

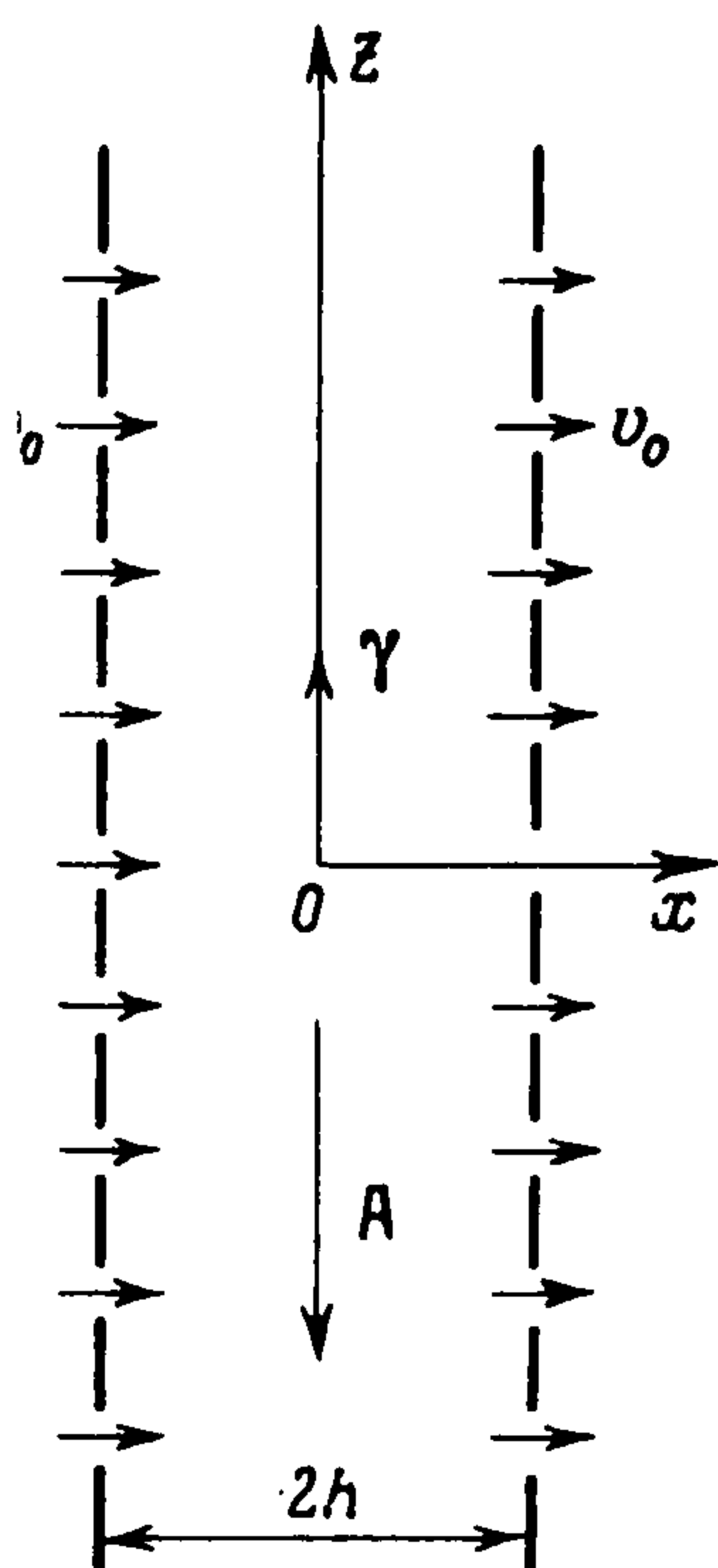
## СТАЦИОНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Д. Л. Шварцблат

(Пермь)

Рассматривается задача о стационарной тепловой конвекции в плоском бесконечном вертикальном канале с проницаемыми границами. Жидкость подогревается снизу, так что в канале имеется вертикальный постоянный градиент температуры. Через одну из вертикальных границ слоя происходит вдувание жидкости, а через другую — отсасывание, что создает в слое поперечное течение с однородной скоростью. Получено точное решение задачи, описывающее наложение вертикальной конвекции на однородный поперечный поток. Рассмотрены движения двух типов: плоские и пространственные, периодически зависящие от горизонтальной координаты вдоль границ слоя. Показано, что плоские конвективные движения возможны лишь до некоторого предельного значения скорости вдувания.

1. Плоский вертикальный слой жидкости ограничен параллельными проницаемыми плоскостями  $x = \pm h$  (фиг. 1). Через одну из плоскостей



Фиг. 1

происходит однородное вдувание со скоростью  $v_0$ , а через другую — однородное отсасывание с той же скоростью.

Подогрев снизу приводит к появлению в жидкости вертикального градиента температуры  $A$ , направленного вниз.

Уравнения стационарной конвекции имеют вид [1]

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + g\beta T\boldsymbol{\gamma} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость,  $T$  — температура,  $p$  — конвективное давление,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор, направленный по вертикали вверх,  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $\beta$  — коэффициенты кинематической вязкости, теплопроводности и теплового расширения.

Рассмотрим сначала плоские движения следующей структуры. Скорость есть наложение плоскопараллельного конвективного движения на однородный поперечный поток

$$v_x = v_0, \quad v_y = 0, \quad v_z = v(x) \quad (1.3)$$

где  $v_0 = \text{const.}$

Распределения температуры и давления будем искать в виде

$$T = -Az + \theta(x), \quad p = p(z) \quad (1.4)$$

где  $A = \text{const}$  — вертикальный градиент температуры<sup>1</sup>.

Из уравнений (1.1), (1.2) получим

$$\nu \frac{d^2v}{dx^2} - v_0 \frac{dv}{dx} + g\beta\theta = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + g\beta Az = C' \quad (1.5)$$

$$\chi \frac{d^2\theta}{dx^2} - v_0 \frac{d\theta}{dx} + Av = 0 \quad (1.6)$$

[Здесь  $C'$  — постоянная разделения переменных, определяющая градиент конвективного давления.

Перепишем уравнения для  $v(x)$  и  $\theta(x)$  в безразмерной форме, введя в качестве единиц расстояния, скорости и температуры соответственно  $h$ ,  $\chi/h$  и  $Ah$ ; тогда получим (штрих означает дифференцирование по безразмерной координате)

$$v'' - \frac{a}{P} v' + R\theta = C, \quad \theta'' - a\theta' + v = 0 \quad (1.7)$$

В уравнения входят три безразмерных параметра — числа Рэлея  $R$ , Пекле  $a$  и Прандтля  $P$

$$R = \frac{g\beta Ah^4}{\nu\chi}, \quad a = \frac{v_0 h}{\chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}$$

Вертикальная (конвективная) скорость  $v$  на ограничивающих плоскостях равна нулю; температура меняется с высотой вдоль плоскостей по линейному закону с градиентом  $A$ . Тогда для скорости  $v(x)$  и температуры  $\theta(x)$  имеем однородные граничные условия

$$v(\pm 1) = 0, \quad \theta(\pm 1) = 0 \quad (1.8)$$

Кроме того, конвективный поток предполагается замкнутым; отсюда получается дополнительное условие для конвективной скорости

$$\int_{-1}^1 v dx = 0 \quad (1.9)$$

Краевая задача (1.7) — (1.9) есть задача на собственные значения: нетривиальное решение существует лишь при определенных значениях числа Рэлея. Характеристические значения  $R$  зависят от двух параметров — чисел Пекле и Прандтля.

2. Исключая из системы (1.7) неизвестную функцию  $v(x)$ , получим одно уравнение для  $\theta(x)$

$$\theta^{IV} - a \left(1 + \frac{1}{P}\right) \theta''' + \frac{a^2}{P} \theta'' - R\theta = -C \quad (2.1)$$

<sup>1</sup> Решение вида (1.3), (1.4) принадлежит к числу инвариантногрупповых решений (см. работу [2]).

Общее решение этого уравнения

$$\theta = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x} + \frac{C}{R} \quad (2.2)$$

где  $r_i$  — корни характеристического уравнения

$$r^4 - a \left(1 + \frac{1}{P}\right) r^3 + \frac{a^2}{P} r^2 - R = 0 \quad (2.3)$$

Второе из уравнений (1.7) дает (2.4)

$$v = C_1 (a - r_1) r_1 e^{r_1 x} + C_2 (a - r_2) r_2 e^{r_2 x} + C_3 (a - r_3) r_3 e^{r_3 x} + C_4 (a - r_4) r_4 e^{r_4 x}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.8) и условию замкнутости конвективного потока (1.9), получим систему пяти линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_i$  и постоянной градиента давления  $C$ . Приравнявая нулю определитель этой системы, получим характеристическое соотношение, которое может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & (a - r_1) (r_2 - r_3) (r_2 - r_4) (r_3 - r_4) r_1 \operatorname{cth} r_1 - (a - r_2) (r_1 - r_3) (r_1 - r_4) \times \\ & \times (r_3 - r_4) r_2 \operatorname{cth} r_2 + (a - r_3) (r_1 - r_2) (r_1 - r_4) (r_2 - r_4) r_3 \operatorname{cth} r_3 - \\ & - (a - r_4) (r_1 - r_2) (r_1 - r_3) (r_2 - r_3) r_4 \operatorname{cth} r_4 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Это соотношение представляет собой уравнение, из которого определяется спектр собственных чисел  $R$  в зависимости от параметров  $a$  и  $P$ . В предельном случае  $a = 0$  (отсутствует вдувание и отсасывание через границы слоя) решение задачи известно [3,4]. В этом случае краевая задача (1.7) — (1.9) имеет нечетные и четные относительно середины слоя решения, а спектр собственных чисел Рэлея не зависит от числа Прандтля и образует две подсистемы уровней, соответствующие решениям разной четности. В случае нечетных решений собственные числа определяются соотношением

$$\sin R^{1/4} = 0, \quad R = \pi^4, \quad 16\pi^4, \quad \dots \quad (2.6)$$

Собственные числа четных решений находятся из уравнения

$$\operatorname{tg} R^{1/4} = \operatorname{th} R^{1/4}, \quad R = 237.8, \quad 2497, \quad \dots \quad (2.7)$$

При  $a \neq 0$  решение задачи не обладает определенной четностью. Для нахождения собственных чисел в этом случае удобно переписать уравнение (2.5) в вещественном виде. Характеристическое уравнение (2.3) имеет два вещественных корня  $r_1$  и  $r_2$  и два комплексно-сопряженных корня  $r_3 = p + iq$ ,  $r_4 = p - iq$ . После преобразований из (2.5) получим

$$\begin{aligned} & q [(a - r_1) (A_2^2 + q^2) r_1 \operatorname{cth} r_1 - (a - r_2) (A_1^2 + q^2) r_2 \operatorname{cth} r_2] + \\ & + \frac{r_1 - r_2}{\operatorname{ch} 2p - \cos 2q} \{q (p \operatorname{sh} 2p + q \sin 2q) [(a - p) (A_1 + A_2) - (A_1 A_2 - q^2)] + \\ & + (q \operatorname{sh} 2p - p \sin 2q) [(a - p) (A_1 A_2 - q^2) + q^2 (A_1 + A_2)]\} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$A_1 = r_1 - p, \quad A_2 = r_2 - p$$

Соотношение (2.8) существенно упрощается в частном случае  $P = 1$ . В этом случае корни уравнения (2.3) легко находятся

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \alpha), \quad r_{3,4} = \frac{1}{2}(a \pm i\beta) \\ \alpha = \sqrt{4R^{1/2} + a^2}, \quad \beta = \sqrt{4R^{1/2} - a^2}$$

Подстановка этих значений в (2.8) приводит к уравнению

$$\frac{\beta \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} \alpha} + \frac{\alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} a - \cos \beta} = 0 \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) со значениями  $r_i$ , определяемыми из (2.3), решалось численно для различных значений числа Прандтля. На фиг. 2 изображены четыре нижние ветви спектра  $R(a)$  для значений  $P = 0.5, 1, 5$ . Все ветви выходят из значений, определяемых формулами (2.6), (2.7) для  $a = 0$  (отсутствие вдувания). Наиболее характерная особенность полученного спектра собственных значений состоит в попарном замыкании соседних ветвей с ростом числа Пекле. Поскольку стационарное конвективное движение рассматриваемой структуры (1.3), (1.4) существует лишь при значениях параметров, соответствующих ветвям спектра  $R(a)$ , ясно, что наличие «замыкания» означает, что при достаточно больших скоростях вдувания рассматриваемый режим конвекции невозможен.

Предельные значения числа Пекле  $a_*$  сравнительно невелики.

Так, для  $P = 1$ , например,  $a_* = 0.88$ . В области  $a > a_*$ , таким образом, плоскопараллельная конвекция на фоне однородного поперечного потока невозможна.

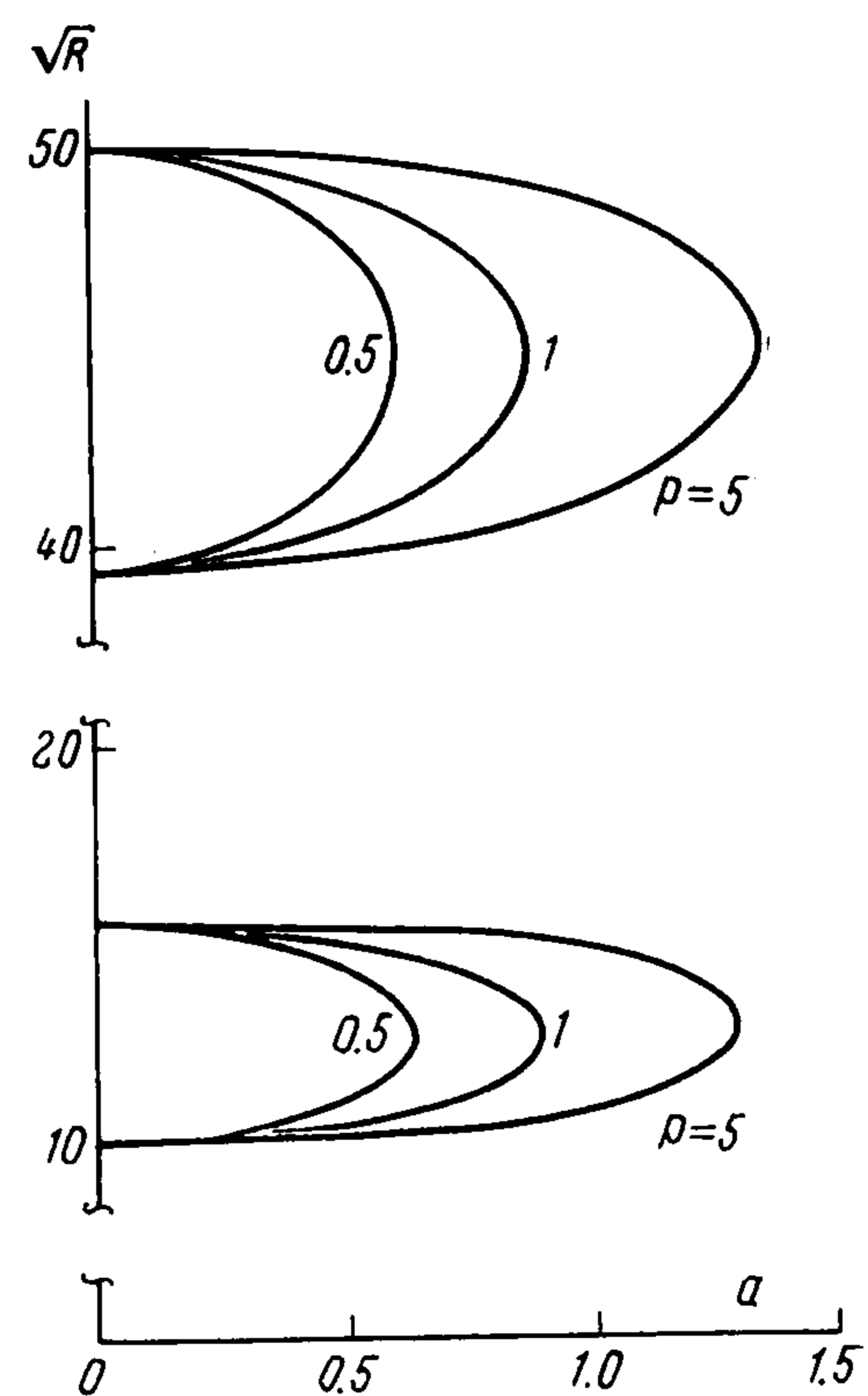
Это, разумеется, не означает, что в области  $a > a_*$  возможен лишь бесконвективный режим поперечного течения: не исключено, что в этой области имеет место стационарная конвекция иной структуры.

3. Рассмотрим пространственные вертикальные течения, периодические вдоль горизонтальной координаты  $y$  (ось  $y$  направлена перпендикулярно плоскости чертежа на фиг. 1).

Будем искать решение стационарных уравнений конвекции вида

$$v_x = v_0, \quad v_y = 0, \quad v_z = v(x) \cos ky \\ T = -Az + \theta(x) \cos ky, \quad p = p(z) \quad (3.1)$$

Здесь  $k$  — волновое число, характеризующее периодизм вдоль  $y$ .



Фиг. 2

Сохраняя единицы, введенные в п. 1, получим безразмерные уравнения

$$(v'' - k^2 v) - \frac{a}{P} v' + R\theta = 0 \quad (3.2)$$

$$(\theta'' - k^2 \theta) - a\theta' + v = 0 \quad (3.3)$$

с граничными условиями

$$v(\pm 1) = 0, \quad \theta(\pm 1) = 0 \quad (3.4)$$

( $k$  — безразмерное волновое число).

Следует заметить, что движение вида (3.1) автоматически обеспечивает выполнение условия замкнутости вертикального потока за счет периодической зависимости конвективной скорости от  $y$ ; дополнительного условия (1.9) теперь не требуется. По этой же причине постоянная разделения переменных в уравнении (3.2), связанная с градиентом давления, оказывается теперь равной нулю.

Однородная краевая задача (3.2) — (3.4) приводит к характеристическому уравнению, определяющему спектр собственных значений числа Рэлея  $R(a, P, k)$

$$\begin{aligned} & (u_1 u_2 + u_3 u_4) \operatorname{sh}(r_1 - r_2) \operatorname{sh}(r_3 - r_4) - \\ & - (u_1 u_3 + u_2 u_4) \operatorname{sh}(r_1 - r_3) \operatorname{sh}(r_2 - r_4) + \\ & + (u_1 u_4 + u_2 u_3) \operatorname{sh}(r_1 - r_4) \operatorname{sh}(r_2 - r_3) = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $u_i = r_i(a - r_i) + k^2$ , а  $r_i$  — корни уравнения

$$r^4 - a\left(1 + \frac{1}{P}\right)r^3 + \left(\frac{a^2}{P} - 2k^2\right)r^2 + ak^2\left(1 + \frac{1}{P}\right)r - (R - k^4) = 0 \quad (3.6)$$

В частном случае  $P = 1$  спектр выглядит просто. В этом случае из (3.6) получаем

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{4(R^{1/2} + k^2) + a^2}], \quad r_{3,4} = \frac{1}{2} [a \pm i \sqrt{4(R^{1/2} - k^2) - a^2}] \quad (3.7)$$

Подставляя эти значения в (3.5), найдем ветви спектра  $R$ :

$$R = \frac{1}{16} (n^2 \pi^2 + 4k^2 + a^2)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

В пределе  $a = 0$  (отсутствует просачивание) получается спектр, найденный в работе [5].

Как видно из формулы (3.8), в случае пространственных движений характеристические значения  $R$  монотонно увеличиваются с ростом числа Пекле; «замыкания» уровней  $R(a)$  отсутствуют. Таким образом, спектры собственных значений числа Рэлея для плоских и пространственных движений существенно различаются.

4. Разобранная задача тесно связана с проблемой конвективной устойчивости подогреваемой снизу жидкости. Если рассматривать однородный поперечный поток в качестве невозмущенного состояния и исследовать его устойчивость относительно возникновения конвекции при подогреве снизу методом малых возмущений, то для амплитуд малых плоскопараллельных возмущений на границе устойчивости получается краевая задача (1.7) — (1.9), а для пространственных возмущений — соответственно задача (3.2) — (3.4). Таким образом, задача о стационарной конвекции совпадает с задачей о критических возмущениях, что, как известно, специфично для вертикальных каналов. Найденные выше собственные значения числа Рэлея в то же время имеют смысл и критических значений с точки зрения устойчивости стационарного поперечного течения. При переходе (по мере увеличения числа Рэлея) через критические значения  $R_i$  поперечное течение становится неустойчивым относительно очередной моды вертикального конвективного возмущения. Кривые  $R(a)$  представляют собой, таким образом, нейтральные линии стационарных возмущений.

Замыкание уровней неустойчивости в случае плоских возмущений (фиг. 2) означает, что с увеличением скорости поперечного течения наступает полная стабилизация. Аналогичное замыкание линий спектра неустойчивости было уже описано в работе [6], в которой речь шла об устойчивости стационарного конвективного движения в наклонном слое. Как показано в [6], замыкание мод конвективной неустойчивости сопровождается появлением при определенных условиях колебательной неустойчивости. Можно думать, что и в рассмотренной выше задаче также возможны движения типа стационарных колебаний. Для полного выяснения этого вопроса необходимо исследование спектра нестационарных плоскопараллельных движений. Такое исследование в настоящее время проводится.

В случае пространственных возмущений критические числа Рэлея монотонно возрастают при увеличении параметра  $a$ . Устойчивость по отношению к пространственным возмущениям повышается, но абсолютная стабилизация не достигается.

В заключение заметим, что ранее [7] было исследовано влияние поперечного просачивания жидкости на возникновение конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом снизу. В горизонтальном слое поперечное движение также приводит к повышению устойчивости. Критические числа Рэлея монотонно увеличиваются с ростом числа Пекле; замыкание уровней в этом случае отсутствует. В этом смысле имеется сходство со случаем пространственных возмущений в вертикальном слое. Сравнивая результаты [7] с приведенными в данной работе, следует, однако подчеркнуть, что полной аналогии между рассмотренными задачами нет. В случае горизонтального слоя поперечное движение направлено поперек невозмущенных изотерм, что приводит к уменьшению толщины неустойчиво стратифицированного слоя при увеличении скорости поперечного движения. В случае же вертикального слоя поперечное движение происходит вдоль изотерм, не искажая равновесного распределения температуры.

Поступила 11 XII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. К а т к о в В. Л. Точные решения некоторых задач конвекции. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
3. О с т р о у м о в Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.—Л., Гостехтеориздат, 1952.
4. C h i a-S h u n J i h. Thermal instability of viscous fluids. Quart. appl. math., 1959, vol. 17, No. 1.
5. W o o d i n g R. A. Instability of a viscous liquid of variable density in a vertical Hele-Shaw cell. J. Fluid mech., 1960, vol. 7, No. 4, pp. 501—515.
6. Б и р и х Р. В., Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М., Р у д а к о в Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
7. Ш в а р ц б л а т Д. Л. О спектре возмущений и конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.