Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ СИЛЬНО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан

(Воронеж, Ханой, ДРВ)

В работе [1] авторами доказана теорема существования решения задачи Коши для линеаризованных уравнений, отвечающих задаче о движении вокруг неподвижной точки твердого тела, имеющего полость, частично заполненную вязкой несжимаемой жидкостью. Если число Рейнольдса мало (сильно вязкая жидкость), то уравнения содержат малый параметр $\varepsilon = \nu^{-1}$ и к решению системы уравнений Навье—Стокса можно применить асимптотический метод Крылова — Боголюбова в форме, изложенной в книге [2]. Здесь выводятся формулы для соответствующих приближенных решений. Случай, когда сильно вязкая жидкость целиком заполняет полость сосуда, исследован Ф. Л. Черноусько [3,4].

1. Постановка задачи. Предположим, что тело, имеющее полость, частично заполненную вязкой несжимаемой жидкостью, совершает заданное движение вокруг неподвижной точки с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Требуется определить движение жидкости в сосуде. В линеаризованной постановке эта задача сводится к решению системы уравнений Навье—Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} = -\nabla q + \nu \Delta \mathbf{u}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

в области Ω, заполненной жидкостью в положении равновесия, при заданных граничных условиях:

на части Γ_1 границы области Ω, отвечающей стенке полости

$$\mathbf{u} = 0 \tag{1.2}$$

на свободной поверхности Γ_0 жидкости

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(q - 2\nu \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = g u_z \tag{1.3}$$

и начальных условиях

$$\mathbf{u}\,|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad q\,|_{t=0} = q_0 \qquad \left(q = \frac{p}{\rho} - gz + C\right) \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор относительной скорости жидкости, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор относительно неподвижной точки, p — давление, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости, C — константа.

Естественно предполагать, что при большой вязкости движение жидкости будет слагаться из трех частей: вынужденное движение, поддерживаемое силами, обусловливающими заданное движение тела; быстро затухающее движение, связанное с начальным распределением скоростей; медленно затухающее движение, связанное с начальным положением свободной поверхности.

Асимптотический метод, излагаемый ниже, позволяет произвести расщепление решения рассматриваемой задачи на указанные три части.

2. Асимптотический метод решения. В банаховом пространстве рассматривается дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(t)\, x + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t) \tag{2.1}$$

Здесь A — неограниченный производящий оператор сжимающей полугруппы; операторы B_k ограничены, функции f_k заданы. Уравнение (2.1) имеет некоторые отличия от уравнений, рассмотренных в [2], поэтому коротко повторим вывод асимптотических разложений для его решений.

При нахождении этих асимптотических разложений по степеням малого параметра ε существенно различными будут случаи, когда оператор A имеет ограниченный обратный и когда не имеет.

1) Пусть оператор A^{-1} ограничен. Тогда решения однородного уравнения (2.1) будут быстро затухающими функциями от t, а частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде

$$x(t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + \varepsilon^2 h_2(t) + \ldots \tag{2.2}$$

Подстановка (2.2) в (2.1) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε приводят к формулам

$$h_0 = A^{-1} f_0, \quad h_{k+1} = A^{-1}\left(\frac{dh_k}{dt} - f_{k+1} - \sum_{i=0}^{k} B_i h_{k-i}\right) \tag{2.3}$$

Решение $x(t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + \ldots + \varepsilon^N h_N(t)$ будет отличаться [2] от некоторого частного решения уравнения (2.1) на величину порядка ε^{N+1}.

2) Случай, когда оператор A не имеет ограниченного обратного, значительно сложнее. Предположим, что число 0 есть изолированная точка спектра оператора A, тогда все пространство E можно разложить в прямую сумму двух инвариантных относительно оператора A подпространств $E = E_1 + E_2$ так, что спектр сужения оператора A на E_1 лежит внутри левой полуплоскости, а спектр его сужения на E_2 состоит только из нуля. На подпространстве E_1 оператор A имеет ограниченный обратный.

В рассматриваемом случае однородное уравнение

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon Bx \qquad \left(B = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k\right) \tag{2.4}$$

будет уже иметь как быстро затухающие решения, так и медленно меняющиеся со времени решения. Для расщепления этих двух видов решений применяется аналог метода Крылова — Боголюбова.

Обозначим через P_1 и P_2 проекционные операторы на подпространства E_1 и E_2, отвечающие разложению $E = E_1 + E_2$. Решения $x(t)$ представляются в виде $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, где $x_1(t)$ — быстро убывающая, а $x_2(t)$ — медленно изменяющаяся части решения.

Функции строятся по формулам

$$x_i(t) = Y_i(t)U_i(t)P_i x_0 \tag{2.5}$$

где U_i — оператор, удовлетворяющий уравнению

$$\varepsilon \frac{dU_i}{dt} = AP_i U_i + \varepsilon S_i U_i, \quad U_i(0) = P_i \tag{2.6}$$

Подстановка (2.5) в уравнение (2.4) с учетом (2.6) приводит к уравнению для Y_i

$$\varepsilon \frac{dY_i}{dt} P_i = AY_i P_i - Y_i AP_i - \varepsilon Y_i S_i P_i + \varepsilon BY_i P_i \tag{2.7}$$

Теперь операторы S_i и Y_i ищутся в виде рядов

$$S_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k S_i^k, \qquad Y_i = P_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k Y_i^k \tag{2.8}$$

Подстановка (2.8) в уравнение (2.7) приводит к системе уравнений для определения коэффициентов разложений

$$\begin{gathered}\frac{dY_i^k}{dt} P_i = AY_i^{k+1} P_i - Y_i^{k+1} AP_i - P_i S_i^k P_i - \\ - \sum_{j=1}^{k} Y_i^j S_i^{k-j} P_i + \sum_{j=0}^{k} B_{k-j} Y_i^j P_i\end{gathered} \tag{2.9}$$

Предположим, что операторы $Y_i^1, \ldots, Y_i^k$ и $S_i^0, \ldots, S_i^{k-1}$ уже найдены и причем так, что

$$Y_i^j = (I - P_i) Y_i^j P_i \quad (j = 1, \ldots, k), \qquad S_i^j = P_i S_i^j P_i \quad (j = 1, \ldots, k-1)$$

Попытаемся тогда найти из уравнения (2.9) операторы Y_i^{k+1} и S_i^k так, чтобы

$$Y_i^{k+1} = (I - P_i) Y_i^{k+1} P_i, \qquad S_i^k = P_i S_i^k P_i$$

Применяя к уравнению (2.9) оператор P_i, вычисляем

$$S_i^k = \sum_{j=0}^{k} P_i B_{k-j} Y_i^j P_i \tag{2.10}$$

Применяя к (2.9) оператор $I - P_i$, получаем

$$\begin{gathered}(I - P_i) AY_i^{k+1} - Y_i^{k+1} AP_i = \frac{dY_i^k}{dt} P_i + \\ + \sum_{j=1}^{k} Y_i^j S_i^{k-j} P_i - \sum_{j=0}^{k} (I - P_i) B_{k-j} Y_i^j P_i\end{gathered} \tag{2.11}$$

В силу общей теории (см. например [2], гл. IV, лемма 3.1) полученное уравнение разрешимо. Нетрудно видеть, что когда операторы B_k постоянны, то Y_i^k также не зависят от t.

Таким образом, задача о нахождении N-го приближения к функции $x_i(t)$ сводится к последовательному решению операторных уравнений вида (2.10) и (2.11), а затем к решению дифференциального уравнения

$$\varepsilon \frac{dU_i^N}{dt} = AP_iU_i^N + \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j S_i^j U_i^N, \qquad U_i^N(0) = P_i$$

Тогда

$$x_i^N(t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j Y_i^j U_i^N P_i x_0 \tag{2.12}$$

Это решение не удовлетворяет, вообще говоря, начальному условию $x_i(0) = P_i x_0$. Действительно

$$x_i^N(0) = P_i x_0 + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j Y_i^j(0) P_i x_0$$

Отметим, что вся невязка в начальном условии принадлежит подпространству, дополнительному к E_i. В [2] описан метод последовательного исключения невязки, который ниже применяется в конкретном случае.

Частные решения неоднородного уравнения будем искать в виде

$$x^*(t) = Y_2 v_2(t) + h(t)$$

где $h(t)$ принимает значение из E_1, а $v_2(t)$ есть решение уравнения

$$\varepsilon \frac{dv_2}{dt} = AP_2v_2 + \varepsilon S_2 v_2 + g$$

а g — некоторая вспомогательная функция со значениями в E_2.

Требуя, чтобы Y_2 и S_2 удовлетворяли снова уравнению (2.9) при $i = 2$, для h получаем уравнение

$$\varepsilon \frac{dh}{dt} = Ah + \varepsilon Bh + f - Y_2 g$$

Предполагая, что

$$f = f_0 + f_1\varepsilon + f_2\varepsilon^2 + \ldots, \quad B = B_0 + B_1\varepsilon + B_2\varepsilon^2 + \ldots$$

функции h и g ищем в виде разложений

$$h(t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + \varepsilon^2 h_2(t) + \ldots$$

$$g(t) = g_0(t) + \varepsilon g_1(t) + \varepsilon^2 g_2(t) + \ldots$$

Для коэффициентов разложений получаем систему уравнений

$$Ah_0 = P_2 g_0 - f_0$$

$$\frac{dh_k}{dt} = Ah_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}h_j + f_{k+1} - \sum_{j=0}^{k} Y_2^{k-j+1} g_j - P_2 g_{k+1}$$

Применяя к уравнениям этой системы операторы P_1 и $P_2 = I - P_1$, учитывая, что $P_2 h_j = 0$ и $P_1 g_j = 0$, находим,

$$g_0 = P_2 f_0, \qquad g_{k+1} = P_2 \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}h_j + P_2 f_{k+1} \tag{2.13}$$

$$h_0 = -A_1^{-1}P_1 f_0, \quad h_{k+1} = A_1^{-1}\left\{\frac{dh_k}{dt} - P_1\sum_{j=0}^{k} B_{k-j}h_j - P_1 f_{k+1} - P_1 \sum_{j=0}^{k} Y_2^{k-j+1} g_j\right\}$$

где A_1 — сужение оператора A на подпространстве E_1.

Таким образом, для нахождения N-го приближения к некоторому частному решению уравнения (2.1) нужно найти функции h_j и g_j из уравнения (2.13), а затем решить в подпространстве E_2 уравнение

$$\varepsilon \frac{dv_2^N}{dt} = AP_2v_2^N + \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^k S_2^k v_2^N + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k g_k \tag{2.14}$$

при каком-либо начальном условии (например, $v_2^N(0) = 0$), тогда формула

$$x^{*N}(t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j Y_2^j v_2^N(t) + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k h_k \tag{2.15}$$

и дает искомое N-е приближение. Заметим, что все слагаемые справа принадлежат пространству E_1 за исключением одного $P_2 v_2^N(t)$.

Сумма полученных приближенных решений (2.12), (2.15) удовлетворяет уравнению (2.1) с точностью до членов порядка ε^{N+1}. Как показано в [2], отсюда вытекает, что приближенное решение отличается от некоторого истинного решения на величину порядка ε^{N-1}, поэтому в выражениях (2.12) и (2.15) надежными будут лишь члены, содержащие ε в степени не выше $N - 2$.

3. Движение жидкости, целиком заполняющей полость. Если жидкость целиком заполняет полость, то система уравнений (1.1) — (1.4) упрощается: отпадают условия (1.3). Как показано в [5], полученную задачу можно трактовать как задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nu A\mathbf{u} + P\left(r \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right), \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{3.1}$$

в гильбертовом пространстве N—замыкание в $L_2(\Omega)$ множества всех гладких соленоидальных векторных полей, удовлетворяющих условию $\mathbf{u}_n \mid_{\Gamma_1} = 0$. Здесь P — оператор ортогонального проектирования из L_2 на N, A — положительно определенный самосопряженный оператор в N. В уравнении

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -A\mathbf{u} + \varepsilon P\left(\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) \qquad (\varepsilon = \nu^{-1}) \tag{3.2}$$

которое получается из (3.1) оператор A имеет ограниченный обратный, при этом осуществляются условия простого случая (1) и в силу (2.2) и (2.3) приближенное решение уравнения (3.2) будет иметь вид

$$\mathbf{u}^N = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \mathbf{h}_k(t), \qquad \mathbf{h}_0 = 0, \qquad \mathbf{h}_1 = A^{-1}P\left(\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)$$

$$\mathbf{h}_N = \left(-A^{-1}\frac{d}{dt}\right)^{N-1} A^{-1}P\left(\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) = -\left(-A^{-1}\frac{d}{dt}\right)^{N} P(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$$

Если ограничиться первым приближенным, то

$$\mathbf{u}^1 = \varepsilon A^{-1}P\left(\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) \tag{3.3}$$

Для нахождения оператора $\varepsilon A^{-1}P$ нужно решить задачу

$$\nu\Delta\mathbf{u} = -\nabla s + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times r\right], \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0 \tag{3.4}$$

Решение в виде (3.3) было найдено Ф. Л. Черноусько [3]. Там же показано, что решение (3.4) можно представить в виде суммы «обобщенных потенциалов Жуковского».

4. Движение жидкости, частично заполняющей полость. В этом случае уравнения задачи также записываются в операторной форме [1,6,7]

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\nu A\mathbf{u}+\Pi\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right)=0,\quad \nu\frac{d\mathbf{w}}{dt}+\mathbf{g}T\Gamma\mathbf{u}=0,\qquad \mathbf{u}=\mathbf{s}+\mathbf{w} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{w}$—функции со значениями в пространстве $W_2^{0'}(\Omega)$, являющемся замыканием в пространстве С. Л. Соболева $W_2^1(\Omega)$ совокупности соленоидальных векторных полей, обращающихся в нуль в окрестности части границы Γ_1. К описанию операторов A, Π, T, Γ вернемся ниже, а здесь лишь напомним, что оператор A снова будет положительно определенным самосопряженным. После замены

$$\mathbf{u}=A^{-1/2}\xi,\quad \mathbf{s}=A^{-1/2}\eta,\quad \mathbf{w}=A^{-1/2}\zeta,\quad \varepsilon=\nu^{-1},\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}\eta\\ \zeta\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

уравнение (4.1) можно представить в виде, аналогичном (2.1)

$$\varepsilon\frac{d\mathbf{X}}{dt}=A_0\mathbf{X}+\varepsilon^2B_1\mathbf{X}+\varepsilon f_1,\quad A_0=\begin{Vmatrix}-A & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\quad B_1=g\begin{Vmatrix}Q & Q\\ -Q & -Q\end{Vmatrix},\quad f_1=\begin{Vmatrix}\varphi\\ 0\end{Vmatrix}$$

$$\varphi=A^{1/2}\Pi\left(\mathbf{r}\times\frac{d\omega}{dt}\right),\qquad Q=A^{1/2}T\Gamma A^{-1/2} \tag{4.3}$$

Все пространство E векторов $\mathbf{X}$ естественно разлагается в прямую сумму пространств E_1 и E_2, состоящих соответственно из векторов вида $\{\eta, 0\}$ и $\{0, \zeta\}$. В первом из них оператор A_0 отрицательно определен и имеет ограниченный обратный

$$A_0^{-1}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-A^{-1}\eta\\ 0\end{pmatrix}\qquad (\mathbf{X}\in E_1)$$

Во втором подпространстве оператор A_0 тождественно равен нулю. В связи с этим проектирующие операторы P_1 и P_2 имеют вид

$$P_1=\begin{Vmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\qquad P_2=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{Vmatrix}$$

Ограничимся третьими приближениями к решению (4.3) по схеме п. 2. По формулам (2.10) и (2.11) находим

$Y_1^{(0)}=P_1,\ S_1^{(0)}=0;\ Y_1^{(1)}=0,\ S_1^{(1)}=P_1B_1P_1;\ Y_1^{(2)}=P_2B_1P_1,\ S_1^{(2)}=0;\ Y_1^{(3)}=0$

Подставляя матричное выражение операторов, получим

$$Y_1^{(0)}=P_1,\quad S_1^{(0)}=0;\qquad Y_1^{(1)}=0,\quad S_1^{(1)}=\begin{Vmatrix}gQ & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$$

$$Y_1^{(2)}=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ \mathbf{g}QA^{-1} & 0\end{Vmatrix},\quad S_1^{(2)}=0;\qquad Y_1^{(3)}=0$$

Аналогично вычисляем

$$Y_2^{(0)}=P_2,\quad S_2^{(0)}=0;\qquad Y_2^{(1)}=0,\quad S_2^{(1)}=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & -\mathbf{g}Q\end{Vmatrix}$$

$$Y_2^{(2)}=\begin{Vmatrix}0 & \mathbf{g}A^{-1}Q\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\quad S_2^{(2)}=0;\qquad Y_2^{(3)}=0$$

Дифференциальные уравнения (2.6) для операторов $U_1^{(3)}$ и $U_2^{(3)}$ примут вид

$$\varepsilon\frac{dU_i^{(3)}}{dt}=A_0P_iU_i^{(3)}+\varepsilon^2S_i^{(1)}U_i^{(3)},\qquad U_i^{(3)}(0)=P_i$$

или в подпространствах E_1 и E_2

$$\varepsilon\frac{dU_1^{(3)}}{dt}=-AU_1^{(3)}+\varepsilon^2gQU_1^{(3)},\qquad U_1^{(3)}(0)=I$$

$$\varepsilon\frac{dU_2^{(3)}}{dt}=-\varepsilon^{(2)}\mathbf{g}QU_2^{(3)},\qquad U_2^{(3)}(0)=I$$

Таким образом, основное дифференциальное уравнение расщепилось на два, из которых первое имеет быстрозатухающие решения, а второе — медленно меняющиеся со временем решения.

Для третьего приближения к решению однородного уравнения, отвечающего (4.3), получим

$$\mathbf{X}^{(3)} = \left\| \begin{matrix} U_1^{(3)}\eta_0 + \varepsilon^2 \mathbf{g} A^{-1} Q U_2^{(3)}\zeta_0 \\ U_2^{(3)}\zeta_0 + \varepsilon^2 \mathbf{g} Q A^{-1} U_1^{(3)}\eta_0 \end{matrix} \right\| \tag{4.4}$$

Для частного решения неоднородного уравнения находим из (2.13) и (2.14)

$$\mathbf{h}_0 = 0, \quad \mathbf{g}_0 = 0; \quad \mathbf{h}_1 = A^{-1}\mathbf{f}_1, \quad \mathbf{g}_1 = 0; \quad \mathbf{h}_2 = -A^{-2}\frac{d\mathbf{f}_1}{dt}, \quad \mathbf{g}_2 = 0$$

$$\mathbf{h}_3 = \left\| \begin{matrix} A^{-3}\dfrac{d\mathbf{f}_1}{dt} \\ 0 \end{matrix} \right\| + \mathbf{g} \left\| \begin{matrix} A^{-1}QA^{-1}\mathbf{f}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{g}_3 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -gQA^{-1}\mathbf{f}_1 \end{matrix} \right\|$$

Тогда получаем

$$\mathbf{X}^{*(3)} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{v}_1^{(3)} \\ \mathbf{v}_2^{(3)} \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{v}_1^{(3)} = \varepsilon^2 g A^{-1} Q \mathbf{v}_2^{(3)} + \varepsilon A^{-1/2}\Pi\left(\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) -$$

$$- \varepsilon^2 A^{-3/2}\Pi\left(\mathbf{r} \times \frac{d^2\omega}{dt^2}\right) + \varepsilon^3 A^{-5/2}\Pi\left(r \times \frac{d^3\boldsymbol{\omega}}{dt^3}\right) + \varepsilon^3 g A^{-1} Q A^{-1}\Pi\left(\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)$$

где $v_2^{(3)}$ будет решением дифференциального уравнения

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{v}_2^{(3)}}{dt} = -\varepsilon^2 \mathbf{g} Q \mathbf{v}_2^{(3)} - \varepsilon^3 \mathbf{g} Q A^{-1/2}\Pi\left(\mathbf{r} \times \frac{d\omega}{dt}\right), \qquad \mathbf{v}_2^{(3)}(0) = 0 \tag{4.5}$$

Оператор Q в этом уравнении будет неотрицательным самосопряженным оператором в пространстве $W_2^{0\prime}$ (см., например, [6,7]). Легко видеть, что он будет положительным в подпространстве E_2.

Сумма $\mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^{*3}$ будет давать третье приближение к некоторому решению неоднородного уравнения. Однако, как отмечалось выше, в нем надежными будут лишь члены, содержащие ε в степени не выше первой. Таким образом, для приближенного решения, отличающегося от точного на члены порядка ε^2, получим выражение

$$\left\| \begin{matrix} U_1^{(3)}\eta_0 + \varepsilon A^{-1/2}\Pi\left(\mathbf{r} \times \dfrac{d\omega}{dt}\right) \\ U_2^{(3)}\zeta_0 \end{matrix} \right\|$$

При этом учитывалось, что решение задачи (4.5) будет иметь порядок ε^2.

Полученное решение не удовлетворяет заданным начальным условиям. Действительно, при $t = 0$ его компоненты соответственно будут

$$\left(\eta_0 + \varepsilon A^{-1/2}\Pi\left(\mathbf{r} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_0\right)\right), 0$$

Поэтому из него нужно вычесть приближенное решение, удовлетворяющее однородному уравнению (4.3) с точностью до членов порядка ε^2 и принимающее начальное значение

$$\varepsilon \left\| \begin{matrix} A^{-1/2}\Pi\left(r \times \left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)_0\right) \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

Такое решение можно построить по формуле (4.4), заменяя $U_i^{(3)}$ на $U_i^{(2)}$, которые, впрочем, в рассматриваемом случае совпадают (так как $S_i^{(2)} = 0$). Оставив в этом решении снова лишь надежные члены, получим окончательную формулу для первого приближения к решению рассматриваемой задачи

$$\mathbf{X} = \left\| \begin{matrix} U_1^{(3)}\left(\eta_0 - \varepsilon A^{-1/2}\Pi\left(\mathbf{r} \times \left(\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_0\right)\right) + \varepsilon A^{-1/2}\Pi\left(\mathbf{r} \times \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) \\ U_2^{(3)}\zeta_0 \end{matrix} \right\|$$

Производя замену (4.2) и учитывая, что $\mathbf{u} = \mathbf{s} + \mathbf{w}$, находим

$$u = A^{-1/2}U_1^{(3)}\left(A^{1/2}\mathbf{s}_0 - \varepsilon A^{-1/2}\Pi\left(\mathbf{r}\times\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0\right)\right) + \varepsilon A^{-1}\Pi\left(\mathbf{r}\times\frac{d\omega}{dt}\right) + A^{-1/2}U_2^{(3)}A^{1/2}w_0 \quad (4.6)$$

Из этой формулы видно, что первое слагаемое описывает быстро затухающее движение, второе — вынужденное движение, третье — медленно затухающее движение. Если отбросить быстро затухающие члены, то

$$\mathbf{u} = A^{-1/2}U_2^{(3)}A^{1/2}\mathbf{w}_0 + \varepsilon A^{-1}\Pi\left(\mathbf{r}\times\frac{d\omega}{dt}\right) \quad (4.7)$$

Опишем процесс нахождения первого приближения [1, 6, 8.)].

Вынужденное движение. Решаем краевые задачи

$$-\nu\Delta\mathbf{s}_i + \nabla p_i = \mathbf{r}\times\mathbf{e}_i, \quad \operatorname{div}\mathbf{s}_i = 0, \quad \mathbf{s}_i = 0 \text{ на } \Gamma_1$$

$$\frac{\partial s_{iy}}{\partial z} + \frac{\partial s_{iz}}{\partial y} = 0, \frac{\partial s_{ix}}{\partial z} + \frac{\partial s_{iz}}{\partial x} = 0, \quad -p_i + 2\nu\frac{\partial s_{iz}}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_0$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ — орты осей.

Тогда относительная скорость вынужденного движения будет равна

$$\mathbf{u}_2 = \varepsilon_1\mathbf{s}_2 + \varepsilon_2\mathbf{s}_2 + \varepsilon_3\mathbf{s}_3$$

где ε_i — проекции углового ускорения тела на оси подвижной системы оси координат.

Если по смыслу задачи требуется разыскать давления, возникающие в жидкости, то необходимо решить краевые задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi_i = 0; \qquad \varphi_i = 0 \text{ на } \Gamma_1, \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = (r\times e_i) \quad \text{на } \Gamma_0$$

Тогда

$$\Pi\left(\mathbf{r}\times\frac{d\omega}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i\ (\mathbf{r}\times\mathbf{e}_i - \operatorname{grad}\varphi_i)$$

Для давления p получаем формулу

$$p = \rho g z + \rho[\varepsilon_1(p_1 - \varphi_1) + \varepsilon_2(p_2 - \varphi_2) + \varepsilon_3(p_3 - \varphi_3)]$$

Медленно затухающее движение. Операторная функция $V = A^{-1/2}U_2^{3}A^{1/2}$ будет решением уравнения

$$dV/dt = -\varepsilon g T\Gamma V, \qquad V(0) = I$$

Переходя к классическим терминам, получим следующее правило для нахождения решения. Требуется решить задачу

$$-\nu\Delta\mathbf{w} + \nabla p = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{w} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(-p + 2\nu\frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = -g w_z \quad \text{на } \Gamma_0$$

Тогда относительная скорость медленно затухающего движения равна

$$u_3 = w_0 + \int_0^t w\,dt$$

Свободные колебания. Если рассматривать задачу о свободных колебаниях сильно вязкой жидкости в неподвижном сосуде, то для получения нормальных колебаний, пропорциональных $e^{-\lambda t}$, можно использовать представление (4.7) при $\omega = 0$. Для медленных колебаний величина λ будет собственным числом самосопряженной задачи

$$-\nu\Delta\mathbf{w} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0; \quad \mathbf{w} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} = 0 \qquad \lambda\left(-p + 2\nu\frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = g w_z \quad \text{на } \Gamma_0$$

Если требуется определить скорость затухания быстрых движений, то нужно рассмотреть первый член в (4.6). Операторная функция $S = A^{-1/2}U_1^{(3)} A^{1/2}$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \frac{dS}{dt} = -AS + \varepsilon^2 g T\Gamma S, \qquad S(0) = I$$

С точностью до членов порядка ε^2 это уравнение можно заменить более простым

$$\varepsilon \frac{dS}{dt} = -AS$$

Для нормальных колебаний получим задачу

$$\nu A s = \lambda s$$

В классических терминах получаем самосопряженную задачу на собственные числа

$$-\nu\Delta \mathbf{s} + \Delta p = \lambda \mathbf{s}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{s} = 0, \qquad s = 0 \text{ на } \Gamma_1$$

$$\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = 0; \qquad -p + 2\nu \frac{\partial s_z}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_0$$

5. **Совместное движение тела и жидкости.** Уравнение момента количества движения для системы «тело + жидкость» имеет вид [1,9]

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \rho \int_{\Omega} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) d\Omega + \mathbf{M} = 0 \tag{5.1}$$

$$\mathbf{M} = mga\,(\delta_1\mathbf{e}_1 + \delta_2\mathbf{e}_2) + \rho g\,(k_1 \times \int_{\Gamma_0} rf d\Gamma_0) \tag{5.2}$$

Здесь m — масса системы, a — расстояние от центра массы системы до неподвижной точки, δ_i — компоненты вектора углового перемещения в подвижной системе координат, k_1 — орт подвижной оси Oz, $z = f(x, y, t)$ — уравнение свободной поверхности в подвижной системе координат.

Функция f при известной скорости движения находится по формуле

$$f(x, y, t) = \int_0^t u_z\, d\tau + f(x, y, 0) \tag{5.3}$$

Подставляя в равенство (5.1) — (5.3) выражение (4.6) для скорости $\mathbf{u}$, получим в первом приближении дифференциальное уравнение третьего порядка для нахождения компонент вектора углового перемещения тела.

Поступила 5 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Задача о малых движениях тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
3. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6, стр. 1049—1070.
4. Черноусько Ф. Л. Колебания твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
5. Крейн С. Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложение в гидромеханике. Усп. матем. н., 1957, т. 12 (73), вып. 1, стр. 208—211.
6. Крейн С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2, стр. 262—265.
7. Крейн С. Г., Лаптев Г. И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. Функц. анализ, 1968, т. 2, вып. 1, стр. 40—50.
8. Копачевский Н. Д. О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 1.
9. Черноусько Ф. Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, стр. 977—992.