

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ОСЛАБЛЕНИИ ВОЛН ДЕТОНАЦИИ

Г. Г. Черный

(Москва)

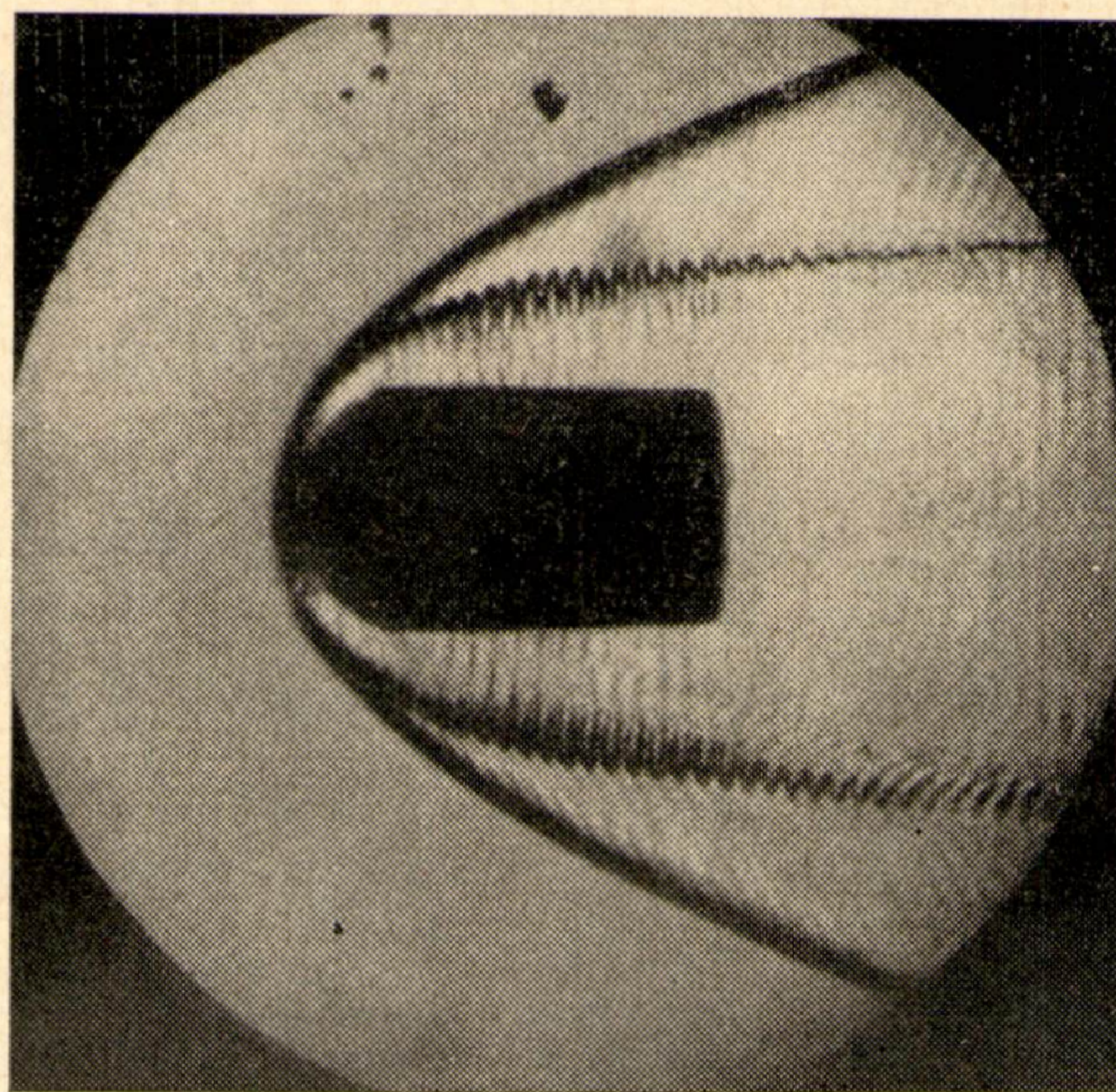
Вопрос об ослаблении пересжатых волн детонации подходящими к ним сзади волнами разрежения рассматривался в ряде работ. Установлено [1], что взаимодействие бесконечно тонкой плоской пересжатой волны детонации с достаточно интенсивным течением разрежения за ней приводит к постепенному ослаблению волны и асимптотическому переходу ее к режиму Чепмена — Жуге. При ослаблении пересжатых цилиндрических и сферических волн переход к режиму Чепмена — Жуге может происходить на конечном расстоянии, а не асимптотически, как у плоских волн [2]. В работе [3] рассмотрено асимптотическое поведение плоской волны детонации с «двухфронтной» структурой, т. е. волны детонации, представляющей собой адиабатический скачок и следующий за ним скачок тепловыделения, причем расстояние второго скачка от первого определяется временем задержки воспламенения частицы газа после прохождения ею первого скачка. При ряде упрощающих предположений (см. ниже) показано, что такая волна выходит асимптотически на режим Чепмена — Жуге лишь при достаточно малом значении энергии активации. При больших значениях энергии активации малое изменение начальных условий приводит к экспоненциальному отклонению фронта волны от его асимптотического положения, соответствующего режиму Чепмена — Жуге.

Вопрос об асимптотическом поведении волн детонации при их ослаблении тесно связан с вопросом об устойчивости этих волн по отношению к различным возмущениям. В работах [4,5] рассмотрена неустойчивость плоских волн детонации с двухфронтной структурой, связанная с возможным спонтанным распадом фронта тепловыделения. В работе [4], в частности, установлен критерий, согласно которому неустойчивость рассмотренного типа наступает при достаточно больших значениях энергии активации.

Возникающая при ослаблении волн детонации неустойчивость может приводить к развитию колебаний значительной амплитуды в потоке газа и к разрушению волн детонации. Пример такого разрушения волны детонации, образующейся перед телом при его полете с большой скоростью в водородно-воздушной смеси<sup>1</sup>, приведен на фиг. 1.

В предлагаемой работе детально исследован вопрос об ослаблении плоской детонационной волны с двухфронтной структурой подходящими к ней сзади возмущениями разрежения, изучен механизм возникающих при этом колебаний и установлен критерий устойчивого поведения волны при ее ослаблении и переходе к режиму Чепмена — Жуге.

<sup>1</sup> Снимок сделан в Институте механики МГУ В. В. Семченко.



Фиг. 1

Рассмотрим одномерное течение газа с плоской детонационной волной, имеющей «двухфронтную» структуру (фиг. 2). Пусть  $v$ ,  $p$  и  $\rho$  — скорость, давление и плотность газа. Изменение этих величин в каждой из трех областей, отделенных одна от другой фронтом адиабатического скачка  $s$  и фронтом тепловыделения  $f$ , описывается уравнениями адиабатического движения газа. Обозначим индексом  $\infty$  величины перед адиабатическим скачком, индексом 1 — величины в слое между двумя фронтами, величины за фронтом тепловыделения оставим без индекса.

Параметры газа должны быть связаны условиями:  
на адиабатическом скачке

$$v_1 - v_\infty = \frac{2}{\gamma + 1} \left[ \frac{a_\infty^2}{v_\infty - c_s} - (v_\infty - c_s) \right] \quad (1)$$

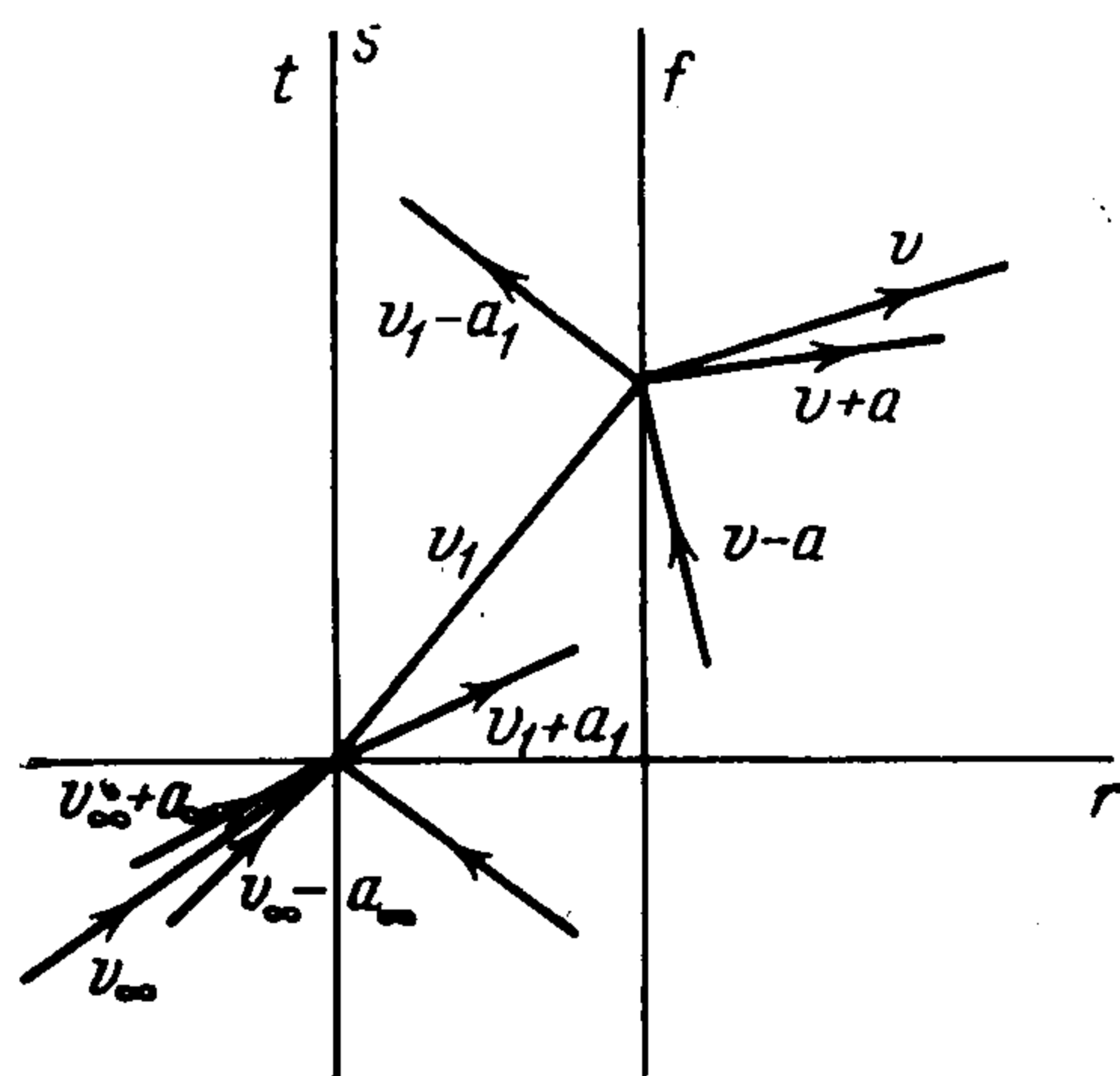
$$p_1 = p_\infty + \rho_\infty (v_\infty - c_s) (v_\infty - v_1), \quad \rho_1 = \frac{\rho_\infty (v_\infty - c_s)}{v_1 - c_s}$$

на фронте тепловыделения

$$v - v_1 = \frac{1}{\gamma + 1} \left\{ \frac{a_1^2}{v_1 - c_f} - (v_1 - c_f) - \left( \left[ \frac{a_1^2}{v_1 - c_f} - (v_1 - c_f) \right]^2 - 2(\gamma^2 - 1)Q \right)^{1/2} \right\}$$

$$p = p_1 + \rho_1 (v_1 - c_f) (v_1 - v), \quad \rho = \frac{\rho_1 (v_1 - c_f)}{v - c_f} \quad (2)$$

Здесь  $a$  — скорость звука,  $c_s$  и  $c_f$  — скорость распространения адиабатического скачка и скорость распространения фронта тепловыделения.



Фиг. 2

Для определенности принято, что газ совершенный и отношение теплоемкостей  $\gamma$  одинаково во всем потоке. Тепловыделение  $Q$  в единице массы газа при прохождении им фронта  $f$  считается заданным.

Фронт тепловыделения распространяется по газу с дозвуковой скоростью (этому соответствует выбранный перед радикалом в первом условии (2) знак минус) и, следовательно, от него отходят характеристики трех семейств, в том числе одно семейство — навстречу потоку. Поэтому для однозначного определения

отходящих от фронта вдоль характеристик возмущений и скорости фронта по известным подходящим к фронту возмущениям условия (2) недостаточны и должны быть дополнены еще одним условием. Таким условием в рассматриваемой задаче служит задание времени задержки воспламенения  $\tau$ , т. е. времени [прохождения частицей газа расстояния от адиабатического скачка до фронта тепловыделения. В самом деле, так как вдоль траектории частицы

$$r_f(t + \tau) = r_s(t) + \int_t^{t+\tau} v dt \quad (3)$$

то при заданном  $\tau$  это равенство и дает дополнительное условие для однозначного определения возмущения, отходящего вперед от фронта тепловыделения. Для того чтобы учесть влияние на время  $\tau$  термодинамических условий, в которых находится частица, будем находить это время из следующего соотношения, взятого вдоль траектории частицы после прохождения ею адиабатического скачка

$$\int_t^{t+\tau} f(p, T) dt = 1 \quad (4)$$

Если давление и температура  $T$  в частице сохраняются, то время  $\tau$  просто равно  $1 / f(p, T)$ . Функцию  $f$  можно взять, например, в виде

$$f = k p^{m-1} \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) \quad (5)$$

где  $E$  — энергия активации,  $R$  — газовая постоянная,  $m$  и  $k$  — константы.

Примем за начальное состояние стационарную структуру волны в системе координат, в которой волна покоится. Все величины, относящиеся к этому состоянию, обозначим индексом 0. Будем рассматривать нестационарные движения, которые возникают при взаимодействии такой волны с возмущениями, подходящими к ней сзади.

Считая движение в слое между фронтами слабо возмущенным, представим параметры газа в этом слое в виде

$$v_1 = v_{10} + \delta v_1, \quad p_1 = p_{10} + \delta p_1, \quad \rho_1 = \rho_{10} + \delta \rho_1$$

В линейном приближении из уравнений газодинамики получим

$$\begin{aligned} \delta v_1 &= v_{10}(F + G), \quad \delta p_1 = \rho_{10} v_{10} a_{10} (-F + G), \\ \delta \rho_1 &= \frac{\rho_{10} v_{10}}{a_{10}} (-F + G) + \rho_{10} H \end{aligned} \quad (6)$$

где функции  $F, G, H$  зависят каждая соответственно от одного характеристического аргумента

$$|\xi = r - (v_{10} - a_{10})t, \quad \eta = r - (v_{10} + a_{10})t, \quad \zeta = r - v_{10}t$$

Условия (1) на фронте адиабатического скачка после линеаризации дают следующие соотношения между значениями функций  $F, G$  и  $H$  на фронте (в линейном приближении — при  $r = 0$ ) и скоростью фронта  $c_s$ :

$$G_s = -\lambda F_s, \quad H_s = \sigma F_s, \quad \frac{c_s}{v_{10}} = \kappa F_s \quad (7)$$

Здесь  $\lambda, \sigma, \kappa$  — функции числа Маха набегающего потока  $M_\infty$  и отношения теплоемкостей  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2M_\infty^2 M_{10} - 1 - M_\infty^2}{2M_\infty^2 M_{10} + 1 + M_\infty^2}, \quad \sigma = \frac{4(M_\infty^2 M_{10}^2 - 1)}{2M_\infty^2 M_{10} + 1 + M_\infty^2}, \\ \kappa &= \frac{(\gamma + 1) M_\infty^2}{2M_\infty^2 M_{10} + 1 + M_\infty^2} \end{aligned}$$

Связь между  $M_{10}$  и  $M_{\infty}$  определяется формулой

$$M_{10}^2 = \frac{1 + 1/2(\gamma - 1)M_{\infty}^2}{\gamma M_{\infty}^2 - 1/2(\gamma - 1)}$$

Величина  $\lambda = -G_s / F_s$  дает меру изменения возмущения давления при его отражении от скачка и называется обычно коэффициентом отражения слабых возмущений от скачка.

Подчеркнем, что задание возмущений, подходящих к скачку сзади вдоль характеристик  $\xi = \text{const}$  (т. е. функции  $F$ ), полностью определяет возмущения, отходящие от скачка вдоль характеристик  $\eta = \text{const}$  и  $\zeta = \text{const}$  (функции  $G$  и  $H$ ), и скорость скачка  $c_s$ .

Из соотношений (3) и (4) в линейном приближении (считая, что  $\tau$  меняется мало при малых изменениях  $p$  и  $T$ ), получаем

$$r_f(t + \tau_0) = r_s(t) + v_{10}\tau_0 + v_{10} \int_t^{t+\tau_0} \left( \frac{\delta v_1}{v_{10}} - \frac{\partial \ln f}{\partial \ln p} \Big|_0 \frac{\delta p_1}{p_{10}} - \frac{\partial \ln f}{\partial \ln T} \Big|_0 \frac{\delta T_1}{T_{10}} \right) dt \quad (8)$$

Это выражение было ранее выведено в работе [4].

Используя формулы (6), произведем интегрирование и придадим выражению (8) следующий вид:

$$r_f(t + \tau_0) = r_s(t) + v_{10}\tau_0 + v_{10} \int_t^{t+\tau_0} [(1 + \mu M_{10}) F(a_{10}t' - v_{10}t) + (1 - \mu M_{10}) G(-a_{10}t' - v_{10}t)] dt' - nH(-v_{10}t)v_{10}\tau_0 \quad (9)$$

Здесь

$$\mu = (\gamma - 1)n + \gamma m', \quad n = \frac{\partial \ln f}{\partial \ln T} \Big|_0, \quad m' = \frac{\partial \ln f}{\partial \ln p} \Big|_0$$

Если функция  $f$  определяется формулой (5), то

$$n = \frac{E}{RT_{10}}, \quad m' = m - 1$$

Дифференцированием соотношения (9) по  $t$  получим условие

$$\frac{c_{f, t+\tau_0}}{v_{10}} = \frac{c_{s, t}}{v_{10}} + b_1(F_{f, t+\tau_0} - F_{s, t}) + b_2(G_{f, t+\tau_0} - G_{s, t}) - nv_{10}\tau_0 H_{s, t}' \quad (10)$$

где

$$b_1 = (1 - M_{10})(1 + \mu M_{10}), \quad b_2 = (1 + M_{10})(1 - \mu M_{10})$$

Условие (10) связывает значения параметров газа в одной и той же частице при ее нахождении в точке за адиабатическим скачком и в точке перед фронтом тепловыделения. Используя то, что величины  $c_s$ ,  $F_s$  и  $G_s$  можно выразить через  $H_s$  из соотношений (7), и то, что функция  $H$  сохраняется при замене индексов  $s, t$  индексами  $f, t + \tau_0$ , условие (10) легко преобразовать к виду, содержащему только значения параметров газа перед фронтом тепловыделения и скорость этого фронта (индекс  $f$  здесь и в дальнейшем опущен)

$$\frac{c}{v_{10}} = b_1 F + b_2 G + \frac{\kappa - b_1 + b_2 \lambda}{\sigma} H - nv_{10}\tau_0 H' \quad (11)$$

Обратимся теперь к условиям (2), связывающим параметры газа с двух сторон фронта тепловыделения. Введем параметр  $\Delta$ , характеризующий отличие невозмущенной волны детонации от волны Чепмена — Жуге, при помощи формулы

$$\left(\frac{a_{10}^2}{v_{10}} - v_{10}\right)^2 - 2(\gamma^2 - 1)Q = v_J^2 \Delta^2$$

Тогда

$$v_0 = \frac{1}{\gamma + 1} \left( \gamma v_{10} + \frac{a_{10}^2}{v_{10}} - v_J \Delta \right) = v_J \left( 1 - \frac{\Delta}{\gamma + 1} \right), \quad v_J = \frac{1}{\gamma + 1} \left( \gamma v_{10} + \frac{a_{10}^2}{v_{10}} \right)$$

$$p_0 = p_{10} + \rho_{10} v_{10} (v_{10} - v_0) = p_J + \rho_{10} v_{10} v_J \frac{\Delta}{\gamma + 1}$$

$$\rho_0 = \frac{\rho_{10} v_{10}}{v_0} = \frac{\rho_J}{1 - \Delta/(\gamma + 1)}, \quad a_0^2 - v_0^2 = v_0 v_J \Delta$$

При любой величине  $\Delta$  и малых возмущениях потока соотношения (2) примут следующий вид при  $r = v_{10} \tau_0$ :

$$\begin{aligned} \delta v = v - v_0 = & \frac{1}{\gamma + 1} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} \right) c + \left( \gamma - \frac{1}{M_{10}^2} - \frac{\gamma - 1}{M_{10}} \right) v_{10} F + \right. \\ & \left. + \left( \gamma - \frac{1}{M_{10}^2} + \frac{\gamma - 1}{M_{10}} \right) v_{10} G - \frac{1}{M_{10}^2} v_{10} H + v_J \Delta - \right. \\ & \left. - \left[ v_J^2 \Delta^2 + 2v_{10} \left( \frac{1}{M_{10}^2} - 1 \right) \left[ \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} \right) c - \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} + \frac{\gamma - 1}{M_{10}} \right) v_{10} F - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} - \frac{\gamma - 1}{M_{10}} \right) v_{10} G - \frac{1}{M_{10}^2} v_{10} H \right] \right]^{1/2} \right\} \\ \frac{\delta p}{\rho_0 v_0} = & -\delta v - \left( 1 - \frac{v_0}{v_{10}} \right) c + \left[ 2 - \frac{1}{M_{10}} - M_{10} - (1 - M_{10}) \frac{v_0}{v_{10}} \right] v_{10} F + \\ & + \left[ 2 + \frac{1}{M_{10}} + M_{10} - (1 + M_{10}) \frac{v_0}{v_{10}} \right] v_{10} G + v_{10} \left( 1 - \frac{v_0}{v_{10}} \right) H \\ \frac{\delta \rho}{\rho_0} = & -\frac{\delta v}{v_0} + \left( \frac{v_{10}}{v_0} - 1 \right) \frac{c}{v_{10}} + (1 - M_{10}) F + (1 + M_{10}) G + H \end{aligned} \quad (12)$$

Будем сначала считать, что параметр  $\Delta$  не мал, т. е. исходная волна детонации не близка к режиму Чепмена — Жуге. Тогда в соотношениях (12) величины  $c/v_{10}$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  можно считать малыми сравнительно с  $\Delta^2$ , а течение за фронтом тепловыделения описывать в линейном приближении, т. е. аналогично выражениям (6) записать

$$\begin{aligned} \delta v = v_0 (F_* + G_*), \quad \delta p = \rho_0 v_0 a_0 (-F_* + G_*) \\ \delta \rho = \frac{\rho_0 v_0}{a_0} (-F_* + G_*) + \rho_0 H_* \end{aligned}$$

После линеаризации радикала в первом условии (12) эти три условия и условие (11) дают четыре линейных соотношения, связывающих скорость фронта тепловыделения  $c_f$  и три отходящих от фронта возмущения  $F$ ,  $G_*$ ,  $H_*$  с тремя подходящими к фронту возмущениями  $G$ ,  $H$ ,  $F_*$ . В частности, для определения  $c_f$  и  $F$ , кроме условия (11), найдем следующее со-

отношение:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 1 - \frac{v_0}{v_{10}} + \frac{1}{\gamma + 1} \left( \frac{1}{M_0} + 1 \right) \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} \right) \left[ 1 - \frac{v_{10}}{v_J \Delta} \left( \frac{1}{M_{10}^2} - 1 \right) \right] \right\} c + \\
 & + \left\{ (1 - M_{10}) \frac{v_0}{v_{10}} - 2 + \frac{1}{M_{10}} + M_{10} + \frac{1}{\gamma + 1} \left( \frac{1}{M_0} + 1 \right) \left[ \gamma - \frac{1}{M_{10}^2} - \frac{\gamma - 1}{M_{10}} + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{v_{10}}{v_J \Delta} \left( \frac{1}{M_{10}^2} - 1 \right) \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} + \frac{\gamma - 1}{M_{10}} \right) \right] \right\} v_{10} F + \left\{ (1 + M_{10}) \frac{v_0}{v_{10}} - 2 - \frac{1}{M_{10}} - \right. \\
 & \quad \left. - M_{10} + \frac{1}{\gamma + 1} \left( \frac{1}{M_0} + 1 \right) \left[ \gamma - \frac{1}{M_{10}^2} + \frac{\gamma - 1}{M_{10}} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{v_{10}}{v_J \Delta} \left( \frac{1}{M_{10}^2} - 1 \right) \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} - \frac{\gamma - 1}{M_{10}} \right) \right] \right\} v_{10} G - \\
 & - \left\{ 1 - \frac{v_0}{v_{10}} + \frac{1}{\gamma + 1} \left( \frac{1}{M_0} + 1 \right) \frac{1}{M_{10}^2} \left[ 1 - \frac{v_{10}}{v_J \Delta} \left( \frac{1}{M_{10}^2} - 1 \right) \right] \right\} v_{10} H - 2a_0 F_* = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

При отсутствии подходящих к фронту тепловыделения возмущений, т. е. при  $G = H = F_* = 0$ , условия (11) и (13) дают два различных соотношения, связывающих скорость фронта тепловыделения  $c$  и отходящее от него вперед возмущение  $F$ . Условие (11) следует из наличия определенного времени задержки воспламенения и может быть названо «химическим» условием; условие (13) вытекает из законов сохранения на фронте тепловыделения и может быть названо «газодинамическим».

При отсутствии подходящих к фронту тепловыделения возмущений его скорость  $c^{(1)}$  согласно химическому условию связана с величиной  $F$  соотношением

$$c^{(1)} = b_1 v_{10} F$$

Скорость  $c^{(2)}$ , определяемая при том же значении  $F$  газодинамическим условием, равна

$$c^{(2)} = B_1 v_{10} F$$

где  $B_1$  находится из соотношения (13). Согласно работе [4] при выполнении условия  $(c^{(1)} / c^{(2)}) > 1$  волна детонации с двухфронтной структурой неустойчива, в противном случае — устойчива. Выполнение такого критерия неустойчивости будет указанием на то, что при отсутствии возмущений, кроме решения, в котором фронт тепловыделения стационарен, существует другое решение, в котором фронт тепловыделения распадается, приобретая новую скорость и излучая ударные волны и центрированные волны разрежения (если при распаде возникает волна разрежения, бегущая вперед, то движение будет автомодельным лишь при условии, что функция  $f(p, T)$  в соотношении (4) не содержит констант, позволяющих образовать из определяющих величин масштаб времени или длины). Решения с распадом разрыва в общем случае не будут близкими к исходному невозмущенному решению; переход от исходной стационарной структуры к решению с распадом разрыва есть существенно нелинейный процесс. Ряд примеров решений с распадом разрыва проанализирован в работе [5].

На фиг. 3 для времени задержки воспламенения, определенном с использованием формулы (5), приведена граница устойчивости в виде зависимости  $E / RT_\infty$  от  $M_\infty$  и  $\bar{Q} = Q / c_p T_\infty$  (для определенности в расчетах принято  $\gamma = 1.4$  и  $m = 1$ ).

Отметим, что при определении границы устойчивости формулами (13), очевидно, можно пользоваться и при сколь угодно малых  $\Delta$ . Из фиг. 3 следует, что при больших значениях энергии активации  $E$  и при фиксированном тепловыделении  $Q$  детонационная волна становится неустойчивой при приближении к режиму Чепмена — Жуге.

Рассмотренную в работе [7] неустойчивость волны детонации можно назвать внутренней неустойчивостью. Как уже было сказано, она имеет нелинейный характер и может возникать спонтанно.

В линейной постановке уравнения (2) — (4) при отсутствии подходящих к фронту тепловыделения возмущений имеют решения, отличные от невозмущенного, только на границе устойчивости, определенной выше. Во всех остальных случаях неустойчивость может возникать лишь как результат постепенного развития возмущения, действовавшего на стационарную структуру волны.

Возвратимся вновь к уравнениям (11) и (13). Будем считать, что волна детонации взаимодействует с возмущением, подходящим к ней сзади. Тогда подходящие к фронту тепловыделения спектры возмущения  $G$  и  $H$

будут результатом отражения от адиабатического скачка возмущений  $F$ , идущих от фронта тепловыделения вперед, т. е.

$$G_{f,t} = -\lambda F_{f,t-\delta_1}, \quad H_{f,t} = \sigma F_{f,t-\delta_2}, \quad H_{f,t}' = -\sigma \left( \frac{a_{10}}{v_{10}} - 1 \right) F_{f,t-\delta_2}$$

где

$$\delta_1 = \frac{2M_{10}}{1 - M_{10}^2} \tau_0, \quad \delta_2 = \frac{\tau_0'}{1 - M_{10}}$$

Используя эти соотношения и заменив в уравнении (13) величину  $c'$  согласно ее выражению (11), для нахождения функции  $F$  получим уравнение

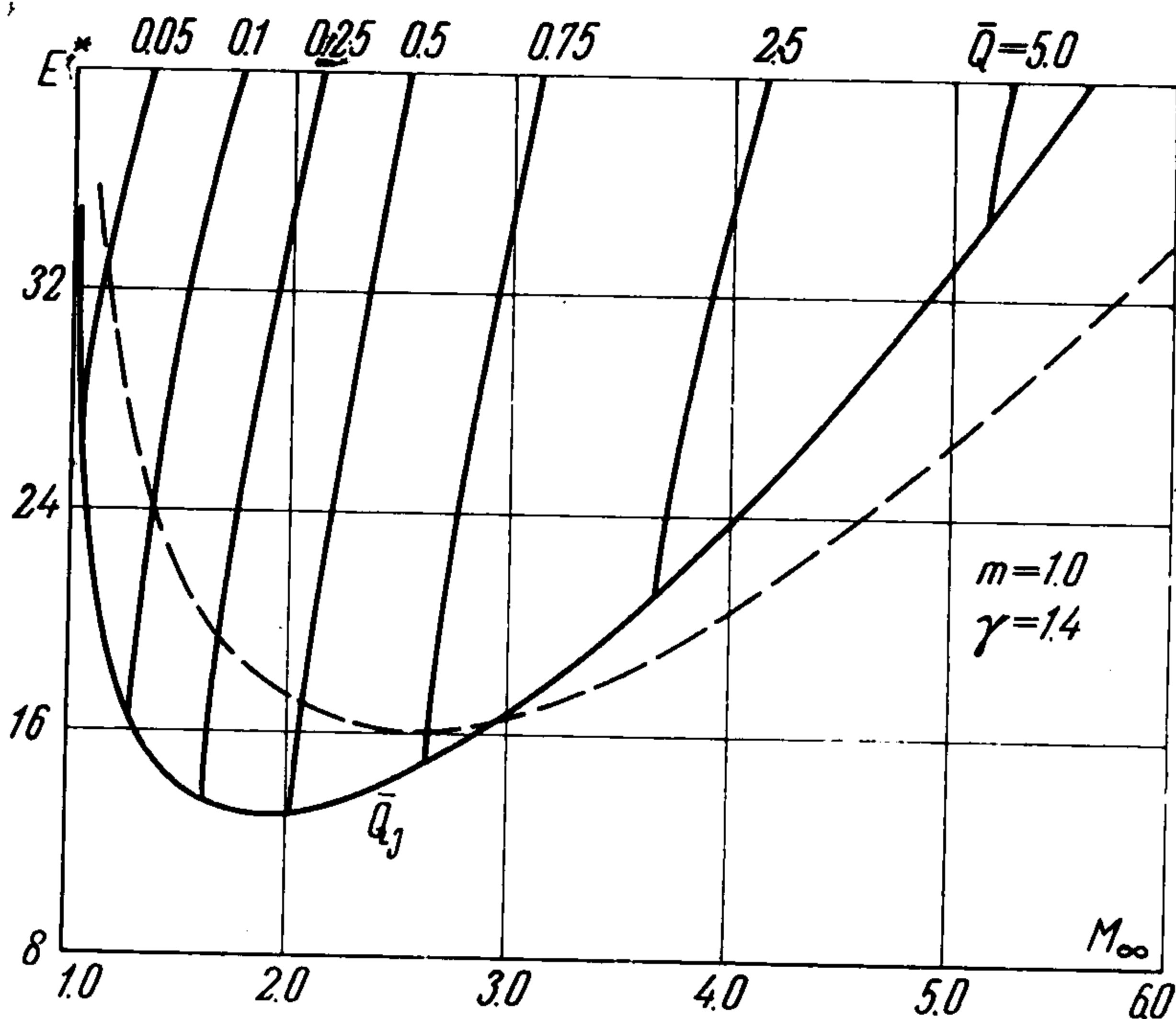
$$F_{f,t} = \lambda' F_{f,t-\delta_1} + \lambda'' F_{f,t-\delta_2} + \lambda''' v_{10} \tau_0 F_{f,t-\delta_2}' + K \Delta F_{f,t} \quad (14)$$

где величины  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$ ,  $K$  суть дробно-линейные функции  $m'$  и  $n$  с коэффициентами, известным образом зависящими от параметров невозмущенного потока. Для простоты приведем выражения этих величин только для случая  $\Delta \ll 1$ , т. е. для режимов детонации, близких к режиму Чепмена — Жуге

$$\lambda' = \frac{1 + M_{10}^2 - (\gamma - 1) M_{10} - (1 + M_{10}^2) b_2}{1 + M_{10}^2 + (\gamma - 1) M_{10} - (1 + M_{10}^2) b_1} \lambda, \quad \lambda'' = \frac{(\kappa - b_1' + \lambda b_2)(1 + M_{10}^2) - \sigma}{1 + M_{10}^2 + (\gamma - 1) M_{10} - (1 + M_{10}^2) b_1}$$

$$\lambda''' = \frac{\sigma(1 + M_{10}^2)(M_{10}^{-1} - 1)n}{1 + M_{10}^2 + (\gamma - 1) M_{10} - (1 + M_{10}^2) b_1}$$

$$K = \frac{(1 + \gamma M_{10}^2)^2}{(\gamma + 1)(1 - M_{10}^2)[1 + M_{10}^2 + (\gamma - 1) M_{10} - (1 + M_{10}^2) b_1]}$$



Фиг. 3

Как и должно быть, все эти величины неограниченно возрастают при приближении к границе устойчивости по работе [4]. В рассматриваемом предельном случае эта граница определяется формулой

$$\mu = \frac{\gamma + M_{10}^2}{(1 + M_{10}^2)(1 - M_{10})}$$

На фиг. 3 ей соответствует граничная кривая  $\bar{Q} = \bar{Q}_J$  или  $\Delta = 0$ .

Напомним, что уравнение (14) с коэффициентами, определенными формулами (15), справедливо лишь в предположении, что  $F \ll \Delta^2$ ; отсюда следует, что для падающего возмущения  $F_*$  должно быть выполнено условие  $F_* \ll \Delta$ .

Однако при малых  $\Delta$  представляет интерес рассмотрение падающих возмущений именно порядка  $\Delta$ . В частности, такой порядок должно иметь ослабляющее волну детонации возмущение при анализе перехода слабо пересжатой детонационной волны к режиму Чепмена — Жуге.

Возвратимся к соотношениям (12) и рассмотрим теперь случай, когда падающее на фронт тепловыделения возмущение имеет порядок  $\Delta$ . Из первого условия (12) вытекает, что  $c_f / v_{10}$  и  $F$  (а следовательно, в рассматриваемой задаче — и функции  $G$  и  $H$ ) должны иметь при этом порядок  $\Delta^2$ . Пренебрегая членами более высокого порядка, из первого условия (12) получаем

$$v - v_J = - \left\{ v_J^2 \Delta^2 + 2v_{10}^2 \left( \frac{1}{M_{10}^2} - 1 \right) \left[ \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} \right) c - \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} + \frac{\gamma - 1}{M_{10}^2} \right) F - \left( 1 + \frac{1}{M_{10}^2} - \frac{\gamma - 1}{M_{10}^2} \right) G - \frac{1}{M_{10}^2} H \right]^{1/2} \right. \quad (15)$$

В соответствии с результатами работы [1] (или после непосредственной подстановки этого выражения для  $v$  в остальные два условия (12)) заключаем, что за фронтом тепловыделения возмущения, имеющие порядок  $\Delta$ , представляют собой подходящую к фронту тепловыделения простую волну; отходящие же от фронта назад возмущения имеют порядок  $\Delta^2$ .

Таким образом, левую часть выражения (15) нужно считать заданной, вследствие чего это условие при подходящих к волне возмущениях порядка  $\Delta$  заменяет условие (13), справедливое тогда, когда подходящие возмущения имеют более высокий порядок.

Легко видеть, что условие (13) в предельном случае малых  $\Delta$  и условие (15) отличаются лишь членами, характеризующими подходящие к фронту сзади возмущения. Таким образом, в рассматриваемом случае можно по-прежнему пользоваться уравнением (14) с теми же значениями коэффициентов  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$ , но, заменив в его последнем слагаемом величину  $\Delta F_{*f,t}$  величиной

$$\frac{1}{2(\gamma + 1)} \left[ \Delta^2 - (\gamma + 1)^2 \frac{(v_J - v)^2}{v_J^2} \right] \quad (16)$$

Итак, рассмотрим подходящую к фронту тепловыделения сзади невозмущенную простую волну. Формулы для описания такой волны

$$r = (v - a)t + \Phi(v), \quad v + \frac{2a}{\gamma - 1} = \text{const}$$

в рассматриваемом приближении можно заменить следующими:

$$r = \frac{\gamma + 1}{2} (v - v_J)t + \Phi(v), \quad v + \frac{2a}{\gamma - 1} = v_J + \frac{2a_J}{\gamma - 1}$$

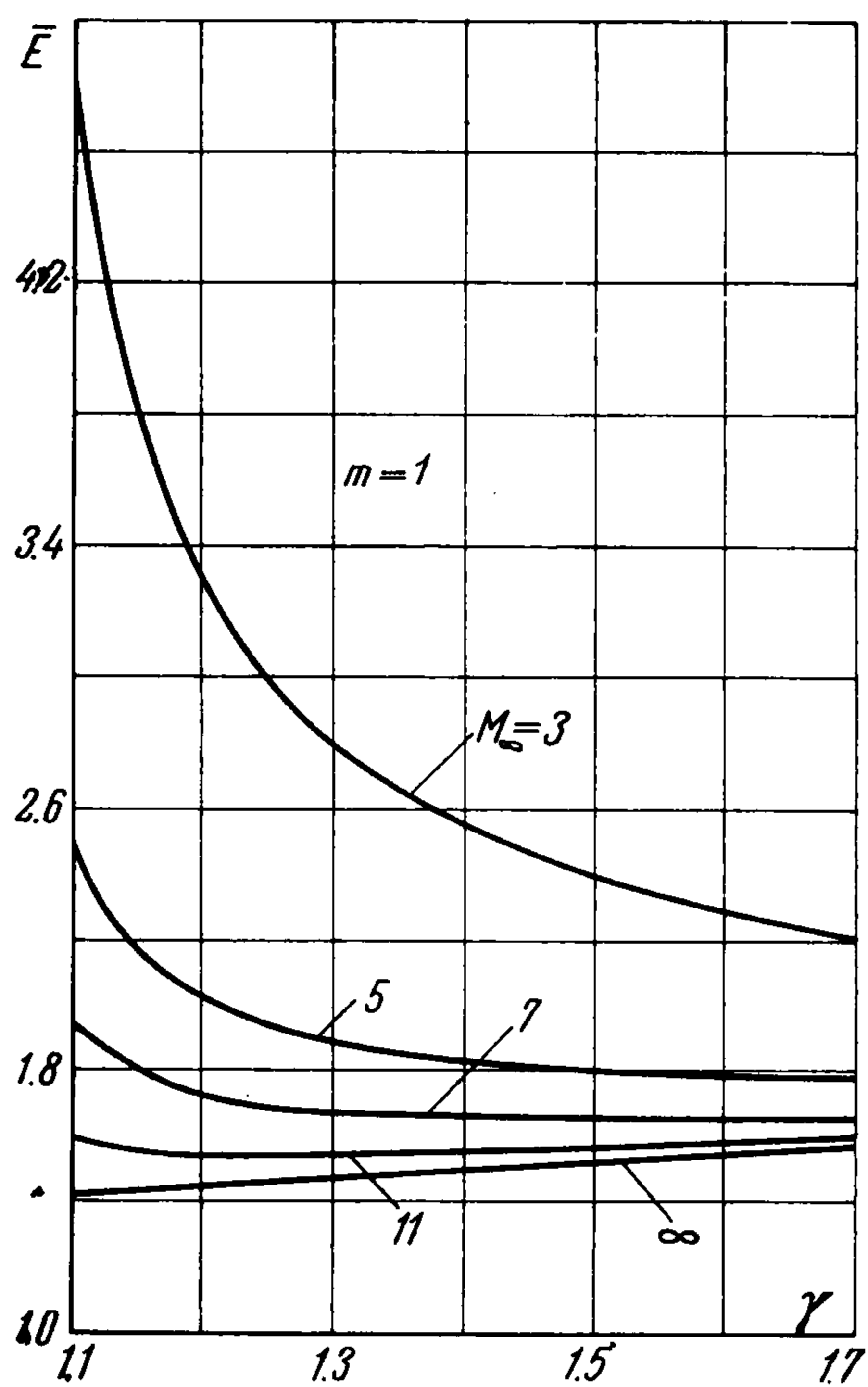
Если функция  $\Phi(v)$  имеет конечную производную при  $v = v_J$ , то с сохранением той же точности имеем

$$r - r_0 = \frac{\gamma + 1}{2} (v - v_J) (t - t_0) \quad \left( r_0 = \Phi(v_J), \quad t_0 = -\frac{2}{\gamma + 1} \Phi'(v_J) \right) \quad (17)$$

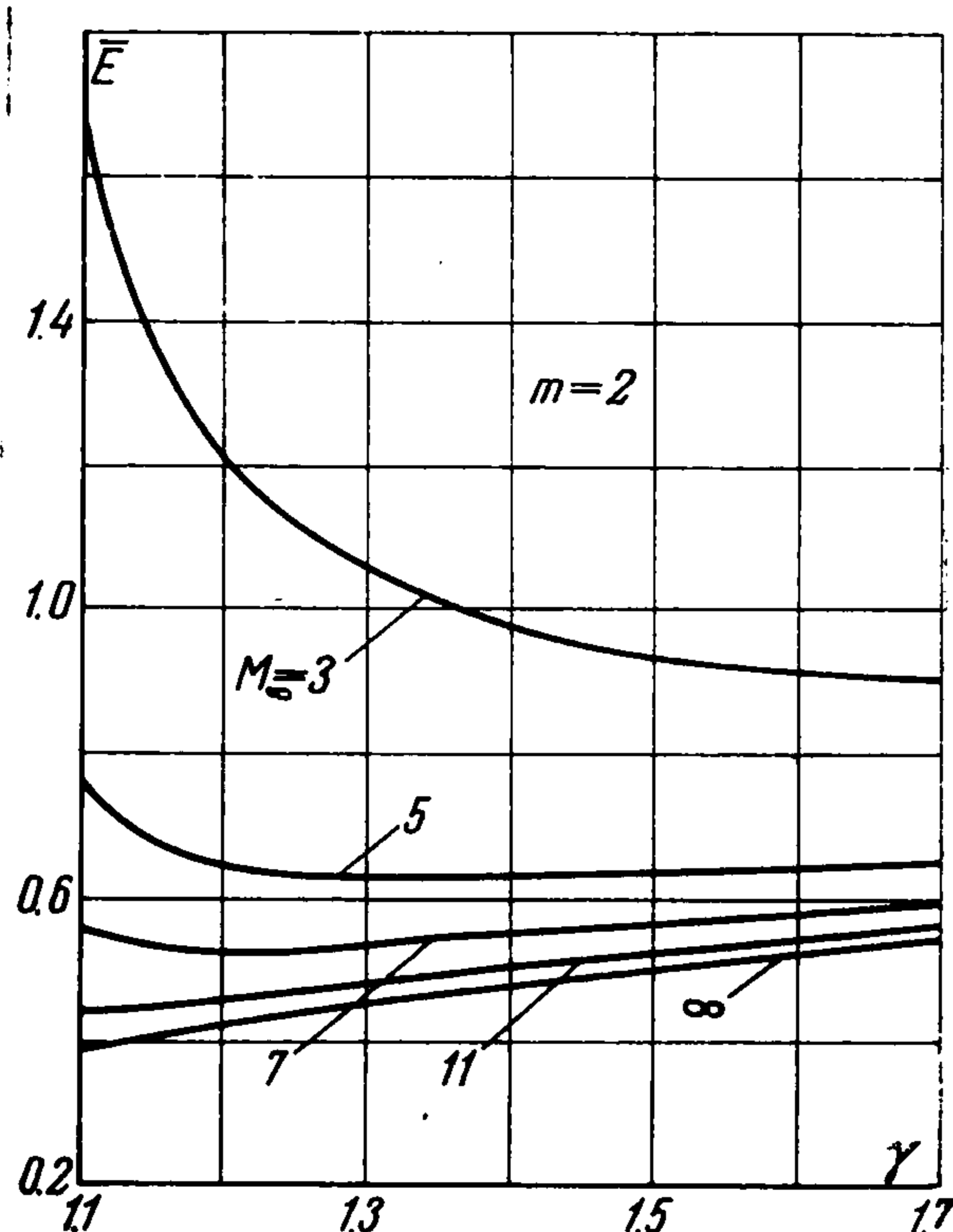
т. е. волну можно считать центрированной. Беря из формулы (17) значение  $v - v_J$  при  $r = v_{10}\tau_0$ , придадим выражению (16) следующий вид:

$$\frac{\Delta^2}{2(\gamma + 1)} \left[ 1 - \left( \frac{t_0}{t - t_0} \right)^2 \right] \quad (18)$$

Уравнение (14) после подстановки в него вместо  $\Delta F_{*f,t}$  выражения (18) позволяет без труда найти функцию  $F$ , а вместе с ней и другие искомые функции, в полосе между двумя фронтами последовательно в каждой из областей, отделенных одна от другой ха-



Фиг. 4



Фиг. 5

рактеристиками разных семейств. Величину возмущений потока за фронтом тепловыделения, наложенных на подходящую к нему простую волну и имеющих порядок  $\Delta^2$ , можно при необходимости определить из условий (12).

Изучим асимптотическое поведение решения уравнения (14) при  $t \rightarrow \infty$ , полагая

$$F_{f,t} = \Delta^2 (c + c_1 e^{zt/\tau_0}) \quad (z = \beta + i\Omega)$$

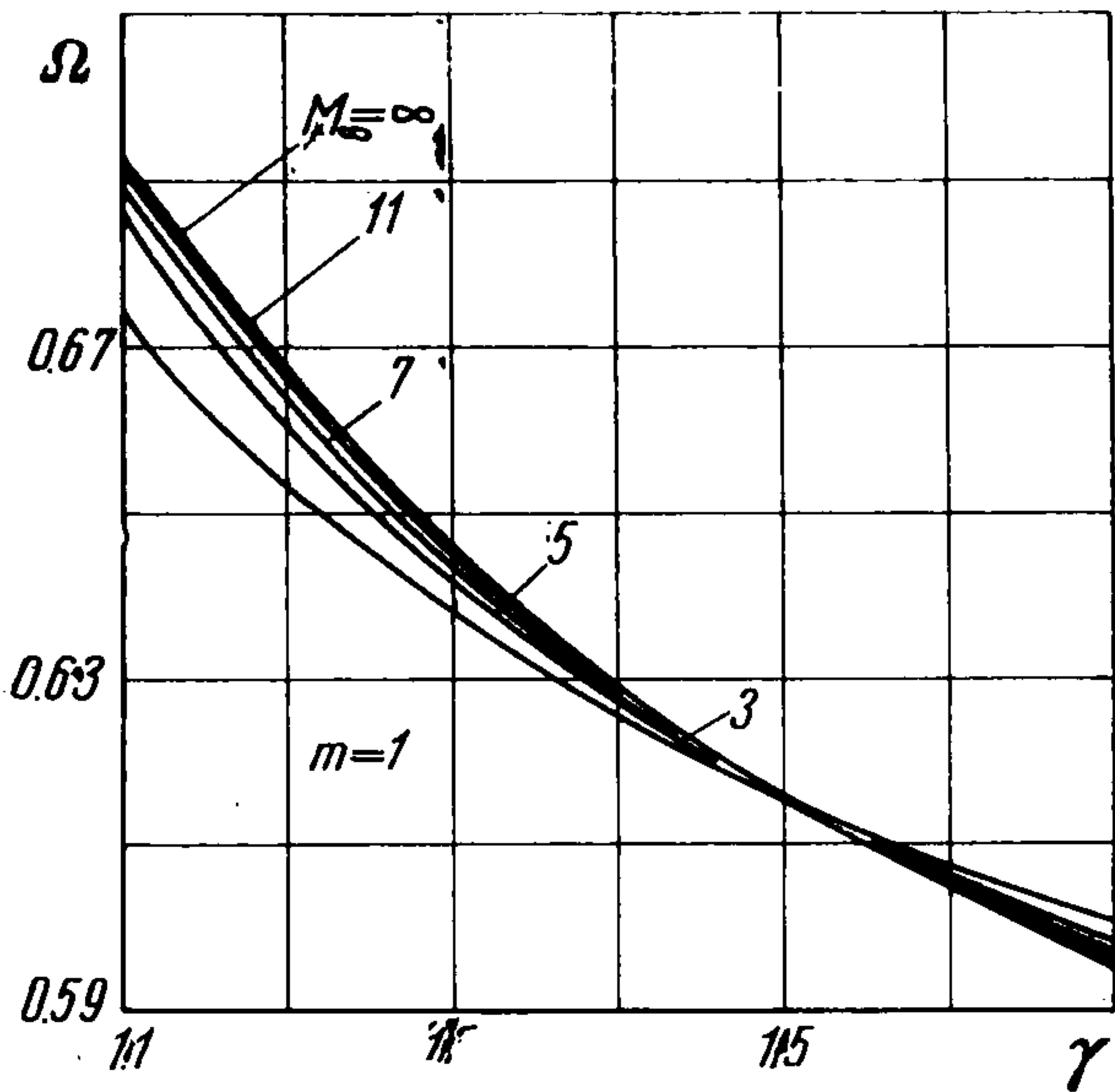
Здесь  $\beta$  и  $\Omega$  — действительные числа. После подстановки этого выражения в уравнение (14) найдем

$$c = \frac{k}{2(\gamma + 1)(1 - \lambda' - \lambda'')}$$

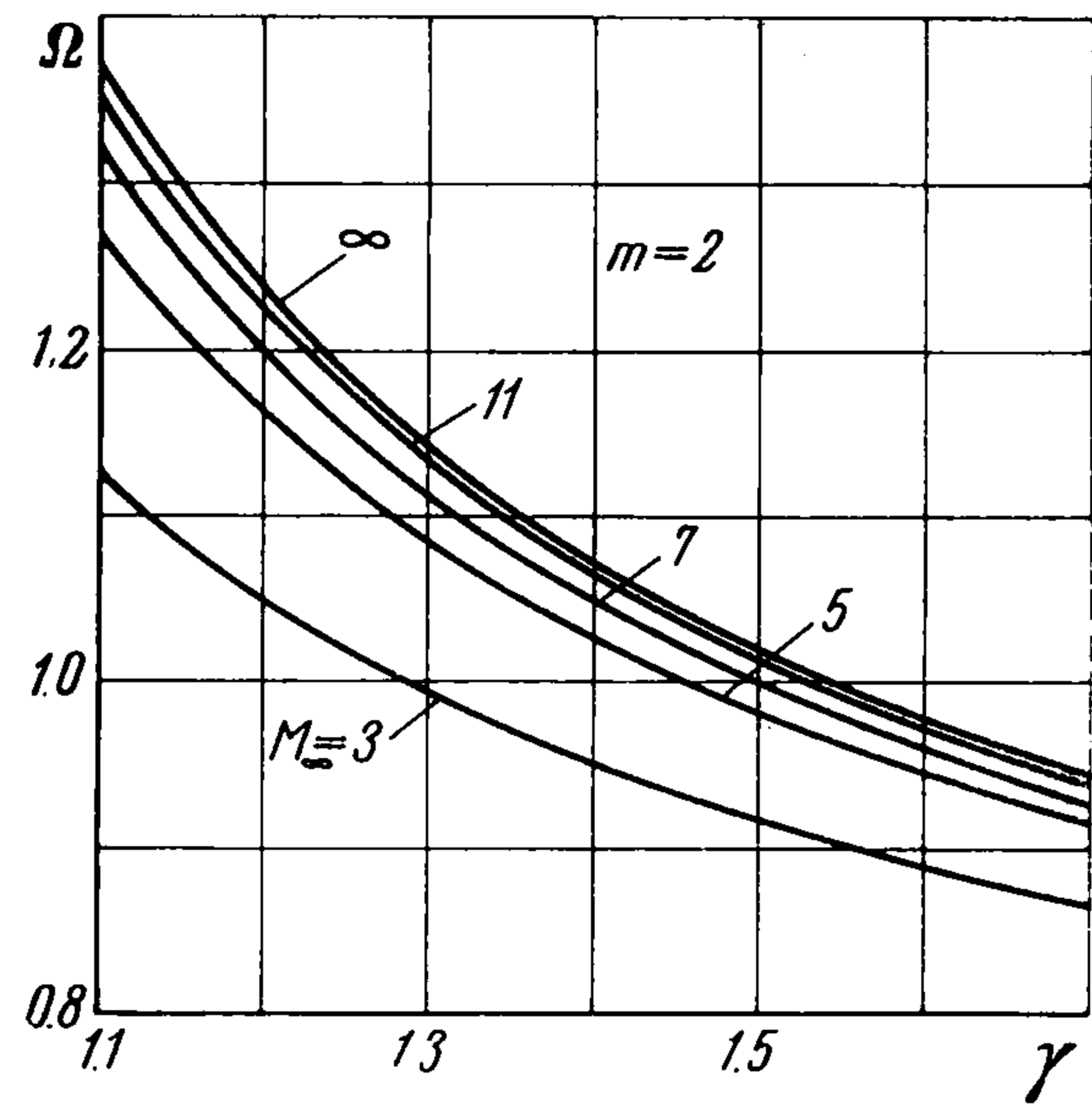
Отсюда после некоторых преобразований получаем

$$\frac{(c_f)_\infty}{v_\infty} = \frac{(1 + \gamma M_\infty^2)^2}{2(\gamma + 1)^2(M_\infty^2 + 1)(M_\infty^2 - 1)} \Delta^2 \quad (19)$$

Из первого соотношения (2) и из определения величины  $\Delta$  легко установить, что найденная согласно этой формуле скорость волны детонации соответствует режиму Чепмена — Жуге.



Фиг. 6

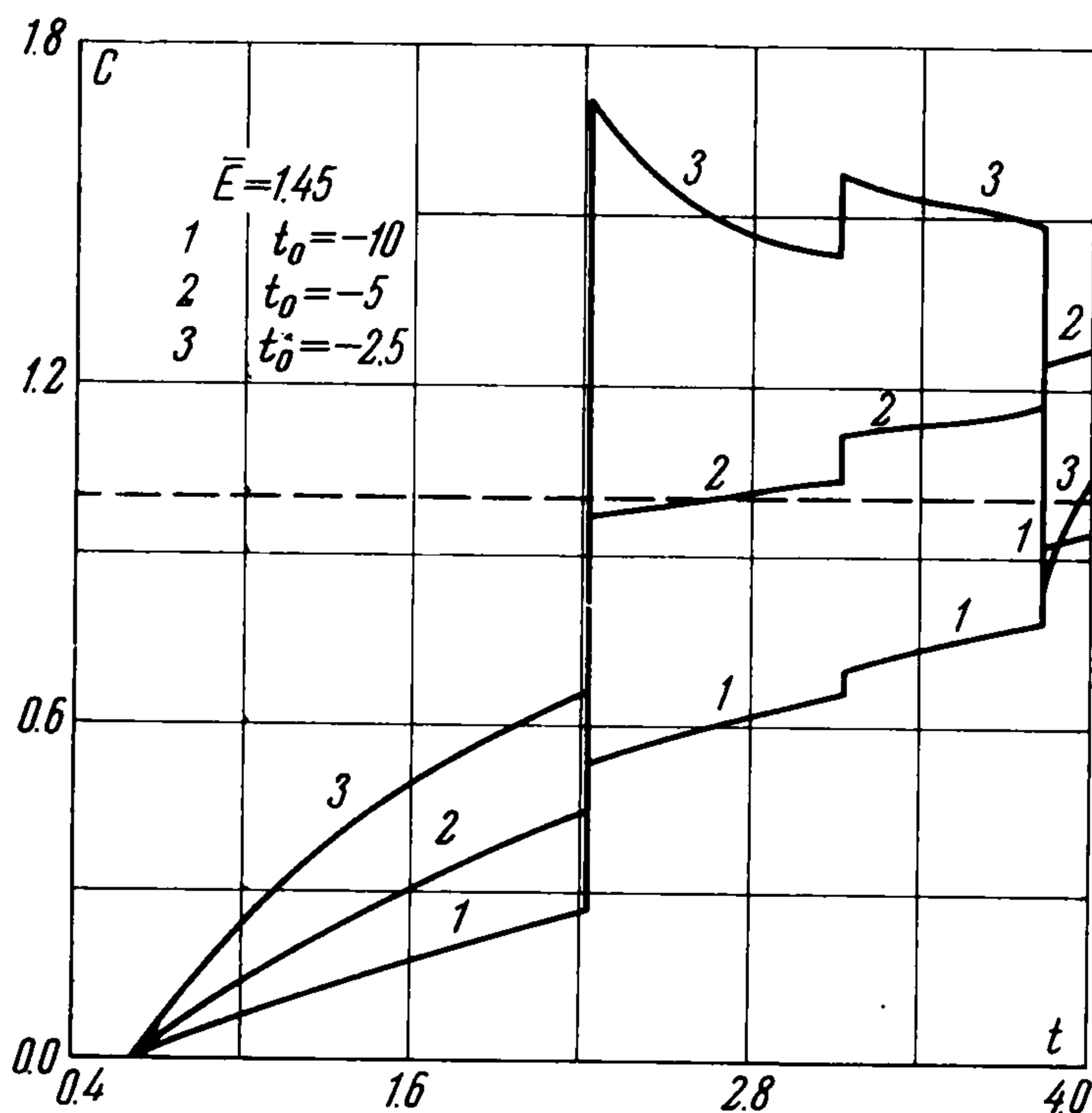


Фиг. 7

В решении однородного уравнения для  $F$  комплексная константа  $z$  должна удовлетворять условию

$$\lambda' \exp \frac{-\delta_1 z}{\tau_0} + \left( \lambda'' + \frac{M_{10}}{1 - M_{10}} \lambda''' z \right) \exp \frac{-\delta_2 z}{\tau_0} - 1 = 0$$

Для устойчивости решения все нули левой части этого равенства должны лежать слева от мнимой оси плоскости комплексной переменной  $z$ .



Фиг. 8

На фиг. 4 и 5 приведена граница устойчивости в виде зависимости  $E/RT_{10}$  на этой границе от  $\gamma$  и  $M_\infty$ ; на фиг. 6 и 7 даны соответствующие значения частоты нейтральных колебаний  $\Omega$ . Граница устойчивости в виде зависимости граничных значений  $E/RT_\infty$  от  $M_\infty$  при  $\gamma = 1.4$  на несена также пунктиром на фиг. 3. Из приведенных данных следует, что потеря устойчивости по линейному механизму при больших  $M_\infty$  наступает при меньшей энергии активации, чем по нелинейному. Иными словами, если [при некоторых значениях энергии активации и величины тепловыделения волна детонации устойчива, то при постепенном ее ослаблении она либо остается устойчивой, либо теряет устойчивость сначала по линейному механизму.

Отметим еще раз, что вопрос об ослаблении волны детонации с двухфронтной структурой подходящей к ней сзади волной разрежения и о переходе детонации к режиму Чепмена — Жуге рассматривался ранее в работе [3]. В этой работе условия (3) — (5)

записаны в приближенной форме

$$r_f = r_s + (v_s - c_s)\tau, \quad \tau = \frac{k}{p_s^{m-1}} \exp \frac{E}{RT_s}$$

где все величины относятся к одному и тому же моменту времени  $t$ . Значения параметров газа за адиабатическим скачком и перед фронтом тепловыделения считались одинаковыми для одного и того же  $t$ . В этих предположениях при взаимодействии с достаточно сильной волной Римана детонация выходит на режим Чепмена — Жуге. Однако этот режим устойчив по отношению к малым возмущениям начальных условий (возмущения плавно затухают по экспоненциальному закону) лишь при (для  $M_\infty = \infty$ )

$$\frac{E}{RT_{10}} < \frac{2\gamma}{3\gamma - 1} + m - 1 \quad (20)$$

В противном случае возмущения экспоненциально растут со временем.

Отметим, что в приближении работы [3] не учитывается, в частности, волновой характер нарастания возмущений при потере устойчивости.

Покажем в заключение, что согласно результатам данного исследования и в области устойчивости взаимодействие волны детонации двухфронтной структуры с подходящей к ней сзади волной разрежения с монотонно изменяющимися параметрами может приводить к возникновению колебаний в потоке. Для этого используем уравнение (14). Заменим в нем величину  $\Delta F_{*f,t}$  выражением (18) и перейдем от функции  $F$  к функции  $c_s$ , причем в качестве единицы времени возьмем  $\tau_0$ , а  $c_s$  отнесем к скорости волны Чепмена — Жуге. В результате получим уравнение

$$c_t = \lambda' c_{t-\delta_1} + \lambda'' c_{t-\delta_2} + \lambda''' \frac{M_{10}}{1-M_{10}} c'_{t-\delta_2} + (1 - \lambda' - \lambda'') \left[ 1 - \left( \frac{t_0}{t - \delta_0 - t_0} \right)^2 \right]$$

$$\delta_0 = \frac{M_{10}}{1-M_{10}} \tau_0 \quad (\delta_0 \text{ — размерная величина}).$$

На фиг. 8 и 9 приведены некоторые результаты расчетов скорости адиабатического скачка при разных значениях параметра  $t_0$ , характеризующего интенсивность подходящей к фронту горения волны разрежения.

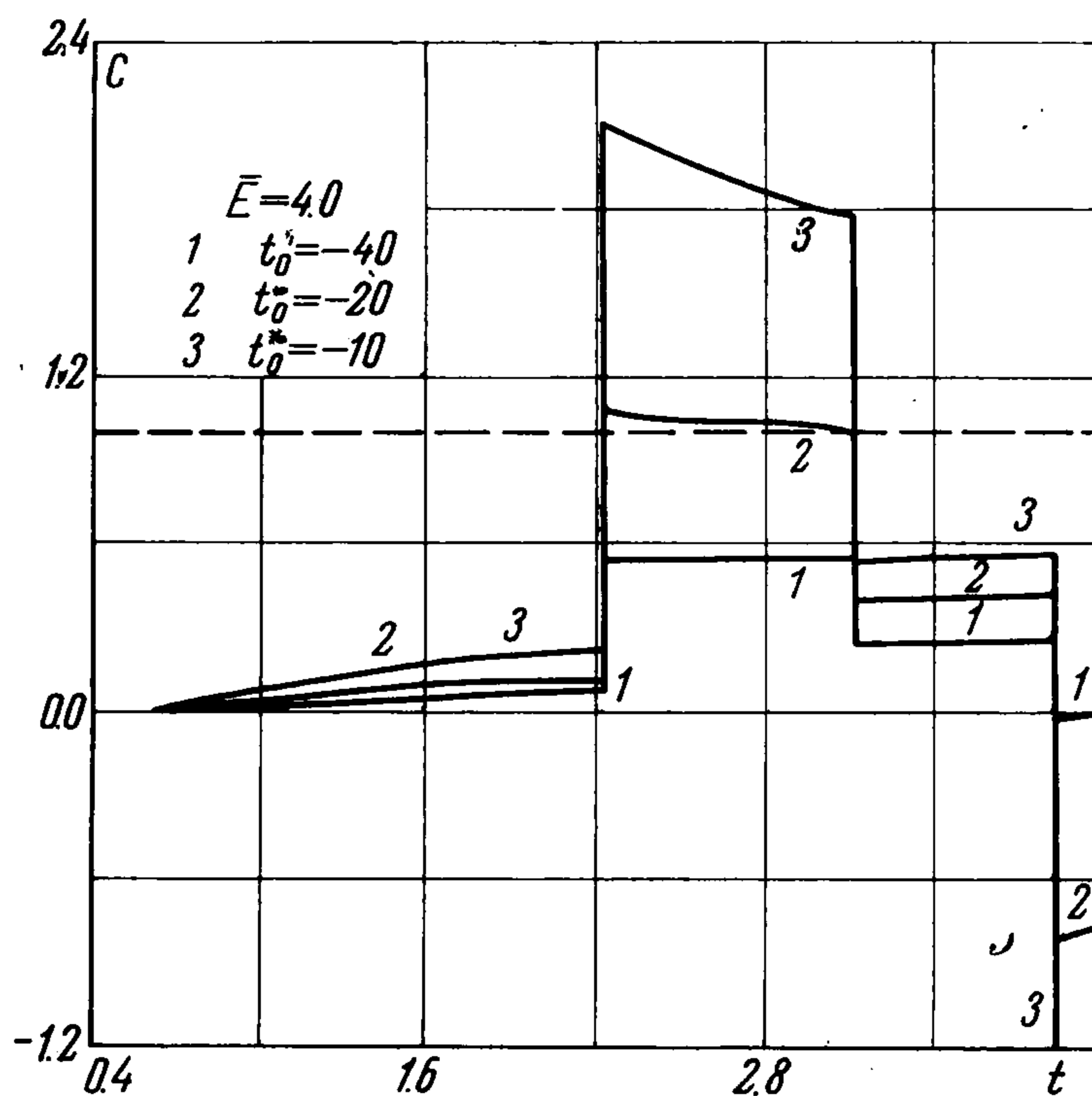
Полученные в предлагаемой работе выводы находятся в согласии с результатами численного решения нелинейной задачи, выполненного в работе [6].

Поступила 11 II 1969

Институт механики Московского государственного университета

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Асимптотический закон распространения плоской детонационной волны. Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 3.
2. Левин В. А., Черный Г. Г. Асимптотические законы поведения детонационных волн. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
3. Левин В. А. О переходе плоской пересжатой детонационной волны к режиму Чепмена — Жуге. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.
4. Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б. Одномерная неустойчивость и затухание детонации. ПМТФ, 1963, № 6.
5. Ильяева Л. А., Попов Н. А. Гидродинамические решения для одномерных возмущений неустойчивой детонационной волны. Физика горения и взрыва, 1965, № 3.
6. Медведев С. А. Об ослаблении пересжатых детонационных волн с конечной скоростью реакции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.



Фиг. 9