикладной теории даются соотношения предлагаемой работы. Предлагаемая теория вместе с соотношениями (3.1), (3.9) из [1] дает погрешность порядка ε^2 по сравнению с единицей, если $p^\circ \lesssim \varepsilon^{-1/2}$ и погрешность порядка ε, если $p^\circ \approx \varepsilon^{-1}$ и может быть использована для контроля точности существующих прикладных теорий.

Поступила 6 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Б а з а р е н к о Н. А. Построение уточненных прикладных теорий для круговой цилиндрической оболочки. Инж. ж. МТТ, 1967, № 2.
2. Л у р ь е А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2, 3.
3. Б а з а р е н к о Н. А., В о р о в и ч И. И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
4. Г о х б а у м Ф. А. Применение метода начальных функций к расчету толстостенных сплошных цилиндров. В сб.: «Применение железобетона в машиностроении», М., «Машиностроение», 1964.
5. П р о к о п о в В. К. Равновесие упругого толстостенного осесимметричного цилиндра. ПММ, 1949, т. 12, вып. 2.
6. А к с е н т я н О. К., В о р о в и ч И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
7. В а т с о н Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
8. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
9. Н и г у л У. К. Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
10. Н и г у л У. К. Линейные уравнения динамики упругой круговой цилиндрической оболочки, свободные от гипотез. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1960, № 176.
11. В о р о в и ч И. И., М а л к и н а О. С. Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите. VI Всес. конференц. по теории оболочек и пластинок. Баку — Москва., «Наука», 1966.