Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

Ю. А. Буевич

(Москва)

Сформулированы динамические уравнения движения фаз монодисперсной системы, рассматриваемых в приближении взаимопроникающих взаимодействующих сплошных сред. Получены уравнения переноса энергии пульсационных движений фаз в различных направлениях, замыкающие систему динамических уравнений.

Неньютоновская гидромеханика дисперсных систем рассматривалась в [1]. Ее дальнейшее развитие, проведенное для газовзвесей, содержится в [2,3]. Для метода работ [1-3] характерна известная доля феноменологии, состоящая в том, что при рассмотрении случайных пульсаций фаз дисперсной системы используются постулируемые априори уравнения движения фаз как сплошных сред, которые в принципе могут быть непротиворечиво сформулированы лишь после такого рассмотрения. Ниже это противоречие устраняется, причем уравнения движения фаз в приближении сплошной среды выводятся вполне естественным образом.

§ 1. Модель и динамические уравнения. Рассматриваем систему частиц радиуса a и плотности d_2, взвешенных в среде с плотностью d_1 и вязкостью μ_0. Состояние этой системы характеризуем при помощи средних по ансамблю значений объемной концентрации $\langle\rho\rangle$, скорости диспергированной фазы $\langle\mathbf{w}\rangle$, скорости жидкости $\langle\mathbf{v}\rangle$ и давления в ней $\langle p\rangle$. При выполнении эргодической гипотезы, что предполагается ниже, эти средние значения, называемые в дальнейшем «динамическими переменными», совпадают с величинами, полученными при усреднении указанных величин по объемам смеси, содержащим $N \gg 1$ частиц, и последующем предельном переходе $N \to \infty$. Мгновенные локальные значения скорости $\mathbf{w}$ отдельной частицы, средней скорости $\mathbf{v}$ жидкости в ее удельном объеме σ, среднего давления в этом объеме p и величины $\rho = \sigma_0 / \sigma$, где $\sigma_0 = {}^4/_3\pi a^3$, представляющей локальное значение объемной концентрации дисперсной системы, отличаются от таких средних на некоторые случайные слагаемые, отмечаемые в дальнейшем штрихом. Эти случайные величины характеризуют пульсационные движения фаз системы, называемые ниже «псевдотурбулентными». Удельный объем одной частицы выбран, таким образом, как и в [1-3], в качестве минимальной «ячейки», для которой еще имеет смысл определять локальные значения параметров, характеризующих жидкую фазу. Уравнение движения одной частицы можно записать в форме

$$m\frac{d\mathbf{w}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_\xi + \mathbf{F}_B, \quad m = d_2\sigma_0 \qquad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{g}$ — ускорение внешнего массового поля, $\mathbf{F}_i$ — случайная сила, обусловленная прямыми взаимодействиями выделенной частицы с соседними («столкновениями»), $\mathbf{F}$ — сила взаимодействия частицы с несущим потоком жидкости. В последней выделены слагаемые: сила со стороны градиента давления в жидкости $\mathbf{F}_p$, сила вязкого взаимодействия с потоком

$\mathbf{F}_\mu$, сила $\mathbf{F}_\xi$, соответствующая избыточной инерции жидкости при ускоренном относительном движении частицы (т. е. эффектам присоединенной массы), и сила Бассе $\mathbf{F}_B$. Для этих сил запишем представления

$$\mathbf{F}_p = -\sigma_0 \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_\mu = d_1\sigma_0\beta K(\rho)\,\mathbf{u}, \quad \mathbf{F}_\xi = d_1\xi\sigma_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$$
$$\mathbf{F}_B = d_1\sigma_0\gamma \int\limits_{-\infty}^{t} \gamma' \frac{d\mathbf{u}}{dt'} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}, \quad \beta = \frac{9\nu_0}{2a^2}, \quad \gamma = \frac{9}{2a}\left(\frac{\nu_\theta}{\pi}\right)^{1/2}, \quad \nu_0 = \frac{\mu_0}{d_1} \tag{1.2}$$

Здесь ρ, p и $\mathbf{v}$ определяются, как указано выше, по удельному объему данной частицы, ξ — коэффициент присоединенной массы, γ' — коэффициент порядка единицы (для простоты примем здесь, что ξ и γ' могут зависеть от $\langle\rho\rangle$, но не от ρ; при $\langle\rho\rangle \to 0$ имеем $\xi = 1/2$, $\gamma' = 1$), а $K(\rho)$ — функция, учитывающая отклонение силы $\mathbf{F}_\mu$ от стоксовой в условиях стесненного обтекания частицы (величина $K(\rho)$ может, конечно, зависеть и от динамических переменных).

Введем функцию распределения частиц по скоростям $f(\mathbf{w}; \mathbf{r}, t)$, нормированную на среднюю счетную концентрацию частиц $n(\mathbf{r}, t)$, а также условные функции распределения $f(\mathbf{v}; \mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{w})$, $f(\rho; \mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{v}, \mathbf{w})$ и $f(p; \mathbf{r}, t\,|\,\rho, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, нормированные на единицу. Величина $f(\mathbf{v}; \mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{w})\,d\mathbf{v}$, например, представляет вероятность того события, что скорость жидкой фазы в удельном объеме частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{w}$, заключена в интервале $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Операцию усреднения по ансамблю определяем так:

$$\langle\varphi\rangle = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \varphi f(p; \mathbf{r}, t\,|\,\rho, \mathbf{v}, \mathbf{w})\, f(\rho; \mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{v}, \mathbf{w}) f(\mathbf{v}; \mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{w}) f(\mathbf{w}; \mathbf{r}, t)\, dA$$
$$dA = dp\, d\rho\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{w}$$

В общем случае можно, очевидно, считать, что введенные условные функции распределения представляют собой некоторые функционалы как от унарной функции $f(\mathbf{w}; \mathbf{r}, t)$, так и от следующих многочастичных функций распределения, причем вид этих функционалов неизвестен. Ввиду зависимости силы $\mathbf{F}$ из (1.1) от p, ρ и $\mathbf{v}$ кинетическое уравнение для $f(\mathbf{w}; \mathbf{r}, t)$ должно содержать также указанные многочастичные функции распределения, причем записать цепочку кинетических уравнений для всех таких функций не представляется возможным [1]. Однако, если сразу

[1] Попытка справиться с этими трудностями таким образом, чтобы оборвать цепочку кинетических уравнений уже на уравнении для унарной функции распределения, содержится в [4], где наличие силы $\mathbf{F}$ было учтено путем введения в уравнение члена, описывающего диффузию в пространстве скоростей. Последнее означает по существу допущение о марковости случайной силы $\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \langle\mathbf{F}\rangle$, как это имеет место, например, в теории броуновского движения. В действительности в рассматриваемой задаче это, конечно, не так, ибо характерное время T изменения $\mathbf{F}'$ совпадает со временем существенного изменения характеристик псевдотурбулентного движения. Если все же ввести допущение о марковости $\mathbf{F}'$ как некоторое приближение, т. е. ограничиться рассмотрением процессов, длительность которых во всяком случае больше T, то член $(df\,/\,dt)_i$ в кинетическом уравнении в принципе нельзя записать в обычной больцмановской форме, как это сделано в [4], так как характерное время релаксации системы посредством столкновений между частицами имеет порядок времени пробега частицы между последовательными столкновениями τ, и обычно $\tau \ll T$.

произвести усреднение по условным распределениям, то обычным путем из уравнений Лиувилля и Гамильтона получим кинетическое уравнение для f (w; r, t) в форме [5]

$$\frac{Df}{Dt}+\mathbf{w}'\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\left(\mathbf{F}^*-\frac{D\langle\mathbf{w}\rangle}{Dt}\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}'}-\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}'}*\mathbf{w}'\right):\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}*\langle\mathbf{w}\rangle\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i$$

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\langle\mathbf{w}\rangle\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}},\quad \mathbf{a}*\mathbf{b}=\|a_ib_j\|,\quad \mathbf{A}:\mathbf{B}=A_{ij}B_{ji} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{F}^*=\int \mathbf{F}f(p;\mathbf{r},t|\rho,\mathbf{v},\mathbf{w})f(\rho;\mathbf{r},t|\mathbf{v},\mathbf{w})f(\mathbf{v};\mathbf{r},t|\mathbf{w})\,dp\,d\rho\,d\mathbf{v}$$

Член в правой части (1.3) описывает изменение f (w; r, t) в результате столкновений между частицами. Число частиц в системе от столкновений не зависит; естественно принять, что полный импульс и полная энергия сталкивающихся частиц также инвариантны относительно столкновений (смысл этого допущения очевиден). Тогда из (1.3) стандартным путем [5] получим уравнения сохранения массы и импульса диспергированной фазы, рассматриваемой в приближении сплошной среды, в виде

$$\frac{D\langle\rho\rangle}{Dt}+\langle\rho\rangle\frac{\partial\langle\mathbf{w}\rangle}{\partial\mathbf{r}}=0,\quad \langle\rho\rangle\equiv n\sigma_0$$

$$d_2\langle\rho\rangle\frac{D\langle\mathbf{w}\rangle}{Dt}=-\frac{\partial\mathbf{P}^{(p)}}{\partial\mathbf{r}}+d_2\langle\rho\rangle\mathbf{g}+\langle\rho\rangle(\mathbf{G}_p+\mathbf{G}_\mu+\mathbf{G}_\xi+\mathbf{G}_B) \tag{1.4}$$

$$\mathbf{P}^{(p)}=d_2\langle\rho\rangle\langle\mathbf{w}'*\mathbf{w}'\rangle,\quad \sigma_0\{\mathbf{G}_p,\mathbf{G}_\mu,\mathbf{G}_\xi,\mathbf{G}_B\}=\{\langle\mathbf{F}_p,\mathbf{F}_\mu,\mathbf{F}_\xi,\mathbf{F}_B\rangle\}$$

Аналогичное уравнение может быть без труда получено и для полной пульсационной энергии частиц; оно также будет иметь обычную форму [5]. Однако псевдотурбулентность дисперсных систем обычно существенно анизотропна, и интерес представляют энергии псевдотурбулентных движений в различных направлениях. Более подробно вопрос о форме уравнений для этих величин рассмотрен в § 4.

Второе уравнение (1.4) можно получить и из уравнения движения частицы (1.1). Действительно, положим формально

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{w}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}$$

подставим в (1.1) $\rho=\langle\rho\rangle+\rho'$ и т. п. и просуммируем полученные уравнения для $N\gg 1$ частиц, находящихся в объеме V. Получим

$$Vd_2\langle\rho\rangle\frac{D(\mathbf{w})}{Dt}+m\left[\left(\sum_{k=1}^{N}\mathbf{w}'^{(k)}\frac{\partial\mathbf{w}'^{(k)}}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\mathbf{w}\rangle+\frac{D}{Dt}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{w}'^{(k)}\right]+$$

$$+m\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{w}'^{(k)}*\mathbf{w}'^{(k)}-m\sum_{k=1}^{N}\mathbf{w}'^{(k)}\frac{\partial\mathbf{w}'^{(k)}}{\partial\mathbf{r}}=V\langle\rho\rangle d_2\mathbf{g}+$$

$$+V\langle\rho\rangle\mathbf{G}+\sum_{k=1}^{N}(\mathbf{F}^{(k)}-\sigma_0\mathbf{G}+\mathbf{F}_i^{(k)}),\quad \sigma_0\mathbf{G}=\langle\mathbf{F}\rangle$$

При $N\to\infty$ второй член в левой и последний член в правой частях этого уравнения, очевидно, исчезают, так что имеем, разделив это уравнение на V и перейдя к пределу $N\to\infty$

$$d_2\langle\rho\rangle\frac{D\langle\mathbf{w}\rangle}{Dt}=-\frac{\partial\mathbf{P}^{(p)}}{\partial\mathbf{r}}+m\left\langle\mathbf{w}'\frac{\partial\mathbf{w}'}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle+d_2\langle\rho\rangle\mathbf{g}+\langle\rho\rangle\mathbf{G}$$

Сравнение этого уравнения с (1.4) показывает, что необходимо выполнение равенства $\langle\mathbf{w}'(\nabla\mathbf{w}')\rangle=0$. Ниже при вычислении $\mathbf{G}_\xi$ принято также $\langle\mathbf{v}'(\nabla\mathbf{w}')\rangle=0$.

Для определенности второго уравнения (1.4) нужно найти явные выражения для величин G_p, G_μ, G_ξ и G_B. Используя соотношения (1.2), с точностью до членов второго порядка малости по псевдотурбулентным величинам получим выражения

$$G_p = -\frac{\partial \langle p\rangle}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_p' = -\sigma_0 \frac{\partial p'}{\partial \mathbf{r}}$$

$$G_\mu = \beta d_1 \left(K\langle \mathbf{u}\rangle + \frac{dK}{d\langle\rho\rangle}\langle \rho'\mathbf{u}'\rangle + \frac{1}{2}\frac{d^2K}{d\langle\rho\rangle^2}\langle \mathbf{u}\rangle\langle\rho'^2\rangle\right)$$

$$\mathbf{F}_\mu' = \sigma_0\beta d_1\left(K\mathbf{u}' + \frac{dK}{d\langle\rho\rangle}\langle \mathbf{u}\rangle\rho'\right), \quad K = K(\langle\rho\rangle)$$

$$G_\xi = \xi d_1\left(\frac{D\langle \mathbf{u}\rangle}{Dt} + \frac{\partial \mathbf{P}_\xi}{d_1\partial \mathbf{r}}\right), \quad \mathbf{F}_\xi' = \xi d_1\sigma_0\left(\frac{D\mathbf{u}'}{Dt} + \left(\mathbf{w}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle \mathbf{u}\rangle\right)$$

$$G_B = \gamma d_1 \int_{-\infty}^{t} \gamma'\left(\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt} + \frac{\partial \mathbf{P}_\xi}{d_1\partial\mathbf{r}}\right)\bigg|_{t=t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}$$

$$\mathbf{F}_B' = \gamma d_1\sigma_0 \int_{-\infty}^{t}\gamma'\left(\frac{D\mathbf{u}'}{Dt} + \left(\mathbf{w}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\mathbf{u}\rangle\right)\bigg|_{t=t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{P}_\xi = d_1\langle \mathbf{w}' * \mathbf{u}'\rangle$$

Для удобства в дальнейшем выберем в качестве единичного объема средний удельный объем одной частицы в системе $\langle\sigma\rangle = \sigma_0\langle\rho\rangle^{-1}$. Уравнения сохранения массы и импульса жидкой фазы представим в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\rho - (1-\rho)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}} = 0, \quad \mathbf{e} = \left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\|$$

$$d_1(1-\rho)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v} = -\frac{\partial p}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial(\mu\mathbf{e})}{\partial\mathbf{r}} + d_1(1-\rho)\mathbf{g} - \mathbf{F}, \quad \mu = \mu_0 S \tag{1.6}$$

Здесь μ — эффективная вязкость жидкости, протекающей через решетку относительно неподвижных частиц. Считаем ниже, что μ может зависеть от $\langle\rho\rangle$, но не от ρ. Подставляя $\rho = \langle\rho\rangle + \rho'$ в (1.6) и т. п. и усредняя, с точностью до членов второго порядка по характеристикам псевдотурбулентности получим следующие уравнения, описывающие среднее движение жидкости в дисперсной системе

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle\mathbf{v}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\rho\rangle - (1-\langle\rho\rangle)\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{r}} = 0, \quad \mathbf{q} = -\langle\rho'\mathbf{v}'\rangle$$

$$d_1\left[\frac{\partial}{\partial t}((1-\langle\rho\rangle)\langle\mathbf{v}\rangle) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}((1-\langle\rho\rangle)\langle\mathbf{v}\rangle * \langle\mathbf{v}\rangle)\right] + d_1\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\partial\mathbf{P}^{(f)}}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial\langle p\rangle}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial(\mu\langle\mathbf{e}\rangle)}{\partial\mathbf{r}} + d_1(1-\langle\rho\rangle)\mathbf{g} - \mathbf{G}$$

$$\mathbf{P}^{(f)} = d_1[(1-\langle\rho\rangle)\langle\mathbf{v}'*\mathbf{v}'\rangle + \mathbf{q}*\langle\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{v}\rangle * \mathbf{q}] \tag{1.7}$$

Входящая сюда сила $\mathbf{G}$ представляет сумму G_p, G_μ, G_ξ и G_B из (1.5). Вместе с уравнениями (1.4) уравнения (1.7) представляют систему динамических уравнений, описывающих среднее движение дисперсной системы. Эти уравнения существенно отличаются от уравнений для среднего движения, обычно постулируемых в феноменологической теории многокомпонентных сред (см., например, [6,7]). Прежде всего, в уравнении сохранения массы жидкой фазы появляется существенно новый член, обусловленный объемным псевдотурбулентным потоком жидкости $\mathbf{q}$. Такая же ситуация встречается, как известно, и при формулировке уравнения неразрывности для среднего движения турбулизованной сжимаемой жидкости. В уравнения сохранения импульсов фаз входят новые члены, описывающие дополнительное изменение импульса, обусловленное псевдотурбулентностью. Это, во-первых, пульсационные давления $\mathbf{P}^{(f)}$ и $\mathbf{P}^{(p)}$, а во-вторых, локальное изменение импульса жидкости, переносимого потоком $\mathbf{q}$.

Вторые уравнения (1.4) и (1.7) — приближенные. Это связано с тем, что при вычислении силы $\mathbf{G}$ в (1.5) и преобразовании левой части второго уравнения (1.6) члены, имеющие порядок по штрихованным величинам выше второго, опускались. Если псевдотурбулентные величины относительно велики, это может повести к существенным ошибкам при определении динамических переменных. Однако, последнее имеет место обычно для взвесей частиц в газе, когда импульсом газа, а следовательно, и силами $\mathbf{G}_\xi$, $\mathbf{G}_B$ можно вообще пренебречь. Тогда указанная ошибка может быть связана только с формой $\mathbf{G}_\mu$ из (1.5). По-видимому, в ряде случаев удобно вместо этой $\mathbf{G}_\mu$ использовать в (1.4) и (1.7) одну из эмпирических зависимостей для силы вязкого взаимодействия вида

$$\mathbf{G}_\mu \approx \beta d_1 K^* (\langle\rho\rangle) \langle\mathbf{u}\rangle$$

Большое число формул такого типа накоплено в опытах по псевдоожижению. Функция $K^*(\langle\rho\rangle)$ в последнем выражении описывает вязкое сопротивление слоя частиц с учетом их пульсаций, в то время как функция $K(\langle\rho\rangle)$, используемая выше, — вязкое сопротивление слоя относительно неподвижных «закрепленных» частиц. Различие между этими сопротивлениями подчеркивается в большинстве исследований по гидравлике псевдоожиженного слоя. Теоретически оно рассматривается в работе [8], где учитывается второй поправочный член в выражении $\mathbf{G}_\mu$ из (1.5). Однако в [8] этот член привлекается для объяснения понижения эффективного сопротивления псевдоожиженного слоя по сравнению с сопротивлением неподвижной насадки той же пористости; в то же время из (1.5) видно, что при $d^2K / d\langle\rho\rangle^2 > 0$, как это имеет место во всех экспериментах, указанный член соответствует относительному увеличению эффективного гидравлического сопротивления.

Во взвесях в капельных жидкостях пульсации динамических переменных обычно достаточно малы, чтобы уравнения (1.4), (1.7) были удовлетворительным приближением к действительности.

Для полного определения рассмотренных здесь динамических уравнений необходимо, очевидно, найти способ вычисления среднеквадратичных значений от рассмотренных псевдотурбулентных переменных. Такой способ рассматривается ниже.

§ 2. Стохастические уравнения и представления для случайных процессов. На основании результатов и обсуждения в работах [1-3] сделаем следующие два допущения о характере исследуемой псевдотурбулентности.

1. Примем, что временной и пространственный масштабы изменения динамических переменных значительно выше соответствующих масштабов изменения пульсационных величин, относящихся к псевдотурбулентному движению.

2. Временной масштаб τ существенного изменения величин типа $\varphi' = a'b' - \langle a'b' \rangle$, где a', b' — любые псевдотурбулентные переменные, намного ниже временного масштаба T изменения корреляционных функций $\langle a'b' \rangle$. Тогда при анализе процессов, характерная длительность которых имеет порядок t или выше, где $t \gg \tau$, но $t \ll T$, величины φ' можно считать марковскими. По аналогии с [9], параметры τ и T уместно назвать «внутренним» и «внешним» временными масштабами псевдотурбулентности (см. также обсуждение в [1-3]).

Используя эти допущения, вычитая усредненные уравнения (1.1) и (1.6), т. е. фактически второе уравнение (1.4) и уравнения (1.7), из соответствующих неусредненных уравнений (1.1), (1.6) и усредняя результаты по промежутку времени $t \gg \tau$, получим стохастические уравнения для рассматриваемых случайных процессов ρ', p', $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{w}'$

$$m\frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial t} = \mathbf{F}', \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{u}\rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho' - (1 - \langle\rho\rangle)\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{r}} = 0$$
$$d_1(1 - \langle\rho\rangle)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{u}\rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{v}' = -\frac{\partial p'}{\partial \mathbf{r}} + \mu\frac{\partial \mathbf{e}'}{\partial \mathbf{r}} - d_1\mathbf{g}\rho' - \mathbf{F}' \tag{2.1}$$

Эти уравнения записаны в локальной системе координат, в которой средняя скорость диспергированной фазы $\langle \mathbf{w}\rangle$ равна нулю; при выводе (2.1) считаем, что усреднение силы $\mathbf{F}_i$ по $t \gg \tau$ дает нуль.

Подставляя в (2.1) соотношения (1.5) для $\mathbf{F}'$, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho' - (1-\rho)\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \varkappa = \frac{d_1}{d_2}, \quad \pi' = \frac{p'}{d_2}, \quad \nu = \frac{\mu}{d_1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial t} - \varkappa\xi\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} - \varkappa\gamma\gamma'\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} = -\frac{\partial \pi'}{\partial \mathbf{r}} + \varkappa\beta\left(K\mathbf{u}' + \frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\rho'\right)$$

$$\varkappa(1-\rho)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{v}' + \varkappa\xi\rho\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \varkappa\gamma\gamma'\rho\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} =$$
$$= -(1-\rho)\frac{\partial \pi'}{\partial \mathbf{r}} + \varkappa\nu\frac{\partial \mathbf{e}'}{\partial \mathbf{r}} - \varkappa\beta\rho\left(K\mathbf{u}' + \frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\rho'\right) - \varkappa\mathbf{g}\rho' \tag{2.2}$$

Для упрощения записи угловые скобки в обозначениях динамических переменных здесь и ниже опущены.

Введем представления случайных процессов через интегралы Фурье — Стильтьеса. Тогда для спектральных мер dZ_ρ, dZ_π, $d\mathbf{Z}_v$ и $d\mathbf{Z}_w$ случайных процессов ρ', π', $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{w}'$ получим уравнения

$$(\omega + \mathbf{uk})\,dZ_\rho - (1-\rho)\,\mathbf{k}\,d\mathbf{Z}_v = 0, \quad A(\omega, \mathbf{k})\,d\mathbf{Z}_w - C(\omega, \mathbf{k})\,d\mathbf{Z}_v =$$
$$= -\mathbf{k}\,dZ_\pi + \varkappa\beta\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\,dZ_\rho, \quad -A_1(\omega, \mathbf{k})\,d\mathbf{Z}_w + C_1(\omega, \mathbf{k})\,d\mathbf{Z}_v =$$
$$= -(1-\rho)\,\mathbf{k}\,dZ_\pi - \varkappa\nu\mathbf{k}(\mathbf{k}\,d\mathbf{Z}_v) - \varkappa\left(\mathbf{g} + \rho\beta\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\right)dZ_\rho \tag{2.3}$$

$$A = i(1 + \varkappa\xi)\,\omega + (1 + i\operatorname{sign}\omega)\,\varkappa\gamma\gamma'|\omega|^{1/2} + \varkappa\beta K$$
$$A_1 = \varkappa\rho\,[i\xi\omega + (1 + i\operatorname{sign}\omega)\,\gamma\gamma'|\omega|^{1/2} + \beta K]$$
$$C = \varkappa\,[i\xi\omega + (1 + i\operatorname{sign}\omega)\,\gamma\gamma'|\omega|^{1/2} + \beta K]$$
$$C_1 = \varkappa\,[i(1-\rho)(\omega + \mathbf{uk}) + i\xi\rho\omega + (1 + i\operatorname{sign}\omega)\,\gamma\gamma'\rho|\omega|^{1/2} +$$
$$+ \rho\beta K + \nu k^2]$$

Умножая два последних уравнения (2.3) скалярно на волновой вектор $\mathbf{k}$ и используя первое уравнение (2.3), получим систему

$$k^2\,dZ_\pi + A(\mathbf{k}\,d\mathbf{Z}_w) = \left(C\frac{\omega + \mathbf{uk}}{1-\rho} + \varkappa\beta\frac{dK}{d\rho}\mathbf{uk}\right)dZ_\rho$$
$$k^2\,dZ_\pi + B(\mathbf{k}\,d\mathbf{Z}_w) = -\left(D\frac{\omega + \mathbf{uk}}{1-\rho} + \varkappa\mathbf{gk}\right)dZ_\rho \tag{2.4}$$
$$B = i\,\omega\rho, \quad D = \varkappa\,[i(1-\rho)(\omega + \mathbf{uk}) + 2\nu k^2]$$

Решение этой системы имеет вид

$$\mathbf{k}\, d\mathbf{Z}_w = \frac{1}{A-B}\left[(C+D)\frac{\omega+\mathbf{uk}}{1-\rho} + \varkappa\left(\mathbf{g} + \beta\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\right)\mathbf{k}\right] dZ_\rho$$

$$k^2\, dZ_\pi = \frac{-1}{A-B}\left[(AD+BC)\frac{\omega+\mathbf{uk}}{1-\rho} + \varkappa\left(A\mathbf{g} + B\beta\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\right)\mathbf{k}\right] dZ_\rho$$

Решение системы (2.3) выразится в форме

$$d\mathbf{Z}_v = \frac{1}{A_1C - AC_1}\left\{[A_1 + (1-\rho)A]\,\mathbf{k}\, dZ_\pi + \varkappa\left[A\left(\frac{\mathbf{vk}(\omega+\mathbf{uk})}{1-\rho} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \mathbf{g} + \rho\beta\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\right) - A_1\beta\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\right] dZ_\rho\right\}$$

$$d\mathbf{Z}_w = \frac{1}{A_1C - AC_1}\left\{[C_1 + (1-\rho)C]\,\mathbf{k}\, dZ_\pi + \right.$$
$$\left. + \varkappa\left[C\left(\frac{\mathbf{vk}(\omega+\mathbf{uk})}{1-\rho} + \mathbf{g} + \rho\beta\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\right) - C_1\beta\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\right] dZ_\rho\right\} \qquad (2.5)$$

Соотношения (2.4) и (2.5) позволяют представить спектральные меры всех исследуемых случайных процессов через спектральную меру процесса ρ'. Нетрудно видеть, что эти соотношения полностью определяют также фурье-преобразования различных корреляционных функций, представляющих интерес в рассматриваемой теории, если только известна спектральная плотность случайного процесса ρ'.

§ 3. Динамика флуктуаций концентрации дисперсной системы. Рассмотрим теперь динамику изменения случайного поля $\rho'(\mathbf{r}, t)$. Физической причиной такого изменения служат, очевидно, хаотические пульсации частиц, участвующих в псевдотурбулентном движении. В ситуации, когда массовый поток частиц $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, вызванный такими движениями, относительно мал, а характерное время его изменения T_J намного выше внутреннего временного масштаба псевдотурбулентности τ, изменение $\rho'(\mathbf{r}, t)$ может быть описано, как известно, при помощи обычного уравнения диффузии [1]. Первое из этих предположений, вообще, представляет необходимое условие существования некоторого дифференциального уравнения для $\rho'(\mathbf{r}, t)$, которое обращается в известное уравнение диффузии при выполнении второго допущения (см., например, [[11]]). Ниже предположение о малости потока $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ считаем адекватным, но от допущения о его медленном изменении отказываемся. Последнее оказывается необходимым потому, что при использовании обычного уравнения диффузии некоторые из введенных выше случайных процессов в общем случае не существуют [[10]].

Для учета в уравнении диффузии следующего члена разложения по величине τ / T_J используем метод, развитый в [[11]]. При слабой угловой зависимости функции распределения $f(\mathbf{w}; \mathbf{r}, t)$, т. е. при малом потоке J, что предполагается, последняя может быть представлена в форме

$$f(\mathbf{w}; \mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi m} c^*(w; \mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi m w^2}\mathbf{wJ}^*(w; \mathbf{r}, t) \qquad (3.1)$$

[1] Такой метод описания $\rho'(t, \mathbf{r})$ был использован ранее в [[10]]. Однако в этой работе учитывалась только диффузия, обусловленная мелкомасштабной компонентой пульсационного движения взвешенных частиц.

где $c^* w^2 dw$ и $\mathbf{J}^* w^2 dw$ — массовые концентрации и поток частиц с импульсом в интервале ($m\mathbf{w}$, $m(\mathbf{w} + d\mathbf{w})$).

Проводим анализ в системе координат, связанной со средним движением частиц, пренебрегая пространственной и временной зависимостями динамических переменных. Тогда, если не учитывать «рассеяния» частиц за счет из взаимодействия между собой и с флуктуациями несущего потока, для $f(\mathbf{w}; \mathbf{r}, t)$ будет справедливо уравнение неразрывности [11]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{w}; \mathbf{r}, t) = -\mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{w}; \mathbf{r}, t) \tag{3.2}$$

Для учета такого рассеяния введем полное эффективное сечение рассеяния в единице объема $n_t Q$. Для обычного газа n_t представляет концентрацию центров рассеяния молекул, а Q — эффективное сечение передачи импульса в единичном акте рассеяния, причем произведение $(n_t Q)^{-1}$ имеет смысл длины среднего пробега частицы между последовательными актами рассеяния. Тогда стандартным путем получим уравнение

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} + \frac{3}{w^2} \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{J}^*}{\partial t} \approx -\mathbf{w} \frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{r}} - \frac{3}{w^2} \mathbf{w} \frac{\partial (\mathbf{w}\mathbf{J}^*)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{3}{w} n_t Q \mathbf{w} \mathbf{J}^* \tag{3.3}$$

Это уравнение отличается от аналогичного уравнения в [11] только отсутствием членов, содержащих эффективное сечение поглощения и функцию источника частиц. Уравнение (3.3) содержит члены двух типов: инвариантные относительно изменения направления $\mathbf{w}$ и члены, изменяющие при этом свой знак. Поэтому это уравнение эквивалентно следующим двум

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} \approx -\frac{3}{w^2} \mathbf{w} \frac{\partial (\mathbf{w}\mathbf{J}^*)}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \frac{1}{w n_t Q} \frac{\partial \mathbf{J}^*}{\partial t} + \mathbf{J}^* \approx -\frac{w}{3 n_t Q} \frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{r}} \tag{3.4}$$

Обычное уравнение диффузии легко получается из этих соотношений при пренебрежении первым членом во втором из них.

Из (3.4) получим уравнение для неизвестной c^*

$$\frac{1}{w n_t Q} \frac{\partial^2 c^*}{\partial t^2} + \frac{\partial c^*}{\partial t} \approx \frac{1}{w n_t Q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\langle \mathbf{w} * \mathbf{w} \rangle \frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{r}} \right) \tag{3.5}$$

Введем величины c, $\mathbf{J}$, смысл которых очевиден, и средние

$$c(\mathbf{r}, t) = \int w^2 c^* (w; \mathbf{r}, t)\, dw, \qquad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int w^2 \mathbf{J}^* (w; \mathbf{r}, t)\, dw$$

$$\mathbf{D} = \| D_{ij} \|, \qquad D_{ij} = \frac{1}{n_t Q} \frac{\langle w_i w_j \rangle}{w^*}, \qquad w^* = \langle \mathbf{w}\mathbf{w} \rangle^{1/2} \tag{3.6}$$

Тогда, аналогично [11], можно показать, что уравнение (3.5) эквивалентно следующему обобщенному уравнению диффузии [1]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\mathbf{D} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) - \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}}{w^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] c, \qquad \operatorname{tr} \mathbf{D} = D_{ii} \tag{3.7}$$

---

[1] Приведенный расчет соответствует ситуации, когда вероятность изменения скорости частицы $\mathbf{w}_1 \to \mathbf{w}_2$ в единичном акте рассеяния зависит только от угла между векторами $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$. В этом случае величина $n_t Q$ оказывается скаляром. В общем случае, когда рассеяние существенно анизотропно в том смысле, что указанная вероятность зависит не только от этого угла, но и от направлений $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ вообще, можно ввести тензор $\mathbf{n}_t \mathbf{Q}$ и тензор эффективных длин свободного пробега $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{n}_t \mathbf{Q})^{-1}$ Тогда, например, формула (3.6) заменяется соотношением $D_{ij} = w^{*-1} \lambda_{ik} \langle w_k w_j \rangle$

Однако тензорный характер величины $\boldsymbol{\lambda}$ в приводимом анализе не существен, ибо формула (3.6) в явном виде ниже не используется.

Отметим, что этот же результат получается, если использовать принципиально иной метод — а именно, рассматривать непосредственно задачу о случайном блуждании частицы в трехмерном пространстве при условии конечности скорости перемещений частицы. Решение такой задачи в одномерном случае приведено со всеми подробностями в [12].

Из (3.7) следует такое же уравнение для объемной концентрации частиц ρ, либо же ее возмущения ρ'. Решения последнего уравнения будут описывать регулярное вырождение такого возмущения. Случайное возникновение такого возмущения концентрации за счет флуктуаций опишем при помощи введения в правую часть указанного уравнения некоторой случайной функции источника, марковской во времени. Такая функция вводилась ранее в [1-3]. В результате из получающегося таким путем уравнения для спектральной меры процесса ρ', рассматриваемой в § 2, получим соотношение

$$dZ_\rho = dZ\left[i\omega + \left(\mathbf{Dkk} - \omega^2 \frac{D_{ii}}{w^{*2}}\right)\right]^{-1} \tag{3.8}$$

замыкающее систему спектральных уравнений § 2. Входящая в (3.8) спектральная мера dZ обладает тем свойством, что величина Φ из соотношения $\langle dZ^* dZ\rangle = \Phi d\omega d\mathbf{k}$ зависит только от волнового вектора $\mathbf{k}$, но не от частоты ω. Из соотношения (3.8) следует представление для спектральной плотности процесса ρ'

$$\Psi_{\rho,\rho}(\omega, \mathbf{k}) = \Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k})\left[\omega^2 + \left(\mathbf{Dkk} - \omega^2 \frac{D_{ii}}{w^{*2}}\right)^2\right]^{-1} \times$$
$$\times \left\{\int\left[\omega^2 + \left(\mathbf{Dkk} - \omega^2 \frac{D_{ii}}{w^{*2}}\right)^2\right]^{-1} d\omega\right\}^{-1}, \quad \Psi_{\rho,\rho}\, d\omega\, d\mathbf{k} = \langle dZ_\rho^*\, dZ_\rho\rangle \tag{3.9}$$

в котором частная спектральная плотность $\Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k})$, определяющая одновременные корреляционные функции процесса ρ', считается известной. Последняя величина может быть представлена в одной из форм, рассмотренных в работах [1-3,10].

Соотношение (3.9) вместе с уравнениями (2.4), (2.5) позволяет вычислить все другие представляющие интерес спектральные плотности, а следовательно, по известным правилам, и соответствующие корреляционные функции. В полученных таким образом соотношениях будут содержаться априори неизвестные величины w^* и D_{ij}. Для их определения удобно так ориентировать координатные оси, чтобы тензор $\langle w_i' w_j'\rangle$ был диагонален. В такой системе координат тензор диффузии $\mathbf{D}$ также диагонален, как это можно видеть из (3.6). При помощи (2.4), (2.5) и (3.9) нетрудно найти величину $\Psi_{wi,wi}$, представляющую собой первый инвариант тензорной спектральной плотности процесса $\mathbf{w}'$. Эта величина зависит от w^* и собственных значений D_i тензора $\mathbf{D}$ как от параметров. Имеем очевидное уравнение

$$\int \Psi_{wi,wi}\, d\omega\, d\mathbf{k} = w^{*2}$$

определяющее w^* как функцию от D_i, динамических переменных и физических параметров фаз. Совершенно аналогично, выражая D_{ij} в виде интегралов от соответствующих компонент $\Psi_{wi,wj}$, получим уравнения для определения D_i. При этом формулы (3.6) для D_{ij} весьма неудобны, ибо содержат неизвестную $n_t Q$. Поэтому целесообразнее, по-видимому, использовать при получении соотношений для D_i зависимости, аналогичные зависимостям для коэффициентов турбулентной диффузии. Таким путем имеем уравнения

$$\int_0^\infty d\tau \int e^{i\omega\tau}\Psi_{wi,\,wj}\,d\omega\,d\mathbf{k} = D_{ij} \to D_i, \quad i = j$$

Результаты этого раздела позволяют окончательно определить в динамических уравнениях (1.4) и (1.7) члены, обусловленные наличием псевдотурбулентности. Нетрудно видеть, что эти уравнения определяются в приближении, соответствующем приближению Эйлера в обычной гидромеханике. Действительно, при анализе случайных процессов в § 2 во всех стохастических уравнениях члены, имеющие порядок T / T_0 или L / L_0, где L — внешний пространственный масштаб псевдотурбулентности, а T_0 и L_0 — характерные масштабы среднего движения дисперсной системы, были опущены. Следующее приближение, аналогичное приближению Навье-Стокса в гидродинамике однородной жидкости, могло бы состоять в учете таких членов непосредственно в указанных уравнениях. Альтернативный путь заключается в чисто феноменологическом дополнении уравнений сохранения импульса для среднего движения фаз членами, описывающими напряжения, обусловленные псевдотурбулентной вязкостью [1,2]. Например, в уравнении импульса для диспергированной фазы эти члены можно записать в форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{(p)}}{d\mathbf{r}}, \quad \tau_{ij}^{(p)} = \eta_{ik}^{(p)}\frac{\partial w_j}{\partial x_k} + \eta_{jk}^{(p)}\frac{\partial w_i}{\partial x_k}, \quad \boldsymbol{\eta}^{(p)} = \rho d_2 \mathbf{D}^{(p)}, \quad \mathbf{D}^{(p)} = \mathbf{D}$$

Отметим еще, что в выражениях (1.4) для псевдотурбулентного давления диспергированной фазы и компонент тензора эффективной псевдотурбулентной вязкости этой фазы $\boldsymbol{\eta}^{(p)}$ не учтена мгновенность передачи импульса в материале взвешенных твердых частиц. Учет этого обстоятельства приводит к домножению полученных здесь $\mathbf{P}^{(p)}$ и $\boldsymbol{\eta}^{(p)}$ на определенную функцию от средней объемной концентрации дисперсной системы [3].

4. Уравнения для пульсационной энергии фаз. Выше рассмотрены только «равновесные» состояния псевдотурбулентного движения в том смысле, что зависимостью динамических переменных от координат и времени пренебрегали, а сами движения предполагались полностью установившимися. В действительности при переменных динамических величинах (хотя по-прежнему полагаем производные от динамических переменных малыми), а также при наличии границ течения (стенок и т. п.) реализующаяся псевдотурбулентность может существенно отличаться от равновесной. Можно различать два разнородных релаксационных процесса: 1) установление равновесия на уровне отдельных частиц и жидкости, заключенной в их удельных объемах, так что локальное состояние системы может быть охарактеризовано заданием некоторых средних характеристик псевдотурбулентности; 2) процесс релаксации этих средних к их равновесным значениям, определенным выше, которые изменяются вслед за изменением динамических переменных. Ясно, что масштаб первого процесса релаксации совпадает с внутренним τ, а второго — с внешним T временным масштабом псевдотурбулентности. В рассматриваемой асимптотике $t \gg \tau$ первым процессом нужно вообще пренебречь, рассматривая только «отрелаксированные» в этом смысле состояния, которые уместно назвать «локально-равновесными».

Отметим, что первый релаксационный процесс аналогичен по смыслу установлению локального равновесия в обычных термодинамических системах (например, установлению состояния молекулярного хаоса в кинетической теории газов), когда вообще допустимо описывать состояние при помощи средних характеристик молекулярного движения,— например, температуры системы. Второй процесс релаксации аналогичен процессу выравнивания этих средних (т. е., например, теплопроводности) в таких системах. Пренебрежение первым процессом в смесях жидкость — частицы имеет, кроме того, в точности тот же смысл, что и допущение о наличии локального термодинамического равновесия в гидромеханике однофазной жидкости.

Очевидно, величина $\langle\rho'^2\rangle$ по своему смыслу не зависит от уровня развития псевдотурбулентных движений. Статистические характеристики пульсации давления p' в локально-равновесном состоянии будем считать такими же, как и в соответствующем равновесном состоянии, полагая, тем самым, что релаксация p' связана, в основном, с первым из указанных релаксационных процессов. Тогда уровень развития псевдотурбулентности в локально-равновесном состоянии можно описать при помощи величин

$$\vartheta_i = \langle v_i'^2\rangle, \qquad \theta_i = \langle w_i'^2\rangle$$

характеризующих энергию пульсационных движений жидкой и диспергированной фаз в разных направлениях. Эти величины рассматриваем как некие неизвестные функции t и $\mathbf{r}$, обращающиеся в ϑ_i°, θ_i° при переходе к равновесию. Ясно, что ϑ_i° и θ_i° представляют функции динамических переменных, т. е. зависят от t и $\mathbf{r}$ лишь неявно.

Задача состоит в получении определенных уравнений для ϑ_i, θ_i. Вообще говоря, для этого нужно уметь описывать детали процессов взаимодействия в системе, происходящих за времена $\sim\tau$. Если же они неизвестны, необходимо принять некоторые дополнительные гипотезы о характере этого взаимодействия, либо же некие предположения о первом процессе релаксации. Простейшая приближенная модель такого типа может быть основана на допущении, что указанный релаксационный процесс приводит к такому выравниванию скоростей псевдотурбулентного движения в различных направлениях, что соотношение между разными ϑ_i или θ_i таково же, что и между ϑ_i° или θ_i°, а фазовые характеристики случайных процессов совпадают с таковыми в соответствующем равновесном состоянии. Тогда имеют место соотношения

$$\vartheta_i = \vartheta\,(\vartheta_i^\circ / \vartheta^\circ), \qquad \theta_i = \theta\,(\theta_i^\circ / \theta^\circ), \qquad \vartheta = \Sigma_i\vartheta_i, \qquad \theta = \Sigma_i\theta_i$$

$$\langle v_i'v_j'\rangle = \frac{\vartheta}{\vartheta^\circ}\langle v_i'v_j'\rangle^\circ, \qquad \langle\rho'v_i'\rangle = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta^\circ}\right)^{1/2}\langle\rho'v_i'\rangle^\circ \tag{4.1}$$

$$\langle w_i'w_j'\rangle = \frac{\theta}{\theta^\circ}\langle w_i'w_j'\rangle^\circ, \qquad \langle\rho'w_i'\rangle = \left(\frac{\theta}{\theta^\circ}\right)^{1/2}\langle\rho'w_i'\rangle^\circ$$

$$\left\langle v_i'\frac{\partial\pi'}{\partial x_j}\right\rangle = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta^\circ}\right)^{1/2}\left\langle v_i'\frac{\partial\pi'}{\partial x_j}\right\rangle^\circ, \qquad \left\langle w_i'\frac{\partial\pi'}{\partial x_j}\right\rangle = \left(\frac{\theta}{\theta^\circ}\right)^{1/2}\left\langle w_i'\frac{\partial\pi'}{\partial x_j}\right\rangle^\circ$$

где градус сверху здесь и ниже обозначает величины, относящиеся к равновесному состоянию.

Для простоты рассмотрим уравнения для ϑ, θ только при пренебрежении силой $\mathbf{F}_B'$ в (2.2) [1]. Из второго уравнения (2.2) имеем

$$(1+\varkappa\xi)\,v_i'\frac{\partial w_i'}{\partial t}=\frac{\varkappa\xi}{2}\frac{\partial v}{\partial t}+\mathbf{v}'\mathbf{W}',\quad \mathbf{W}'=-\frac{\partial\pi'}{\partial\mathbf{r}}+\varkappa\beta\left(K\mathbf{u}'+\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\rho'\right)\quad(4.2)$$

Умножая второе и третье уравнения (2.2) на w_i', v_i' соответственно, используя соотношение (4.2) и усредняя, имеем уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\varkappa}{2}(1-\rho+\rho\xi)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\vartheta-\frac{\varkappa\rho\xi}{2}\frac{\varkappa\xi}{1+\varkappa\xi}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-\frac{\varkappa\nu}{2}\Delta\vartheta=\\=\left\langle\mathbf{v}'\left(\mathbf{V}'+\frac{\varkappa\rho\xi}{1+\varkappa\xi}\mathbf{W}'\right)\right\rangle\\ \frac{1+\varkappa\xi}{2}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\varkappa\xi}{2}\frac{\varkappa\xi}{1+\varkappa\xi}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-\varkappa\xi\frac{\partial}{\partial t}\langle\mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle=\left\langle\left(\mathbf{w}'-\frac{\varkappa\xi}{1+\varkappa\xi}\mathbf{v}'\right)\mathbf{W}'\right\rangle\\ \mathbf{V}'=-(1-\rho)\frac{\partial\pi'}{\partial\mathbf{r}}-\varkappa\rho\beta\left(K\mathbf{u}'+\frac{dK}{d\rho}\mathbf{u}\rho'\right)-\varkappa\mathbf{g}\rho'\end{gathered}\qquad(4.3)$$

Рассмотрим, например, $\langle\mathbf{v}'\mathbf{W}'\rangle$ и $\langle\mathbf{w}'\mathbf{W}'\rangle$. При помощи (4.1) получим

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{v}'\mathbf{W}'\rangle&=\sqrt{\vartheta}\left[\varkappa\beta K\left(\sqrt{\vartheta}-\frac{\langle\mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle^\circ}{\sqrt{\vartheta^\circ\theta^\circ}}\sqrt{\theta}\right)+\right.\\&\qquad\left.+\frac{\varkappa\beta\mathbf{u}}{\sqrt{\vartheta^\circ}}\frac{dK}{d\rho}\langle\rho'\mathbf{v}'\rangle^\circ-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^\circ}}\left\langle\mathbf{v}'\frac{\partial\pi'}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle^\circ\right]\\ \langle\mathbf{w}'\mathbf{W}'\rangle&=\sqrt{\theta}\left[\varkappa\beta K\left(\frac{\langle\mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle^\circ}{\sqrt{\vartheta^\circ\theta^\circ}}\sqrt{\vartheta}-\sqrt{\theta}\right)+\right.\\&\qquad\left.+\frac{\varkappa\beta\mathbf{u}}{\sqrt{\theta^\circ}}\frac{dK}{d\rho}\langle\rho'\mathbf{w}'\rangle^\circ-\frac{1}{\sqrt{\theta^\circ}}\left\langle\mathbf{w}'\frac{\partial\pi'}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle^\circ\right]\end{aligned}\qquad(4.4)$$

Но из уравнений (2.2) или (4.3), записанных для равновесного состояния, когда динамические переменные постоянны, следует

$$\begin{aligned}-\left\langle\mathbf{v}'\frac{\partial\pi'}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle^\circ+\varkappa\beta\mathbf{u}\frac{dK}{d\rho}\langle\rho'\mathbf{v}'\rangle^\circ&=-\varkappa\beta K\sqrt{\vartheta^\circ}\left(\sqrt{\vartheta^\circ}-\frac{\langle\mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle^\circ}{\sqrt{\vartheta^\circ\theta^\circ}}\sqrt{\theta^\circ}\right)\\-\left\langle\mathbf{w}'\frac{\partial\pi'}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle^\circ+\varkappa\beta\mathbf{u}\frac{dK}{d\rho}\langle\rho'\mathbf{w}'\rangle^\circ&=-\varkappa\beta K\sqrt{\theta^\circ}\left(\frac{\langle\mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle^\circ}{\sqrt{\vartheta^\circ\theta^\circ}}\sqrt{\vartheta^\circ}-\sqrt{\theta^\circ}\right)\end{aligned}\qquad(4.5)$$

Соотношения (4.5) позволяют преобразовать выражения (4.4). Такое же преобразование нетрудно провести и для величин $\langle\mathbf{v}'\mathbf{V}'\rangle$ и $\langle\mathbf{w}'\mathbf{V}'\rangle$. В результате из (4.3) получим уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\varkappa(1-\rho)}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\vartheta-\frac{\varkappa\xi\rho}{2}\frac{\varkappa\xi}{1+\varkappa\xi}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{w}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\vartheta-\frac{\varkappa\nu}{2}\Delta\vartheta=R_f\quad(4.6)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{w}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\left[\frac{1+\varkappa\xi}{2}\theta+\frac{\varkappa\xi}{2}\frac{\varkappa\xi}{1+\varkappa\xi}\vartheta-\varkappa\xi\left(\frac{\langle\mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle^\circ}{\sqrt{\vartheta^\circ\theta^\circ}}\sqrt{\vartheta\theta}\right)\right]=R_p\end{gathered}$$

---

[1] Если силой $\mathbf{F}_B'$ пренебречь нельзя (например, для крупных частиц), то в уравнения для ϑ, θ входят временные корреляционные функции

$$\langle\mathbf{v}'(t+\tau)\mathbf{v}'(t)\rangle\quad\langle\mathbf{v}'(t+\tau)\mathbf{w}'(t)\rangle,\ \langle\mathbf{w}'(t+\tau)\mathbf{w}'(t)\rangle$$

В этом случае необходимо по известным правилам составить уравнения для этих корреляционных функций, либо же допустить, аналогично (4.1), что

$$\begin{gathered}\langle\mathbf{v}'(t+\tau)\mathbf{v}'(t)\rangle=(\vartheta/\vartheta^\circ)\,\langle\mathbf{v}'(t+\tau)\mathbf{v}'(t)\rangle^\circ\\ \langle\mathbf{v}'(t+\tau)\mathbf{w}'(t)\rangle=(\vartheta\theta/\vartheta^\circ\theta)^{1/2}\,\langle\mathbf{v}'(t+\tau)\mathbf{w}'(t)\rangle^\circ\\ \langle\mathbf{w}'(t+\tau)\mathbf{w}'(t)\rangle=(\theta/\theta^\circ)\,\langle\mathbf{w}'(t+\tau)\mathbf{w}'(t)\rangle^\circ\end{gathered}$$

$$R_f = \frac{\varkappa\rho}{1+\varkappa\xi}\beta K\sqrt{\vartheta}\left[\sqrt{\vartheta^\circ} - \sqrt{\vartheta} - \frac{\langle \mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle^\circ}{\sqrt{\vartheta^\circ\theta^\circ}}(\sqrt{\theta^\circ} - \sqrt{\theta})\right]$$

$$R_p = \varkappa\beta K\left\{\sqrt{\theta}\left[\sqrt{\theta^\circ} - \sqrt{\theta} - \frac{\langle \mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle^\circ}{\sqrt{\vartheta^\circ\theta^\circ}}(\sqrt{\vartheta^\circ} - \sqrt{\vartheta})\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa\xi}{1+\varkappa\xi}\sqrt{\vartheta}\left[\sqrt{\vartheta^\circ} - \sqrt{\vartheta} - \frac{\langle \mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle^\circ}{\sqrt{\vartheta^\circ\theta^\circ}}(\sqrt{\theta^\circ} - \sqrt{\theta})\right]\right\}$$

Уравнения (4.6) для взвесей частиц в газах сводятся к одному уравнению для θ ($\varkappa \to 0$, $\varkappa\beta \neq 0$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\sqrt{\theta} \approx \varkappa\beta K\left[1 - \left(\frac{\langle \mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle^\circ}{\sqrt{\vartheta^\circ\theta^\circ}}\right)^2\right](\sqrt{\theta^\circ} - \sqrt{\theta}) \tag{4.7}$$

Уравнения (4.6) и (4.7) записаны в отличие от (4.3) в лабораторной системе координат, где $\mathbf{w} \neq 0$. Вместе с динамическими уравнениями (1.4) и (1.7) они полностью определяют состояние системы.

Уравнения энергии также записаны в приближении Эйлера. Для получения следующего приближения необходимо учесть: 1) увеличение энергии псевдотурбулентности за счет диссипации энергии среднего движения пульсациями; 2) перенос пульсационной энергии самими пульсациями. Эти факторы могут быть учтены феноменологически при помощи введения тензоров эффективной псевдотурбулентной вязкости и эффективных коэффициентов переноса псевдотурбулентной энергии фаз. Тогда, например, вместо R_p во втором уравнении (4.6) будет содержаться величина

$$R_p + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(p)}\frac{\partial\theta}{\partial \mathbf{r}}\right) + \mathbf{w}\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{(p)}}{\partial \mathbf{r}}$$

Используя динамические уравнения и уравнения переноса энергии псевдотурбулентности, нетрудно получить также уравнения энергии среднего движения фаз дисперсной системы.

Поступила 19 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у е в и ч Ю. А. Неньютоновская гидромеханика дисперсных систем. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
2. Б у е в и ч Ю. А. Статистическая механика газовзвесей. Динамические и спектральные уравнения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
3. Б у е в и ч Ю. А. Статистическая механика газовзвесей. Квазиизотропная модель. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
4. М я с н и к о в В. П. О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
5. Ч е п м е н С., К а у л и н г Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Б а р е н б л а т т Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, вып. 3.
7. Р а х м а т у л и н Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
8. Т о д е с О. М. О гидравлическом сопротивлении псевдоожиженного слоя. Теор. основы хим. технол., 1967, т. 1, № 4.
9. Н о в и к о в Е. А. Метод случайных сил в теории турбулентности. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 6.
10. Б у е в и ч Ю. А. К статистической механике частиц, взвешенных в потоке газа ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
11. М о р с Ф., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
12. К а ц М. Несколько вероятностных задач физики и математики. М., «Наука», 1967.