Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ РАЗГОНЕ

О. А. Олейник

(Москва)

Задача о развитии пограничного слоя на теле, которое начинает двигаться в покоящейся вязкой несжимаемой жидкости, принадлежит к числу основных задач теории пограничного слоя.

Ниже при определенных естественных условиях доказаны существование и единственность решения этой задачи, построены по методу прямых приближенные решения и доказана их сходимость, получены асимптотические при $t \to 0$ разложения по степеням t с любым числом членов и оценкой остаточного члена для величины, определяющей сопротивление среды движущемуся телу, и некоторых других величин.

Развитие пограничного слоя при разгоне изучалось в работах Блазиуса [1], Гертлера [2] и др. Изложение этих работ имеется в книге [3].

Рассмотрим задачу о развитии пограничного слоя при разгоне для внешнего течения вида $U(t, x) = t^n U_1(t, x)$ при любом числе $n \geqslant 1$, где $U_1(t, x)$ либо не зависит от t, как в случае Блазиуса и Гертлера, рассматривавших целые n, либо $U_1(t, x)$ такова, что U_{1t} / U_1 — ограниченная функция.

Задача о развитии пограничного слоя на теле, которое начинает двигаться в покоящейся вязкой несжимаемой жидкости, при симметрическом течении приводит к рассмотрению системы уравнений

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \nu u_{yy}, \quad u_x + v_y = 0 \tag{1}$$

в области $D\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y < \infty\}$ с условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \ v|_{y=0} = v_0(t, x), \quad u \to U \text{ при } y \to \infty \tag{2}$$

Здесь

$$U_t + UU_x = -p_x, \quad U|_{x=0} = 0,\ U|_{t=0} = 0,\ U > 0 \quad \text{при } tx > 0$$

$$U = t^n U_1(t, x), \quad n \geqslant 1$$

Отношение U_{1t} / U_1 — функция ограниченная.

В работе [4] в случае $n = 1$ доказано, что решение задачи (1), (2) существует в предположении некоторой гладкости функций $U(t, x)$, $v_0(t, x)$ и единственно в области D при $t \leqslant t_1$, где $t_1 = \mathrm{const} > 0$ и зависит от U и v_0. Для функции u и ее производных выписаны первые члены разложения при $t \to 0$ по степеням t и дана оценка остаточного члена. Кроме того, доказана сходимость приближенных решений, полученных как решения некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к точному решению задачи (1), (2).

Ниже проводится аналогичное исследование для случая внешнего течения вида $U = t^n U_1(t, x)$ при любом $n \geqslant 1$. Кроме того, строится асимптотическое разложение при $t \to 0$ по степеням t с любым числом членов и оценкой остаточного члена для величины $u_y(t, x, 0)$, определяющей сопротивление среды движущемуся телу, и некоторых других величин.

В частности, в случае Гертлера ($U(t, x) = t^n U_1(x)$, $n \geqslant 1$, $v_0(t,x) \equiv 0$)

$$u_y|_{y=0} = U_1(x)\, t^{n-1/2} \sum_{i=0}^{q} Y_i(x, 0)\, t^{i(n+1)} + U_1(x)\, O(t^{n-1/2+(q+1)(n+1)})$$

где q — любое целое число, $Y_i(\xi, \eta)$, $i = 1, \ldots, q$ определяются последовательно как решения обыкновенных дифференциальных уравнений по η, зависящие от параметра ξ, причем Y_0 не зависит от ξ (см. уравнения (20) с условиями (21), (22)).

Совершенно аналогично может быть исследована задача о развитии пограничного слоя при разгоне для трехмерного осесимметрического течения, когда второе уравнение системы (1) заменено уравнением

$$(r(t, x)u)_x + (r(t, x)\, v)_y = 0$$

где $r(t, x)$ — заданная функция, определяющая обтекаемую поверхность, а также задача о продолжении пограничного слоя, когда вместо условия $u|_{x=0} = 0$ задан первоначальный профиль скорости

$$u|_{x=0} = u_1(t, y), \qquad u_1(t, y) > 0 \quad \text{при } t,y > 0$$

Для построения решения задачи (1), (2) используется метод, который применялся в работе [4] при изучении задачи (1), (2) в случае $n = 1$.

В системе (1) сделаем замену независимых переменных

$$\tau = t^{n-1/2}, \qquad \xi = x, \qquad \eta = \frac{u}{U} \tag{3}$$

и введем новую функцию

$$w = \frac{u_y t^n}{U} \tag{4}$$

Исключая v из системы (1), получим для w в области $\Omega\{0 \leqslant \tau \leqslant T^{n-1/2}$, $0 \leqslant \xi \leqslant X$, $0 \leqslant \eta < 1\}$ уравнение вида

$$\begin{gathered}\nu w^2 w_{\eta\eta} - \tau^3 (n - 1/2)\, w_\tau - \eta U \tau^{2N} w_\xi + n(\eta - 1)\, \tau^2 w_\eta + \\ + A_1 \tau^{2N} w_\eta + B_1 \tau^{2N} w = 0 \qquad \left(N = 1 + \frac{1}{2n-1}\right)\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$A_1 = (\eta^2 - 1)\, U_x + (\eta - 1)\, U_{1t} / U_1, \qquad B_1 = -\eta U_x - U_{1t} / U_1$$

с граничными условиями

$$w|_{\eta=1} = 0, \quad w|_{\tau=0} = 0, \quad (\nu w w_\eta - v_0 w \tau^N + n\tau^2 + C_1 \tau^{2N})|_{\eta=0} = 0 \tag{6}$$

где

$$C_1 = U_x + U_{1t} / U_1$$

Построим решение задачи (5), (6) для некоторого промежутка $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, $\tau_1 = \mathrm{const} > 0$, а затем, как следствие, получим решение задачи (1), (2).

Доказательство существования и единственности решения задачи (1), (2) при $n \geqslant 1$ проводится так же, как и для $n = 1$. Поэтому укажем лишь на возникающие при этом отличия.

Пусть $f^{m,k}(\eta) \equiv f(mh, kh, \eta)$ для любой функции $f(\tau, \xi, \eta)$, $h = \mathrm{const} > 0$. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ изменения η систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_{m,k}(w) \equiv \nu (w^{m,k})^2 w^{m,k}_{\eta\eta} - h^{-1}(mh)^3 (n - 1/2)(w^{m,k} - w^{m-1,k}) -$$

$$- h^{-1}\eta U_1^{m-1,k}((m-1)h)^{3N}(w^{m,k} - w^{m,k-1}) + n(\eta - 1)(mh)^2 w^{m,k}_{\eta} + \tag{7}$$

$$+ A_1^{m-1,k}((m-1)h)^{2N} w^{m,k}_{\eta} + B_1^{m-1,k}((m-1)h)^{2N} w^{m,k} = 0 \quad \left(N = 1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$w^{0,k} = 0, \qquad m = 1, \ldots; \ k = 0, 1, \ldots, [X/h]$$

с граничными уловиями

$$w^{m,k}(1) = 0, \quad \lambda_{m,k}(w) \equiv [\nu w^{m,k} w^{m,k}_{\eta} - v_0^{m-1,k}((m-1)h)^N w^{m,k} +$$

$$+ n(mh)^2 + C_1^{m-1,k}((m-1)h)^{2N}]\,|_{\eta=0} = 0 \tag{8}$$

Покажем, что при $h \to 0$ решения $w^{m,k}(\eta)$ системы (7) с условиями (8) сходятся при $mh \leqslant \tau_1 = \mathrm{const} > 0$ к решению задачи (5), (6). Для этого, прежде всего, докажем, что решение $w^{m,k}$ задачи (7), (8) существует при $mh \leqslant \tau_0$ и установим для него оценки, равномерные относительно h.

Приближенное решение

$$u^{m,k} = u\left((mh)^{\frac{N}{n}}, \ kh, \ \eta\right), \quad N = \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

задачи (1), (2) может быть получено при помощи решения задачи (7), (8) из формулы

$$y = (mh)^N \int\limits_0^{W^{m,k}} (w^{m,k}(s))^{-1} ds, \quad W^{m,k} = u^{mk} / U((mh)^N, \ kh)$$

Точно так же, как в работе [4], устанавливается следующая лемма о существовании решения задачи (7), (8).

Лемма 1. Пусть U_1, U_{1x}, U_{1t} U_1^{-1}, v_0 ограничены в D. Тогда система уравнений (7) с граничными условиями (8) имеет решение $w^{m,k}(\eta)$, положительное при $0 \leqslant \eta < 1$, если $0 \leqslant kh \leqslant X$ и $0 \leqslant mh \leqslant \tau_0 \leqslant T^{n-1/2}$, где τ_0 зависит от U и v_0. Функции $w_\eta^{m,k}$ непрерывны при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и бесконечно дифференцируемы при $0 \leqslant \eta < 1$.

Как и в работе [4], решение задачи (7), (8) может быть получено как предел при $\varepsilon \to 0$ положительных при $0 \leqslant \eta < 1$ решений системы

$$\varepsilon w^{m,k}_{\eta\eta} + L_{m,k}(w) = 0, \qquad \varepsilon > 0, \quad m = 1, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, [X/h]$$

с граничными условиями (8), существование которых устанавливается при помощи теоремы Лере — Шаудера.

Лемма 2. При $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ существует решение уравнения

$$\Lambda_n(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} - (n - {}^1/_2) Y + (\eta - 1) n Y_\eta = 0 \tag{9}$$

удовлетворяющее условиям

$$Y(1) = 0, \quad \lambda_n(Y) \equiv (\nu Y Y_\eta + n)|_{\eta=0} = 0 \tag{10}$$

Это решение обладает следующими свойствами:

$$M_2(1 - \eta)\sigma \leqslant Y(\eta) \leqslant M_1(1 - \eta)\sigma \tag{11}$$

$$M_1(1 - \eta)(\sigma - K) \leqslant Y(\eta) \quad \text{при } \eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1 \tag{12}$$

$$-M_4\sigma \leqslant Y_\eta(\eta) \leqslant -M_3\sigma \tag{13}$$

$$|YY_{\eta\eta}| \leqslant M_5, \qquad YY_{\eta\eta} < -M_6 \tag{14}$$

$$(\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1-\eta)}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1)$$

Здесь μ выбрано так, что

$$\sigma^2|_{\eta=0} = 2n + {}^1/_2 + \delta, \quad \nu M_1{}^2 = 1, \quad \nu M_2{}^2 = {}^1/_2 - \delta$$

$$\delta, \ M_i, \ K, \ \eta_0 = \text{const} > 0; \quad i = 3, \ldots, 6$$

при этом δ — некоторое малое число.

Доказательство. Лемма 2 устанавливается аналогично лемме 2 работы [4]. Укажем лишь на те небольшие отличия, которые возникают при $n > 1$. Легко проверить, что если

$$\varphi_1 = M_1(1 - \eta)\sigma, \qquad \nu M_1{}^2 = 1, \qquad \sigma^2|_{\eta=0} = 2n + {}^1/_2 + \delta$$

то

$$\Lambda_n(\varphi_1) < 0 \quad \text{при } 0 \leqslant \eta < 1, \qquad \lambda_n(\varphi_1) < 0$$

Поэтому $Y(\eta) \leqslant \varphi_1(\eta)$. Точно так же доказывается, что

$$Y(\eta) \geqslant \varphi_2(\eta) = M_2(1-\eta)\sigma, \qquad \nu M_2{}^2 = {}^1/_2 - \delta$$

при некоторой достаточно малой постоянной M_2.

Для получения оценки (14) потребуется уточнение оценки снизу для $Y(\eta)$ в окрестности $\eta = 1$. Пусть $\varphi_3(\eta) = M_1(1-\eta)(\sigma - K)$. Покажем, что постоянные $K > 0$ и $0 < \eta_0 < 1$ можно выбрать так, что при $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$ будет выполняться неравенство $Y(\eta) \geqslant \varphi_3$. Легко видеть, что

$$\Lambda_n(\varphi_3) = M_1(1 - \eta)\left[\frac{K}{2}\left(1 - \frac{K}{\sigma}\right) - \frac{n}{2\sigma} - \frac{1}{4} + \frac{K}{2\sigma}\left(1 - \frac{K}{2\sigma}\right)\right]$$

Пусть при $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$ выполнены неравенства

$$K / \sigma < 1, \qquad 1 - K / \sigma \geqslant d, \qquad d = \text{const} > 0, \qquad M_1 d \leqslant M_2$$

Тогда, если K достаточно велико,

$$\Lambda_n(\varphi_3) > 0 \quad \text{при } \eta_0 \leqslant \eta < 1$$

Выберем η_0 так, что

$$(1 - K / \sigma)|_{\eta=\eta_0} = d$$

Тогда

$$1 - K / \sigma \geqslant d, \qquad K / \sigma < 1 \quad \text{при } \eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$$

и, следовательно,

$$\Lambda_n(\varphi_3) > 0 \quad \text{при } \eta_0 \leqslant \eta < 1$$

Далее

$$\varphi_3|_{\eta=\eta_0} = M_1 d(1 - \eta_0)\sigma|_{\eta=\eta_0} \leqslant M_2(1 - \eta_0)\sigma|_{\eta=\eta_0} \leqslant Y(\eta_0)$$

так как $M_1 d \leqslant M_2$. Рассматривая уравнение

$$\Lambda_n(\varphi_3) - \Lambda_n(Y) = \Lambda_n(\varphi_3) \quad \text{при } 0 \leqslant \eta < 1$$

для разности $\varphi_3 - Y$ и принимая во внимание условия

$$(\varphi_3 - Y)|_{\eta=1} = 0, \quad (\varphi_3 - Y)|_{\eta=\eta_0} \leqslant 0$$

получим, что

$$Y(\eta) \geqslant \varphi_3(\eta) \quad \text{при } \eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$$

Докажем теперь неравенства (13). Введем обозначение $z = Y_\eta$. Из уравнения (9) получаем уравнение для z

$$\nu Y^2 z_\eta + n(\eta - 1)z = (n - {}^1\!/_2)Y \tag{15}$$

Точно так же, как в лемме 2 работы [4], доказываем при помощи уравнения (15), что найдутся постоянные M_3 и M_4 такие, что $-M_4\sigma \leqslant z \leqslant -M_3\sigma$ при $0 \leqslant \eta < 1$.

Из оценок (11) и (13) следует, что

$$|\nu YY_{\eta\eta}| \leqslant (n - {}^1\!/_2) + n(1-\eta)|Y_\eta|Y^{-1} \leqslant \nu M_5$$

Покажем теперь, что

$$YY_{\eta\eta} < -M_6$$

Из неравенства (12) следует, что найдется последовательность η^N, стремящаяся к единице при $N \to \infty$ и такая, что

$$Y_\eta(\eta^N) \leqslant M_1(-\sigma + {}^1\!/_2\sigma^{-1})|_{\eta=\eta^N} + M_1K$$

Поэтому при $1 - \eta^N$ достаточно малом будет

$$\nu YY_{\eta\eta}|_{\eta=\eta^N} = [(n - {}^1\!/_2) + n(1-\eta)Y_\eta Y^{-1}]|_{\eta=\eta^N} \leqslant$$

$$\leqslant [(n - {}^1\!/_2) - n(1 - {}^1\!/_2\sigma^{-2}) + nK/\sigma^{-1}]|_{\eta=\eta^N} < -M_7$$

$$(M_7 = \mathrm{const} > 0)$$

Дифференцируя уравнение (9) по η, получим, что $R = YY_{\eta\eta}$ удовлетворяет уравнению

$$\Lambda^n(R) \equiv \nu YR_\eta + \nu Y_\eta R + n(\eta - 1)RY^{-1} = -{}^1\!/_2 Y_\eta$$

Пусть $\Psi = -M_6$ и $0 < M_6 < M_7/\nu$. Тогда

$$\Lambda^n(R - \Psi) = -{}^1\!/_2 Y_\eta + M_6(\nu Y_\eta + (\eta - 1)nY^{-1}) > 0 \tag{16}$$

при $0 \leqslant \eta < 1$, если M_6 достаточно мало. Из неравенства (16) и условия $(R - \Psi) < 0$ при $\eta = \eta^N$ легко следует, что $R - \Psi \leqslant 0$ при $0 \leqslant \eta \leqslant \eta^N$ и, значит, $R < -M_6$ при $0 \leqslant \eta < 1$.

Лемма 3. Пусть U_1, U_{1x}, $U_{1t}U_1^{-1}$, v_0 ограничены в D. Тогда решения задачи (7), (8), положительные при $\eta < 1$, удовлетворяют неравенствам

$$mhY(1 - \alpha(mh)^{N-1}) \leqslant w^{m,k}(\eta) \leqslant mhY(1 + \beta(mh)^{N-1})$$

при $mh \leqslant \tau_0'$, $\tau_0' \leqslant \tau_0$.

Здесь α, β, τ'_0— некоторые положительные постоянные, не зависящие от h.

Доказательство. Вычислим $L_{m,k}(F_1)$, где

$$F_1^{m,k}(\eta) = mhY(\eta)(1 + \beta(mh)^{N-1})$$

При $m \geqslant 1$ имеем

$$L_{m,k}(F_1) = (1 + \beta(mh)^{N-1})[(mh)^3(\nu Y^2 Y_{\eta\eta} - (n - {}^1\!/_2)Y + (\eta - 1)nY_\eta) + (mh)^3(2 + \beta(mh)^{N-1})\beta(mh)^{N-1}\nu Y^2 Y_{\eta\eta} + A_1^{m-1,k}((m-1)h)^{2N}mhY_\eta + B_1^{m-1,k}((m-1)h)^{2N}mhY] - h^{-1}(mh)^3(n - {}^1\!/_2)(m-1)hY\beta((mh)^{N-1} - ((m-1)h)^{N-1})$$

Так как $YY_{\eta\eta} < -M_6$, то легко видеть, что $L_{m,k}(F_1) < 0$ при $\eta < 1$, если $\beta > 0$ достаточно велико, $mh \leqslant \tau_0'$, τ_0' достаточно мало. Постоянные β и τ_0' не зависят от h.

Вычислим теперь $\lambda_{m,k}(F_1)$. Имеем

$$\lambda_{m,k}(F_1) = \{(mh)^2(\nu YY_\eta + n) + \nu(mh)^{N+1}(2 + \beta(mh)^{N-1})\beta YY_\eta -$$

$$- v_0^{m-1,k}((m-1)h)^N mhY(1 + \beta(mh)^{N-1}) + C_1^{m-1,k}((m-1)h)^{2N}\}|_{\eta=0} < 0$$

$$\left(N = 1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

если $\beta > 0$ достаточно велико, $mh \leqslant \tau_0'$ и τ_0' достаточно мало. Из неравенств

$$L_{m,k}(F_1) - L_{m,k}(w) \leqslant 0, \qquad \frac{1}{F_1^{m,k}}\lambda_{m,k}(F_1) - \frac{1}{w^{m,k}}\lambda_{m,k}(w) < 0$$

и условий

$$F_1^{0,k} - w^{0,k} = 0, \qquad (F_1^{m,k} - w^{m,k})|_{\eta=1} = 0$$

следует, что

$$w^{m,k} \leqslant mh(1 + \beta(mh)^{N-1})Y \quad \text{при } mh \leqslant \tau_0'$$

Аналогично доказывается, что

$$w^{m,k} \geqslant mh(1 - \alpha(mh)^{N-1})Y \quad \text{при } mh \leqslant \tau_0'$$

если α достаточно велико.

Лемма 4. Пусть U_1, U_{1x}, $U_{1t}U^{-1}$, v_0 имеют ограниченные производные по ξ и τ. Тогда для решения $w^{m,k}$ задачи (7), (8) при $mh \leqslant \tau_1$ выполнены неравенства

$$Y_\eta(\eta)(mh)(1 + \alpha_1(mh)^{N-1}) \leqslant w_\eta^{m,k}(\eta) \leqslant Y_\eta(\eta)(mh)(1 - \beta_1(mh)^{N-1})$$

$$|h^{-1}(w^{m,k} - w^{m-1,k})| \leqslant (1 + \varepsilon_1)Y, \ |h^{-1}(w^{m,k} - w^{m,k-1})| \leqslant mhY\left(N = 1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$|w^{m,k}w_{\eta\eta}^{m,k}| \leqslant K_1(mh)^2, \qquad w^{m,k}w_{\eta\eta}^{m,k} < -K_2(mh)^2$$

Здесь τ_1, α_1, β_1, K_1, K_2, $\varepsilon_1 = \text{const} > 0$; эти постоянные не зависят от h; ε_1 можно выбрать как угодно малым.

Доказательство этой леммы проводится точно так же, как доказана лемма 4 в работе [4].

Из лемм 3 и 4 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения лемм 3 и 4 относительно U_1 и v_0. Тогда решение w задачи (5), (6) существует в области $\Omega_{\tau_1}\{0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1, 0 \leqslant \xi \leqslant X, \ 0 \leqslant \eta < 1\}$, где τ_1 зависит от функций U и v_0; это решение обладает следующими свойствами:

функция $w(\tau, \xi, \eta)$ непрерывна в области Ω_{τ_1}

$$\tau Y(\eta)(1 - \alpha\tau^{N-1}) \leqslant w(\tau, \xi, \eta) \leqslant \tau Y(\eta)(1 + \beta\tau^{N-1}) \tag{17}$$

производная w_η непрерывна по η при $0 \leqslant \eta < 1$ и

$$\tau Y_\eta(\eta)(1 + \alpha_1\tau^{N-1}) \leqslant w_\eta(\tau, \xi, \eta) \leqslant \tau Y_\eta(\eta)(1 - \beta_1\tau^{N-1})$$

производные w_ξ, w_τ, $ww_{\eta\eta}$ ограничены в области Ω_{τ_1}, и, кроме того,

$$|w_\xi| \leqslant \tau Y, \quad |w_\tau| \leqslant (1 + \varepsilon_1)Y, \quad ww_{\eta\eta} < -K_2\tau^2$$

при этом функция w будет удовлетворять уравнению (5) почти всюду в Ω_{τ_1}. Постоянные α, β, α_1, β_1, K_2, ε_1 положительны и зависят от U, v_0 X.

Теорема 2. Решение задачи (5), (6) единственно в классе функций $w \geqslant 0$, непрерывных в области Ω_{τ_1}, с непрерывной по η производной w_η при $\eta = 0$, удовлетворяющих почти всюду уравнению (5), условиям (6) и таких, что w_η, w_ξ, w_τ, $w_{\eta\eta}$ интегрируемы в любой внутренней подобласти Ω_{τ_1}, $w_{\eta\eta} \leqslant 0$, функции $w_{1\eta}w$, $w_1 w_\eta$, w / w_1 ограничены, w_1 — решение задачи (5), (6), построенное в теореме 1.

Эта теорема доказывается так же, как доказана единственность решения задачи (5), (6) при $n = 1$ в теореме 1 работы [4].

Для решения w задачи (5), (6) построим теперь асимптотическое разложение при $t \to 0$ по степеням t с любым числом q членов и оценим остаточный член этого разложения. Рассмотрим сначала случай, когда

$$U(t, x) = t^n U_1(x), \quad v_0 \equiv 0, \quad n \geqslant 1$$

При этом предположении уравнение (5) и условие (6) примут вид

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - \tau^3 (n - 1/2) w_\tau + n(\eta - 1)\tau^2 w_\eta - \eta U_1(\xi)\tau^{3N} w_\xi + \\ + (\eta^2 - 1) U_{1x} \tau^{3N} w_\eta - \eta U_{1x}(\xi)\tau^{3N} w = 0 \tag{18}$$

$$\left(N = 1 + \frac{1}{2n - 1}\right)$$

$$w|_{\tau=0} = 0, \quad w|_{\eta=1} = 0, \quad (\nu w w_\eta + n\tau^2 + U_{1x}(\xi)\tau^{3N})|_{\eta=0} = 0 \tag{19}$$

Лемма 5. Пусть $U_1(x)$ имеет ограниченную производную порядка $q + 1$ при $0 \leqslant x \leqslant X$. Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений при $0 \leqslant \eta < 1$ для функций $Y_i(\xi, \eta)$, $i = 1, \ldots, q$, зависящих от параметра ξ $(0 \leqslant \xi \leqslant X)$, вида

$$L_i(Y) \equiv \nu Y_0^2 Y_{i\eta\eta} + n(\eta - 1) Y_{i\eta} + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_i -$$

$$- (n - 1/2)\left(1 + i\frac{(2n+2)}{(2n-1)}\right) Y_i + \sum_{\substack{l+s+\rho=i \\ l\neq i,\ s\neq i,\ \rho\neq i}} \nu Y_l Y_s Y_{\rho\eta\eta} -$$

$$- \eta U_1(\xi) Y_{(i-1)\xi} + (\eta^2 - 1) U_{1x}(\xi) Y_{(i-1)\eta} - \eta U_{1x}(\xi) Y_{(i-1)} = 0 \tag{20}$$

с граничными условиями

$$Y_i|_{\eta=1} = 0, \quad \left(\nu Y_0 Y_{i\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_i + \nu \sum_{\substack{l+s=i \\ s\neq i,\ l\neq i}} Y_l Y_{s\eta}\right)\Big|_{\eta=0} = 0 \tag{21}$$

если $i = 2, \ldots, q$

$$Y_1|_{\eta=1} = 0, \quad (\nu Y_0 Y_{1\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_1 + U_{1x}(\xi))|_{\eta=0} = 0 \tag{22}$$

где $Y_0(\eta)$ будет решением $Y(\eta)$ задачи (9), (10), имеет единственное решение. Это решение обладает следующими свойствами:

$$|Y_i| \leqslant N_i (1 - \eta)\sigma, \quad |Y_{i\eta}| \leqslant C_i \sigma, \quad |Y_0 Y_{i\eta\eta}| \leqslant R_i \tag{23}$$

$$\left|\frac{\partial^s Y_i}{\partial \xi^s}\right| \leqslant N_{i,s}(1 - \eta)\sigma, \quad \left|\frac{\partial^l Y_{i\eta}}{\partial \xi^l}\right| \leqslant C_{i,l}\sigma, \quad \left|Y_0 \frac{\partial^l Y_{i\eta\eta}}{\partial \xi^l}\right| \leqslant R_{i,l} \tag{24}$$

при $s \leqslant q - i + 1$, $l \leqslant q - i$. Постоянные N_i, C_i, R_i, N_{is}, $C_{i,l}$, $R_{i,l}$ не зависят от ξ.

Доказательство. Предположим сначала, что решения $Y_i (i = 1, \ldots, q)$ задачи (20), (21), (22) существуют, и докажем для них оценки (23), (24). Для $Y_0 = Y$ эти оценки верны в силу леммы 2. Установим их для Y_1 и затем, предполагая, что они выполнены для $i \leqslant \rho - 1$, докажем их для $i = \rho$, $\rho \leqslant q$. Для Y_1 удовлетворяются уравнение

$$L_1'(Y_1) \equiv \nu Y_0^2 Y_{1\eta\eta} + n(\eta - 1) Y_{1\eta} + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_1 -$$
$$-(n - 1/2)\left(1 + \frac{2n+2}{2n-1}\right) Y_1 + (\eta^2 - 1) U_{1x} Y_{0\eta} - \eta U_{1x} Y_0 = 0 \qquad (25)$$

и граничные условия (22). Введем обозначения

$$L_i'(Y_i) \equiv \nu Y_0^2 Y_{i\eta\eta} + n(\eta - 1) Y_{i\eta} + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_i - (n - 1/2)\left(1 + \frac{i(2n+2)}{2n-1}\right) Y_i$$
$$\lambda'(Y_i) \equiv (\nu Y_0 Y_{i\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_i)|_{\eta=0}, \quad i = 1, \ldots, q$$

Пусть $\Psi_1 = N_1 (1 - \eta)\sigma$. Тогда

$$L_1'(\Psi_1) = N_1 \left\{ \nu Y_0^2 \left[-\frac{1}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1-\eta)} \right] + n(\eta - 1)\left(-\sigma + \frac{1}{2\sigma}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta}(1 - \eta)\sigma - (n - 1/2)\left(1 + \frac{2n+2}{2n-1}\right)(1 - \eta)\sigma \right\} \leqslant -N_1 \gamma_1 (1 - \eta)\sigma$$
$$(N_1, \ \gamma_1 = \text{const} > 0)$$
$$\lambda'(\Psi_1) = N_1 \left\{ \nu Y_0 \left(-\sigma + \frac{1}{2\sigma}\right) + \nu Y_{0\eta}\sigma \right\} \Big|_{\eta=0} \leqslant -N_1 \gamma_2$$
$$(\gamma_2 = \text{const} > 0)$$

Отсюда следует, что $L_1'(\Psi_1 \pm Y_1) < 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$ и $\lambda'(\Psi_1 \pm Y_1) < 0$, если N_1 достаточно велико. Очевидно, что $(\Psi \pm Y_1)|_{\eta=1} = 0$. Поэтому в силу принципа максимума $\Psi_1 \pm Y_1 \geqslant 0$ и $|Y_1| \leqslant \Psi_1$ при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Дифференцируя s раз уравнение (25) по ξ, получим уравнение для

$$\partial^s Y_1 / \partial \xi^s, \qquad 1 \leqslant s \leqslant q$$

Легко видеть, что

$$L_1'(N_{1,s}(1 - \eta)\sigma \pm \partial^s Y_1 / \partial \xi^s) < 0 \quad \text{при } 0 \leqslant \eta < 1$$
$$\lambda'(N_{1,s}(1 - \eta)\sigma \pm \partial^s Y_1 / \partial \xi^s) < 0$$

если $N_{1,s}$ достаточно велико. Кроме того, $\partial^s Y_1 / \partial \xi^s = 0$ при $\eta = 1$. Поэтому

$$|\partial^s Y_1 / \partial \xi^s| \leqslant N_{1,s}(1 - \eta)\sigma$$

Получим теперь оценку для $Y_{1\eta}$. Пусть $Y_{1\eta} = z_1$. Из уравнения (25) получаем уравнение для z_1

$$\Lambda'(z_1) \equiv \nu Y_0^2 z_{1\eta} + n(\eta - 1) z_1 = -2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_1 +$$
$$+(n - 1/2)\left(1 + \frac{2n+2}{2n-1}\right) Y_1 - (\eta^2 - 1) U_{1x} Y_{0\eta} + \eta U_{1x} Y_0 \qquad (26)$$

Пусть $\Phi_1 = C_1 \sigma$. Тогда

$$\Lambda'(\Phi_1) = C_1 [\nu Y_0^2 / 2(1 - \eta)\sigma + n(\eta - 1)\sigma] \leqslant C_1 (1 - \eta)\sigma(1/2 - n) \leqslant$$
$$\leqslant -C_1 \gamma_3 (1 - \eta)\sigma, \quad C_1, \ \gamma_3 = \text{const} > 0$$

Поэтому $\Lambda'(\Phi_1 \pm z_1) < 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$, если C_1 достаточно велико. Из оценки (23) для Y_1 следует, что найдутся последовательности η_N^+ и η_N^- такие, что $\eta_N^{\pm} \to 1$ при $N \to \infty$ и при некотором $C_1 > 0$

$$(z_1 - C_1\sigma)\Big|_{\eta=\eta_N^-} < 0, \qquad (z_1 + C_1\sigma)\Big|_{\eta=\eta_N^+} > 0$$

Из неравенств

$$\Lambda'(\Phi_1 \pm z) \leqslant 0, \qquad (\Phi_1 \pm z_1)\Big|_{\eta=\eta_N^{\pm}} > 0$$

следует, что $\Phi_1 \pm z_1$ не может обращаться в нуль при $0 \leqslant \eta < 1$. Поэтому $\Phi_1 \pm z_1 > 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$ и, значит, $|z_1| \leqslant C_1\sigma$.

Дифференцируя l раз ($l \leqslant q-1$) уравнение (26) по ξ, получим уравнение для $\partial^l Y_{1\eta} / \partial\xi^l$, аналогичное уравнению (26). Точно так же, как и для $Y_{1\eta}$, устанавливаем оценку

$$|\partial^l Y_{1\eta} / \partial\xi^l| \leqslant C_{1,l}\,\sigma \qquad \text{при } 0 \leqslant \eta < 1$$

Разделив уравнение (25) на νY_0, выразим из него $Y_0 Y_{\eta\eta}$. В силу полученных оценок для Y_1, $Y_{1\eta}$ и свойств функции $Y_0 = Y$, установленных в лемме 2, получаем, что

$$|Y_0 Y_{1\eta\eta}| \leqslant R_1, \qquad R_1 = \text{const} > 0$$

Дифференцируя уравнение (25) l раз по ξ, получим уравнение, из которого легко следует оценка

$$|Y_0 \partial^l Y_{1\eta\eta} / \partial\xi^l| \leqslant R_{1,l} \quad \text{при } l \leqslant q-1$$

Таким образом, оценки (23), (24) выполнены при $i = 1$. Предположим, что они доказаны при $i \leqslant \rho - 1$, и докажем их при $i = \rho$.

Рассмотрим $L_\rho'(\Psi_\rho)$, где $\Psi_\rho = N_\rho (1-\eta)\sigma$. Легко видеть, что

$$L_\rho'(\Psi_\rho) \leqslant -N_\rho \varkappa_\rho (1-\eta)\sigma, \qquad \lambda'(\Psi_\rho) \leqslant -N_\rho \varkappa_\rho', \qquad \varkappa_\rho, \varkappa_\rho' = \text{const} > 0$$

Поэтому выбрав N_ρ достаточно большим, получим, что

$$L_\rho'(\Psi_\rho \pm Y_\rho) < 0 \quad \text{при } 0 \leqslant \eta < 1, \qquad \lambda'(\Psi_\rho \pm Y_\rho) < 0$$

Отсюда следует, что $|Y_\rho| \leqslant N_\rho (1-\eta)\sigma$, так как $(\Psi_\rho \pm Y_\rho)|_{\eta=1} = 0$.

Дифференцируя s раз ($s \leqslant q - \rho + 1$) уравнение (20) по ξ, получим уравнение для $\partial^s Y_\rho / \partial\xi^s$. Учитывая предположение индукции, получаем оценку (24) вида

$$|\partial^s Y_\rho / \partial\xi^s| \leqslant N_{\rho,s}(1-\eta)\sigma$$

точно так же, как была получена оценка (23) для Y_ρ. Далее, оценки (23), (24) для

$$Y_{\rho\eta}, \quad Y_0 Y_{\rho\eta\eta}, \quad \partial^l Y_{\rho\eta}/\partial\xi^l, \quad Y_0 \partial^l Y_{\rho\eta\eta}/\partial\xi^l \quad \text{при } l \leqslant q-\rho$$

устанавливаем точно так же, как и при $\rho = 1$.

Существование решения системы (20) с условиями (21), (22), может быть доказано следующим образом. Задача (20)—(22) линейна для Y_i ($i = 1,\ldots,q$). Для системы уравнений $\varepsilon Y_{i\eta\eta} + L_i(Y_i) = 0$, $\varepsilon > 0$, с граничными условиями (21), (22) существование решения следует из его единственности, так как в этом случае для оператора

$$\varepsilon Y_{i\eta\eta} + L_i'(Y_i)$$

при граничных условиях $Y_i|_{\eta=1} = 0$, $\lambda'(Y_i) = 0$ можно построить функцию Грина.

Единственность решения этой задачи следует из принципа максимума. Для решений системы $\varepsilon Y_{i\eta\eta} + L_i(Y_i) = 0$ с условиями (21), (22) оценка $|Y_i| \leqslant C_i(1-\eta)\sigma$, равномерная по ε, получается точно так же, как и оценка для решения Y_1 задачи (25), (22). Производную по η такого решения при $0 \leqslant \eta \leqslant 1-\delta$, $\delta = \text{const} > 0$, можно оценить равномерно по ε, пользуясь уравнениями первого порядка для $Y_{i\eta}$, полученными из уравнений $\varepsilon Y_{i\eta\eta} + L_i(Y_i) = 0$, и граничными условиями (21), (22).

Производные $Y_{i\eta\eta}$ и $Y_{i\eta\eta\eta}$ можно оценить равномерно по ε при $0 \leqslant \eta \leqslant 1-\delta$ выражая их из уравнений $\varepsilon Y_{i\eta\eta} + L_i(Y_i) = 0$ и уравнений, полученных их дифференцированием по η. Очевидно, что при некоторой последовательности $\varepsilon \to 0$ эти решения равномерно сходятся к решению задачи (20)—(22).

Теорема 3. Пусть $U(t, x) = t^n U_1(x)$, $(n - 1)$ — любое неотрицательное число, $v_0 \equiv 0$, U_1 имеет ограниченную производную порядка $q + 1$ при $0 \leqslant x \leqslant X$. Тогда для решения w задачи (5), (6), существование которого доказано в теореме 1, справедлива при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_{q+1}$ оценка

$$\left| w(\tau, \xi, \eta) - \sum_{i=0}^{q} Y_i(\xi, \eta)\, \tau^{1+i\gamma} \right| \leqslant M'_q \tau^{1+(q+1)\gamma} Y_0 \quad \left(\gamma = \frac{2n+2}{2n-1}\right) \tag{27}$$

Здесь $Y_i(\xi, \eta)$ — решения системы (20) с условиями (21), (22), τ_{q+1} — некоторое число, зависящее от $U_1(x)$, n, q; $M'_q = \text{const} > 0$.

Доказательство. Обозначим

$$Y_*^{m,k} \equiv \sum_{i=0}^{q} Y_i^k (mh)^{1+i\gamma}, \qquad Y_i^k \equiv Y_i(kh, \eta)$$

$$W_*^{m,k} \equiv Y_*^{m,k}(1 + \beta_q (mh)^\varkappa + \mu_q h) \quad (\varkappa = (q+1)\gamma)$$

Оценим разность $w^{m,k} - W_*^{m,k}$. Для этого вычислим $L_{m,k}(W_*)$. Учитывая уравнения (9) и (20), имеем

$$\begin{aligned}
L_{m,k}(W_*) = {} & (1 + \beta_q (mh)^\varkappa + \mu_q h)\{((1 + \beta_q (mh)^\varkappa + \mu_q h)^2 - 1)\, \nu (Y_*^{m,k})^2\, Y_{*\eta\eta}^{m,k} + \\
& + \nu \sum_{l+s+\rho \geqslant q+1} Y_l^k Y_s^k Y_{\rho\,\eta\eta}^{\;k} (mh)^{3+(l+s+\rho)\gamma} - \frac{1}{h} \eta U_1(kh)((m-1)h)^{2+\gamma} (mh)^{1+q\gamma} \times \\
& \times (Y_q^k - Y_q^{k-1}) - \eta U_1(kh)\, [((m-1)h)^{2+\gamma} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{h} (Y_i^k - Y_i^{k-1})(mh)^{1+i\gamma} - \\
& - (mh)^{2+\gamma} \sum_{i=1}^{q-1} Y_{i\xi}^{\;k} (mh)^{1+i\gamma}] - (mh)^3 (n - 1/2) \sum_{i=1}^{q} Y_i^k [\frac{1}{h} (mh)^{1+i\gamma} - \\
& - ((m-1)h)^{1+i\gamma}/h - (1 + i\gamma)(mh)^{i\gamma}] + (\eta^2 - 1) U_{1x}(kh)\, Y_{*\eta}^{m,k} [((m-1)h)^{2+\gamma} - (mh)^{2+\gamma}] + \\
& + (\eta^2 - 1) U_{1x}(kh)(mh)^{3+(q+1)\gamma} Y_{q\eta}^{\;k} - \eta U_{1x}(kh)\, Y_*^{m,k} [((m-1)h)^{2+\gamma} - (mh)^{2+\gamma}] - \\
& - \eta U_{1x}(kh)(mh)^{3+(q+1)\gamma} Y_q^k\} - \frac{1}{h} (mh)^3 (n - 1/2)\, \beta_q ((mh)^\varkappa - ((m-1)h)^\varkappa)\, Y_*^{m-1,k}
\end{aligned} \tag{28}$$

Легко видеть, что $L_{m,k}(W_*) < 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$, если M и β_q достаточно велики, $mh \leqslant \tau_{q+1}$ и τ_{q+1} достаточно мало, так как при $0 \leqslant mh \leqslant \tau_{q+1}$ выполнено неравенство $Y_*^{m,k} Y_{*\eta\eta}^{m,k} < -M_8$, $M_8 = \text{const} > 0$, а выражение

$$\nu (Y_*^{m,k})^2\, Y_{*\eta\eta}^{m,k} (2 + \beta_q (mh)^\varkappa + \mu_q h)(\beta_q (mh)^\varkappa + \mu_q h)$$

при $mh \leqslant \tau_{q+1}$ и при больших β_q и μ_q больше по модулю всех неотрицательных членов, входящих в правую часть равенства (28).

Вычислим $\lambda_{m,k}(W_*)$. Учитывая граничные условия (21), (22), (10), получим

$$\begin{aligned}
\lambda_{m,k}(W_*) = {} & [\nu (1 + \beta_q (mh)^\varkappa + \mu_q h)^2\, Y_*^{m,k} Y_{*\eta}^{m,k} + \\
& + n (mh)^2 + U_{1x}(kh)((m-1)h)^{2+\gamma}]\, |_{\eta=0} = \\
= {} & [\nu (2 + \beta_q (mh)^\varkappa + \mu_q h)(\beta_q (mh)^\varkappa + \mu_q h)\, Y_*^{m,k} Y_{*\eta}^{m,k} + \\
& + \sum_{s+l \geqslant q+1} \nu Y_s^k Y_{l\eta}^{\;k} (mh)^{2+(s+l)\gamma} + U_{1x}(kh)(((m-1)h)^{2+\gamma} - (mh)^{2+\gamma})]\, |_{\eta=0}
\end{aligned}$$

Так как $Y_{*\eta}^{m,k}\, |_{\eta=0} < -M_9$, $M_9 = \text{const} > 0$ при достаточно малых mh, то, выбрав достаточно большие β_q и μ_q, получим при $mh \leqslant \tau_{q+1}$, что $\lambda_{m,k}(W_*) < 0$.

Рассмотрим $S^{m,k} = W_*^{m,k} - w^{m,k}$. Из полученных выше неравенств следует, что

$$L_{m,k}(W_*) - L_{m,k}(w) < 0 \quad \text{при } 0 \leqslant \eta < 1$$

$$(W_*^{m,k})^{-1}\lambda_{m,k}(W_*) - (w^{m,k})^{-1}\lambda_{m,k}(w) < 0$$

Поэтому

$$\nu(w^{m,k})^2 S_{\eta\eta}^{m,k} - h^{-1}(mh)^3(n - {}^1/_2)(S^{m,k} - S^{m-1,k}) - n(\eta - 1)(mh)^2 S_{\eta}^{m,k} -$$
$$- h^{-1}U_1(kh)\eta((m-1)h)^{2+\gamma}(S^{m,k} - S^{m,k-1}) +$$
$$+ (\eta^2 - 1)U_{1x}(kh)((m-1)h)^{2+\gamma} S_{\eta}^{m,k} - \eta U_{1x}(kh)((m-1)h)^{2+\gamma} S^{m,k} + \nu(w^{m,k} +$$
$$+ W_*^{m,k})W_{*\eta\eta}^{m,k} S^{m,k} < 0 \text{ при } 0 \leqslant \eta < 1$$

$$[\nu S_{\eta}^{m,k} - (n(mh)^2 + U_{1x}(kh)(mh)^{2+\gamma})(w^{m,k} W_*^{m,k})^{-1} S^{m,k}]\big|_{\eta=0} < 0$$

Очевидно, что при достаточно малых mh коэффициенты при $S^{m,k}$ в этих неравенствах отрицательны. Поэтому в силу принципа максимума и условий $S^{m,k}(1) = 0$, $S^{0,k} = 0$ имеем неравенства $S^{m,k} \geqslant 0$ при $mh \leqslant \tau_{q+1}$ и, следовательно,

$$w^{m,k} \leqslant Y_*^{m,k}(1 + \beta_q(mh)^{\varkappa} + \mu_q h)$$

Точно так же доказывается, что

$$w^{m,k} \geqslant Y_*^{m,k}(1 - \alpha_q(mh)^{\varkappa} - \gamma_q h)$$

при $mh \leqslant \tau_{q+1}$ (τ_{q+1} достаточно мало) и некоторых α_q и γ_q, не зависящих от h.

Переходя к пределу при $h \to 0$ в полученных неравенствах для $w^{m,k}$, получим (27). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть

$$U(t, x) = t^n U_1(t, x)$$

$$U_1(t, x) = \sum_{s=0}^{\rho_1} a_s(x)t^s + a_{\rho_1+1}(t, x), \qquad |a_{\rho_1+1}| \leqslant c_1 t^{\rho_1+1}$$

$$U_{1x}(t, x) = \sum_{s=0}^{\rho_2} a_s'(x)t^s + a'_{\rho_2+1}(t, x), \qquad |a'_{\rho_2+1}| \leqslant c_2 t^{\rho_2+1}$$

$$U_{1t}/U_1 = \sum_{s=0}^{\rho_3} \theta_s(x)t^s + \theta_{\rho_3+1}(t, x), \qquad |\theta_{\rho_3+1}| \leqslant c_3 t^{\rho_3+1}$$

$$v_0(t, x) = \sum_{s=0}^{\rho_4} b_s(x)t^s + b_{\rho_4+1}(t, x), \qquad |b_{\rho_4+1}| \leqslant c_4 t^{\rho_4+1} \tag{29}$$

Здесь $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ — некоторые целые неотрицательные числа. Для того чтобы построить асимптотическое разложение для решения w задачи (5), (6) в этом случае, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $Y_i\ (\xi, \eta)$, $i = 1, \ldots, q$, зависящих от параметра ξ

$$\nu Y_0^2 Y_{i\eta\eta} + (\eta - 1)nY_{i\eta} + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_i -$$
$$-(n - {}^1/_2)(1 + i/(2n-1))Y_i + \sum_{\substack{l+s+\rho=i \\ l\neq i,\ s\neq i,\ \rho\neq i}} \nu Y_l Y_s Y_{\rho\eta\eta} -$$
$$-\eta \sum_{2s+l+2n+2=i} a_s(\xi)Y_{l\xi} + (\eta^2 - 1)\sum_{2s+l+2n+2=i} a_s'(\xi)Y_{l\eta} -$$
$$-\eta \sum_{2s+l+2n+2=i} a_s'(\xi)Y_l + (\eta - 1)\sum_{2s+l+2=i} \theta_s(\xi)Y_{l\eta} - \sum_{2s+l+2=i} \theta_s(\xi)Y_l = 0$$
$$Y_0 = Y, \quad 0 \leqslant \eta < 1, \quad q \geqslant 1 \tag{30}$$

с граничными условиями

$$Y_i|_{\eta=1}=0, \quad \Big(\nu Y_0 Y_{i\eta}+\nu Y_{0\eta} Y_i+\nu \sum_{\substack{l+s=i\\ s\neq i,\ l\neq i}} Y_l Y_{s\eta}-$$

$$-\sum_{2s+l+1=i} b_s(\xi)\, Y_l+\alpha^i \theta_{i/2-1}(\xi)+\beta^i a'_{i/2-n-1}(\xi)\Big)\Big|_{\eta=0}=0 \tag{31}$$

Здесь $\alpha^i=\beta^i=1$, если i — четное, $\alpha^i=\beta^i=0$, если i — нечетное.

Лемма 6. Система дифференциальных уравнений (30) с граничными условиями (31) имеет решение Y_i ($i=1,\ldots,q$), обладающее следующими свойствами:

$$|Y_i|\leqslant N_i(1-\eta)\sigma, \qquad |Y_{i\eta}|\leqslant C_i\sigma, \qquad |Y_0 Y_{i\eta\eta}|\leqslant R_i$$

$$\left|\frac{\partial Y_i}{\partial \xi}\right|\leqslant N_i'(1-\eta)\sigma \qquad (i=1,\ldots,q)$$

$$\left|\frac{\partial^2 Y_i}{\partial \xi^2}\right|\leqslant N_i''(1-\eta)\sigma \quad \text{при } i\leqslant q-2n-2$$

$$(N_i,\ C_i,\ R_i,\ N_i',\ N_i''=\mathrm{const}>0)$$

при условии, что в равенствах (29)

$$\rho_1\geqslant [q/2]-(n+1), \qquad \rho_2\geqslant [q/2]-(n+1)$$

$$\rho_3\geqslant [q/2]-1, \qquad \rho_4\geqslant [(q-1)/2]$$

и, кроме того, функции a_s, a_s', θ_s, b_s имеют ограниченные производные по x до порядка $[q/(2n+2)]+1$.

Эта лемма доказывается аналогично тому, как доказана лемма 5. При помощи леммы 6 устанавливается следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $U_1(t,x)=t^n U_1(t,x)$, $n\geqslant 1$ — целое число, для $U_1(t,x)$ и $v_0(t,x)$ выполнены условия теоремы 1 и леммы 6 при $q\geqslant 0$. Тогда для решения w задачи (5), (6), существование которого доказано в теореме 1, при $0\leqslant\tau\leqslant\tau'_{q+1}$ справедливо соотношение

$$\left|w(\tau,\xi,\eta)-\sum_{i=0}^{q} Y_i(\xi,\eta)\,\tau^{1+i/(2n-1)}\right|\leqslant K_q' Y_0 \tau^{1+\frac{(q+1)}{(2n-1)}} \tag{32}$$

где $Y_i(\xi,\eta)$ — решения системы (30) с условиями (31), $K_q', \tau'_{q+1}=\mathrm{const}>0$.

Доказательство теоремы 4 проводится так же, как и теоремы 3. При этом примем

$$Y_*^{m,k}=\sum_{i=0}^{q} Y_i(kh,\eta)(mh)^{1+i/(2n-1)}$$

$$W_*^{m,k}=Y_*^{m,k}(1+\beta_q(mh)^{(q+1)/(2n-1)}+\mu_q h^{1/(2n-1)})$$

Тогда член в выражении для $L_{m,k}(W_*)$ вида

$$\nu(Y_*^{m,k})^2 Y_{*\eta\eta}^{m,k}[(1+\beta_q(mh)^{(q+1)/(2n-1)}+\mu_q h^{1/(2n-1)})^2-1]=$$

$$=\nu(Y_*^{m,k})^2 Y_{*\eta\eta}^{m,k}(2+\beta_q(mh)^{(q+1)/(2n-1)}+$$

$$+\mu_q h^{1/(2n-1)})(\beta_q(mh)^{(q+1)/(2n-1)}+\mu_q h(mh)^{1/(2n-1)})^{-1}$$

при достаточно больших μ_q, β_q отрицателен и больше по модулю всех неотрицательных членов, входящих в выражение для $L_{m,k}(W_*)$, если $\eta < 1$ и $mh \leqslant \tau'_{q+1}$. Поэтому $L_{m,k}(W_*) < 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$ и $mh \leqslant \tau_{q+1}'$. Аналогично проверяем, что $\lambda_{m,k}(W_*) < 0$ при достаточно больших β_q и μ_q, если $mh \leqslant \tau'_{q+1}$ и τ'_{q+1} достаточно мало.

На основании установленных выше теорем о решении задачи (5), (6) можем получить следующую теорему о решении задачи (1), (2).

Теорема 5. Пусть

$$U(t, x) = t^n U_1(t, x) \quad (n \geqslant 1)$$
$$U(t, 0) = 0, \quad U_1(t, x) > 0 \quad \text{при } x > 0$$

причем U_{1x}, U_{1t}/U_1, v_0 имеют ограниченные производные первого порядка по t и x.

Тогда в области

$$D_{T_1}\{0 \leqslant t \leqslant \tau_1^{2/(2n-1)} = T_1,\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y < \infty\}$$

существует решение u, v задачи (1), (2), обладающее следующими свойствами

$$u / U,\ u_y t^n / U \text{ ограничены и непрерывны в } D_{T_1}$$

$$u(t, x, y) > 0 \text{ при } tx > 0, \quad \frac{u_y t^n}{U} > 0 \text{ при } t > 0, \quad \frac{u_y t^n}{U} \to 0 \text{ при } y \to 0$$

Производные u_y, u_x, u_{yy}, u_t, v_y ограничены и непрерывны по y,

$$|u_y| \leqslant E_1 t^{n-1/2}, \quad |u_{yy}| \leqslant E_2 t^{n-1}, \quad |u_t| \leqslant E_3 t^{n-1}, \quad |u_x| \leqslant E_4 t^n$$

Функция v непрерывна по y и ограничена при ограниченных y,

$$t^{-n+1/2} u_{yx}, \quad t^{-n+3/2} u_{yt} \text{ ограничены при ограниченных } y$$

$$|u_{yyy}| \leqslant E_5 t^{n-3/2}, \quad E_i = \text{const} > 0$$

Уравнения системы (1) удовлетворяются почти всюду в D_{T_1}. Для этого решения выполнены оценки

$$\Phi^{-1}(yt^{-1/2}(1 - \alpha t^{1/2}))U \leqslant u \leqslant \Phi^{-1}(yt^{-1/2}(1 + \beta t^{1/2}))\, U \tag{33}$$
$$\alpha, \beta = \text{const} > 0$$
$$\Phi(\zeta) \equiv \int_0^\zeta (Y_0(s))^{-1} ds \qquad (\Phi^{-1} \text{ — функция, обратная к } \Phi)$$
$$U(1 - e^{-\nu_1}) \leqslant u \leqslant U(1 - e^{-\nu_2}) \tag{34}$$
$$\nu_2 = [M_1 y/(2t^{1/2}(1 - \beta t^{1/2}))]^2 + M_1 y\sqrt{-\ln\mu}/(t^{1/2}(1 - \beta t^{1/2}))$$
$$\nu_1 = [M_2 y/(2t^{1/2}(1 + \alpha t^{1/2}))]^2 + M_2 y\sqrt{-\ln\mu}/(t^{1/2}(1 + \alpha t^{1/2}))$$
$$\nu M_1^2 = 1, \quad \nu M_2^2 = 1/2 - \delta, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad \varepsilon = \text{const} > 0$$
$$1 - \frac{u}{U} = \exp\left(-\frac{1}{4\nu t}[y^2 + O(y^{1+\varepsilon} t^{(1-\varepsilon)/2})]\right) \text{ при } y \to \infty,\ t \to 0$$
$$|u_y t^n / U - t^{n-1/2} Y_0(u/U)| \leqslant E_6 t^n Y_0(u/U).$$
$$|t^n u_{yy} / u_y - t^{n-1/2} Y_{0\eta}(u/U)| \leqslant E_7 t^n Y_{0\eta}(u/U)$$
$$t(u_{yyy} u_y - (u_{yy})^2)\, u_y^{-2} < -E_8, \quad E_i = \text{const} > 0$$

Решение u, v задачи (1), (2) единственно в классе функций u, v, для которых $w = u_y t^n / U$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Теорема 6. Пусть $U(t, x) = t^n U_1(x)$, $v_0 \equiv 0$, $U_1(x)$ имеет ограниченную производную порядка $q + 1$. Тогда для решения u, v задачи (1), (2), полученного в теореме 5, при $0 \leqslant t \leqslant t_q$ справедливы оценки

$$\left| u_y t^n / U - t^{n-1/2} \sum_{i=0}^{q} Y_i(x, u / U)\, t^{i(n+1)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant M_q' Y_0(u / U)\, t^{n-1/2+(q+1)(n+1)}, \qquad M_q' = \text{const} \tag{35}$$

где $Y_i(\xi, \eta)$, $i = 1, \ldots, q$ — решения задачи (20), (21), (22), $Y_0(\eta) = Y(\eta)$ — решение задачи (9), (10).

В частности, из оценки (35) следует формула для асимптотического разложения при $t \to 0$ величины $u_y(t, x, 0)$ с оценкой остаточного члена

$$\left| u_y(t, x, 0) - U_1(x) \sum_{i=1}^{q} Y_i(x, 0)\, t^{n-1/2+i(n+1)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant M_q'' U_1(x)\, t^{n-1/2+(q+1)(n+1)}, \qquad M_q'' = \text{const} \tag{36}$$

Теорема 7. Пусть для $U(t, x)$ и $v_0(t, x)$ выполнены предположения теоремы 4. Тогда для решения u, v задачи (1), (2), полученного в теореме 5, при $0 \leqslant t \leqslant t_q'$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{u_y t^n}{U} - \sum_{i=0}^{q} Y_i(x, u / U)\, t^{n-1/2+i/2} \right| \leqslant K_q' Y_0(u / U)\, t^{n+q/2} \tag{37}$$

где $Y_i(\xi, \eta)$ — решения обыкновенных дифференциальных уравнений (30) с условиями (31), $Y_0(\eta) = Y(\eta)$, $K_q' = \text{const} > 0$.

Справедлива следующая формула асимптотического разложения $u_y(t, x, 0)$ с оценкой остаточного члена (при $t \to 0$):

$$\left| u_y(t, x, 0) - U_1(t, x)\, t^{n-1/2} \sum_{i=0}^{q} Y_i(x, 0)\, t^{i/2} \right| \leqslant$$
$$\leqslant K_q'' U_1(t, x)\, t^{n+q/2}, \quad K_q'' = \text{const} > 0 \tag{38}$$

Теоремы 6 и 7 непосредственно следуют из теорем 3 и 4.

Доказательство теоремы 5 проводится аналогично тому, как доказана теорема 2 в работе [4]. Из условия $w(\tau, \xi, \eta) = u_y t^n / U$ получаем для определения $u(t, x, y)$

$$y = t^n \int_0^{u^*} (w(t^{n-1/2}, x, s))^{-1} ds, \qquad u^* = u(t, x, y) / U(t, x) \tag{39}$$

Из неравенств (17) следуют соотношения

$$\Phi(u/U)(1 + \beta t^{1/2})^{-1} \leqslant y t^{-1/2} \leqslant \Phi(u / U)(1 - \alpha t^{1/2})^{-1}, \quad \Phi(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{ds}{Y_0(s)}$$

Обозначим через $\Phi^{-1}(s)$ функцию, обратную к $\Phi(\xi)$. Тогда

$$U(t, x)\,\Phi^{-1}(y(1-\alpha t^{1/2})\,t^{-1/2}) \leqslant u \leqslant U(t, x)\,\Phi^{-1}(y(1+\beta t^{1/2})t^{-1/2})$$

Согласно лемме 2

$$\frac{2}{M_1}\left(\sqrt{-\ln(1-\zeta)}-\sqrt{-\ln\mu}\right) \leqslant \Phi(\zeta) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{M_2}\left(\sqrt{-\ln(1-\zeta)}-\sqrt{-\ln\mu}\right)$$

Поэтому для $u(t, x, y)$ справедливы оценки (34). Из оценок (17), (11), (12) аналогично получаем соотношение

$$1-\frac{u}{U}=\exp\left(-\frac{1}{4\nu t}[y^2+O(y^{1+\varepsilon}t^{(1-\varepsilon)/2})]\right)\begin{pmatrix} y\to\infty \\ t\to 0\end{pmatrix}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — как угодно малое число.

В случае, когда выполнены предположения теоремы 3, полагая

$$\Phi_q(u/U, t, x)=\int_0^{u/U}\left(\sum_{i=0}^{q} Y_i(x, s)\,t^{n-1/2+i(n+1)}\right)^{-1} ds$$

получим из теоремы 3 и соотношения (29), что

$$|y^{-1}\Phi_q(u/U, t, x)\,t^n-1| \leqslant E_9\,t^{(q+1)(n+1)} \tag{40}$$

Здесь $Y_i(\xi, \eta)$ — решения системы (20) с условиями (21), (22), $Y_0(\eta)$ — решение задачи (9), (10), $E_9=\text{const}>0$.

В случае, когда выполнены предположения теоремы 4, из оценки (32) для w можно получить следующее соотношение для $u(t, x, y)$. Обозначим

$$\Phi_q^*(u/U, t, x)=\int_0^{u/U}\left(\sum_{i=0}^{q} Y_i(x, s)\,t^{n-1/2+i/2}\right)^{-1} ds$$

где $Y_i(\xi, \eta)$ — решения системы (30) с условиями (31). Тогда

$$|y^{-1}\Phi_q^*(u/U, t, x)\,t^n-1| \leqslant E_{10}\,t^{1/2(q+1)}, \quad E_{10}=\text{const}>0 \tag{41}$$

Поступила 16 I 1969

Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. math. und phisik, 1908, Bd 56, H. 1.
2. Görtler H. Verdrängungswirkung der laminaren Crenzschichten und Druckwiderstand., Ing-Arch. 1944, Bd 14, H. 5, S. 286.
3. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962, стр. 114—140.
4. Олейник О. А. Образование пограничного слоя при постепенном разгоне. Сиб. матем. ж., 1968, т. 9, № 5, стр. 1199—1220.