Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ МАССОВЫХ СИЛ

А. И. Кобрин

(Москва)

Рассматривается задача о движении твердого тела с полостью, целиком заполненной несжимаемой вязкой жидкостью, при условии малости произведения характеристических чисел Рейнольдса и Струхаля для течения вязкой жидкости в полости.

Обосновывается возможность применения к указанной задаче методов исследования систем с малым параметром при старших производных и дается алгоритм построения асимптотического разложения решения соответствующей совместной системы уравнений Навье—Стокса и обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе [1] Ф. Л. Черноусько построил систему обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенно описывающую движение исследуемой системы вне начального интервала времени, когда течение в полости существенно нестационарно. Изложенный подход позволяет отказаться при построении решения от некоторых дополнительных требований на величины производных угловых скоростей твердого тела, возникающих в работе [1], оценить «толщину» пограничного слоя по времени и указать начальные условия для предложенной Ф. Л. Черноусько системы уравнений.

§ 1. Основные уравнения исследуемой задачи. Движение тела с полостью, целиком заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил описывается следующей системой уравнений в жестко связанной с твердым телом системе координат [1]:

$$\frac{1}{\nu}\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}\right]-\Delta\mathbf{u}+\nabla q=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{u}=0$$

$$J\,\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}+\frac{d\mathbf{K}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times[J\boldsymbol{\omega}+\mathbf{K}]-\mathbf{M}=0$$

$$\mathbf{K}=\rho\int\limits_D(\mathbf{r}\times\mathbf{u})\,dm,\qquad q=\frac{1}{\nu}\left[\frac{p}{\rho}+U-{}^1/_2\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2\right]\tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}\,|_\Gamma=0,\qquad \mathbf{u}(\mathbf{r},0)=\mathbf{u}^\circ(\mathbf{r}),\qquad \boldsymbol{\omega}(0)=\boldsymbol{\omega}^\circ$$

Здесь $\mathbf{u}$ — относительная скорость произвольной точки системы; $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость твердого тела; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор данной точки в связанной системе координат; $J=J_0+J_1$, где J_0 — тензор инерции твердого тела, J_1 — тензор инерции жидкости, «отвердевшей» в полости; ν — кинематическая вязкость жидкости; ρ — плотность жидкости; p — давление в жидкости; U — потенциал внешних массовых сил; $\mathbf{M}$ — момент внешних сил; D — полость, занятая жидкостью; Γ — ее граница.

Исследование уравнений (1.1) заключается в совместном рассмотрении краевой задачи для общей системы уравнений Навье—Стокса и задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе [2] показано, что нестационарные краевые задачи для системы уравнений Навье—Стокса разрешимы в обобщенном смысле во все моменты времени при условии, что внешние силы потенциальны, а число Рейнольдса мало в начальный момент времени.

При решении задачи Коши для рассматриваемых регулярных [3] систем обыкновенных дифференциальных уравнений имеет место непрерывная зависимость решений от изменения начальных данных и правых частей. На конечном интервале времени непрерывная зависимость решений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t, 1/\nu)$ от начальных условий $\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0)$ и параметра $1/\nu$ имеет место и для регулярной системы уравнений Навье—Стокса (см., например, [2]).

Пусть T_0 — характерное время в движении тела относительно центра масс, а L_0 — характерный линейный размер области D. Введем параметр μ, равный произведению чисел Рейнольдса и Струхаля для течения вязкой жидкости в полости D

$$\mu = \nu^{-1} T_0^{-1} L_0^2 \tag{1.2}$$

Положим $L_0 = 1$, $T_0 = 1$, следовательно, $\mu = 1/\nu$. Считаем в дальнейшем, что параметр μ мал. Иначе говоря, будем проводить приближенное построение решения системы (1.1) с отбрасыванием величин той или иной степени малости относительно μ.

§ 2. Построение асимптотического разложения решения. Построение асимптотики решения системы (1.1) по малому параметру μ проводится по схеме, предложенной А. Б. Васильевой [3].

Строим формально решение системы (1.1) в виде разложений по степеням μ

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}(\mathbf{r}, t, \mu) = \mathbf{u}_0^1(\mathbf{r}, t) + \mu \mathbf{u}_1^1(\mathbf{r}, t) + \ldots \\
q(\mathbf{r}, t, \mu) = q_0^1(\mathbf{r}, t) + \mu q_1^1(\mathbf{r}, t) + \ldots \\
\omega(t, \mu) = \omega_0^1(t) + \mu \omega_1^1(t) + \ldots
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Начальные условия для соответствующих систем уравнений, получающихся при подстановке этих рядов в систему (1.1), зададим ниже специальным образом. Заметим лишь, что для определения функций $\mathbf{u}_k^1(\mathbf{r}, t)$, $(k = 0, 1, \ldots)$ надо решать стационарные краевые задачи, и, следовательно, начальные значения надо задавать только для функций $\omega_k^1(t)$.

Построим далее формально решение системы (1.1), предварительно сделав в ней замену переменной $\tau = t/\mu$, в виде разложений

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau, \mu) = \mathbf{u}_0^2(\mathbf{r}, \tau) + \mu \mathbf{u}_1^2(\mathbf{r}, \tau) + \ldots \\
q(\mathbf{r}, \tau, \mu) = q_0^2(\mathbf{r}, \tau) + \mu q_1^2(\mathbf{r}, \tau) + \ldots \\
\omega(\tau, \mu) = \omega_0^2(\tau) + \mu \omega_1^2(\tau)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Начальные условия для соответствующих систем уравнений в вариациях задаем следующим образом:

$$\mathbf{u}_0^2(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}^\circ(\mathbf{r}), \;\; \mathbf{u}_k^2(\mathbf{r}, 0) = 0, \;\; \omega_0^2(0) = \omega^\circ, \;\; \omega_k^2(0) = 0 \quad (k > 0) \tag{2.3}$$

Разложим далее все коэффициенты рядов (2.1) по степеням t

$$\mathbf{u}_k^1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{k0}^1(\mathbf{r}) + t\mathbf{u}_{k1}^1(\mathbf{r}) + \ldots$$
$$q_k^1(\mathbf{r}, t) = q_{k0}^1(\mathbf{r}) + tq_{k1}^1(\mathbf{r}) + \ldots \tag{2.4}$$
$$\omega_k^1(t) = \omega_{k0}^1 + t\omega_{k1}^1 + \ldots$$

Подставим ряды (2.4) в (2.1), сделаем замену $\tau = t / \mu$ в получившихся формальных разложениях и перегруппируем члены этих разложений так, чтобы получились ряды по степеням μ

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau, \mu) = \mathbf{u}_{00}^1(\mathbf{r}) + \mu[\mathbf{u}_{10}^1(\mathbf{r}) + \tau\mathbf{u}_{01}^1(\mathbf{r})] + \cdots,$$
$$q(\mathbf{r}, \tau, \mu) = q_{00}^1(\mathbf{r}) + \mu[q_{10}^1(\mathbf{r}) + \tau q_{01}^1(\mathbf{r})] + \cdots \tag{2.5}$$
$$\omega(\tau, \mu) = \omega_{00}^1 + \mu[\omega_{10}^1 + \tau\omega_{01}^1] + \cdots$$

Обозначим коэффициенты при k-й степени μ в получившихся рядах (2.5) через, соответственно, $\mathbf{u}_k^3(\mathbf{r}, \tau)$, $q_k^3(\mathbf{r}, \tau)$, $\omega_k^3(\tau)$. Следовательно,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau, \mu) = \mathbf{u}_0^3(\mathbf{r}, \tau) + \mu\mathbf{u}_1^3(\mathbf{r}, \tau) + \cdots$$
$$q(\mathbf{r}, \tau, \mu) = q_0^3(\mathbf{r}, \tau) + \mu q_1^3(\mathbf{r}, \tau) + \cdots \tag{2.6}$$
$$\omega(\tau, \mu) = \omega_0^3(\tau) + \mu\omega_1^3(\tau) + \cdots$$

Составим, наконец, следующие выражения:

$$G_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u})_n^1 + (\mathbf{u})_n^2 - (\mathbf{u})_n^3, \quad G_n(q) = (q)_n^1 + (q)_n^2 - (q)_n^3$$
$$G_n(\omega) = (\omega)_n^1 + (\omega)_n^2 - (\omega)_n^3 \tag{2.7}$$

Здесь $(\cdot)_n^i$ $(i = 1, 2, 3)$ означает частичные суммы рядов (2.1), (2.2), (2.6). Выражения (2.7) будут частичными суммами асимптотических разложений решения задачи (1.1). Точнее справедливо утверждение.

Для решения системы (1.1) имеют место неравенства

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t, \mu) - G_n(\mathbf{u})\| < a\mu^{n+1}, \quad |\omega(t, \mu) - G_n(\omega)| < a\mu^{n+1} \tag{2.8}$$

для достаточно малых μ и $t \in [0, T]$. Здесь a — постоянная, не зависящая от t и μ, а $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(D)$. Докажем это утверждение.

Предварительно исследуем так называемую присоединенную систему уравнений (систему быстрых движений), отнесенную к начальной точке. Эту систему построим, сделав в (1.1) замену переменной $\tau = t / \mu$, а затем, полагая $\mu = 0$, в результате получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \frac{d\omega}{d\tau} \times \mathbf{r} - \Delta\mathbf{u} + \nabla q, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$
$$J\frac{d\omega}{d\tau} + \frac{d\mathbf{K}}{d\tau} = 0, \quad \mathbf{K} = \rho\int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{u})\, dm \tag{2.9}$$
$$\mathbf{u}|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}^\circ(\mathbf{r}), \quad \omega(0) = \omega^\circ$$

Рассмотрим поведение решений линейной нестационарной задачи (2.9) при $\tau \to \infty$. Из последнего уравнения системы (2.9) следует, что

$$\omega(\tau) = \omega^\circ + \rho J^{-1}\int_D [\mathbf{r} \times (\mathbf{u}^\circ - \mathbf{u})]\, dm \tag{2.10}$$

Заметим далее, что в системе (2.9) отделяется замкнутая подсистема уравнений в частных производных для переменных $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)$, $q(\mathbf{r}, \tau)$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - \rho J^{-1} \int_D \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau}\right) dm \times \mathbf{r} - \Delta \mathbf{u} + \nabla q = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{2.11}$$

$$\mathbf{u}\,|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}^{\circ}(\mathbf{r})$$

Сделаем в системе (2.11) замену переменных

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{w}(\mathbf{r})\, e^{\lambda\tau}, \qquad q(\mathbf{r}, \tau) = s(\mathbf{r})\, e^{\lambda\tau} \tag{2.12}$$

Тогда получим

$$\Delta \mathbf{w} - \nabla s = \lambda \left[\mathbf{w} - \rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm \times \mathbf{r}\right], \qquad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \ \ \mathbf{w}\,|_{\Gamma} = 0 \tag{2.13}$$

Умножим первое уравнение системы (2.13) на $\overline{\mathbf{w}}$ (черта означает комплексно-сопряженную величину) и проинтегрируем по области D, учитывая при этом, что

$$\int_D \overline{\mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}\, dm = -\int_D |\operatorname{rot} \mathbf{w}|^2\, dm, \qquad \int_D \overline{\mathbf{w}} \nabla s\, dm = 0$$

$$\int_D \overline{\mathbf{w}} \left[\rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm \times \mathbf{r}\right] dm = \rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm \tag{2.14}$$

Тогда получим

$$-\int_D |\operatorname{rot} \mathbf{w}|^2\, dm = \lambda \left[\int_D |\mathbf{w}|^2\, dm - \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm \rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm\right] \tag{2.15}$$

Покажем, что при $\mathbf{w} \neq 0$

$$F(\mathbf{w}) = \int_D |\mathbf{w}|^2\, dm - \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm \rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm > 0 \tag{2.16}$$

Действительно,

$$\begin{gathered} F(\mathbf{w}) = \int_D \left[\overline{\mathbf{w}} - \rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm \times \mathbf{r})\right]\left[\mathbf{w} - \rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm \times \mathbf{r}\right] dm + \\ + \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm \rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm - \int_D \left[\rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm \times \mathbf{r}\right] \times \\ \times \left[\rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm \times \mathbf{r}\right] dm \end{gathered} \tag{2.17}$$

Но

$$\begin{gathered} \int_D \left[\rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm \times \mathbf{r}\right]\left[\rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm \times \mathbf{r}\right] dm = \\ = \left[\rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm\right] \rho^{-1} J_1 \left[\rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm\right] = \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm \rho J^{-1} \times \\ \times \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm - \left[\rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{w}})\, dm\right] \rho^{-1} J_0 \left[\rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{w})\, dm\right] \end{gathered} \tag{2.18}$$

и, следовательно, при $\mathbf{w} \neq 0$

$$F(\mathbf{w}) = \int_D \left[\overline{\mathbf{w}} - \rho J^{-1}\int_D (\mathbf{r}\times\overline{\mathbf{w}})\, dm \times \mathbf{r}\right]\left[\mathbf{w} - \rho J^{-1}\int_D (\mathbf{r}\times\mathbf{w})\, dm\times\mathbf{r}\right] dm +$$

$$+\left[\rho J^{-1}\int_D (\mathbf{r}\times\overline{\mathbf{w}})\, dm\right]\rho^{-1}J_0\left[\rho J^{-1}\int_D (\mathbf{r}\times\mathbf{w})\, dm\right] > 0 \qquad (2.19)$$

В случае достаточно гладкой границы Γ области D имеем [4]

$$\int_D |\operatorname{rot}\mathbf{w}|^2 dm \geqslant c\int_D |\mathbf{w}|^2 dm = c\|\mathbf{w}\|^2 \qquad (2.20)$$

(постоянная c зависит лишь от области D); следовательно,

$$|\lambda| \geqslant \int_D |\operatorname{rot}\mathbf{w}|^2\, dm\, \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \geqslant c\frac{\|\mathbf{w}\|^2}{\|\mathbf{w}\|^2} = c > 0 \qquad (2.21)$$

Доказательство теоремы существования и исследования свойств спектра решения системы (2.11) проведено в работе [5], при этом надо отметить, что соотношение типа (2.16) доказывается автором статьи [5] при некотором дополнительном условии на моменты инерции тела.

Из результатов работы [5], учитывая соотношения (2.16) и (2.21), можно заключить, что для любого начального распределения скоростей $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{r}, 0) \in W_2{}^1$ (см., например, [2]) при $\tau \to \infty$

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{r},\tau)\| \to 0, \quad \|\mathbf{u}(\mathbf{r},\tau)\| < ae^{-\alpha\tau} \quad (|\lambda| > \alpha \geqslant c > 0) \qquad (2.22)$$

Здесь норма понимается как норма в $L_2(D)$. В пределе при $\tau \to \infty$

$$\omega(\tau = \infty) = \omega^\circ + \rho J^{-1}\int_D (\mathbf{r}\times\mathbf{u}^\circ)\, dm \qquad (2.23)$$

Сформулируем, следуя [3], несколько лемм. (Величину, удовлетворяющую неравенству $\|\cdot\| < a\xi$, обозначаем в дальнейшем $[[\xi]]$.)

Лемма 2.1. Имеют место соотношения

$$\mathbf{u}_k^2(\mathbf{r},\tau) = [[\tau^k]], \qquad \omega_k^2(\tau) = [[\tau^k]] \qquad (2.24)$$

Рассмотрим системы в вариациях, получающиеся при подстановке рядов (2.2) в систему (1.1), в которой введено «время» τ.

Система нулевого приближения совпадает с (2.9) и, следовательно,

$$\mathbf{u}_0^2(\mathbf{r},\tau) = [[e^{-\alpha\tau}]] = [[1]], \qquad \omega_0^2(\tau) = [[1]] \qquad (2.25)$$

Выпишем систему первого приближения

$$\frac{\partial\mathbf{u}_1^2}{\partial\tau} + \frac{d\omega_1^2}{d\tau}\times\mathbf{r} - \Delta\mathbf{u}_1^2 + \nabla q_1^2 = -[(\mathbf{u}_0^2\nabla)\mathbf{u}_0^2 + 2\omega_0^2\times\mathbf{u}_0^2], \quad \operatorname{div}\mathbf{u}_1^2 = 0$$

$$J\frac{d\omega_1^2}{d\tau} + \frac{d\mathbf{K}_1^2}{d\tau} = -[\omega_0^2\times(J\omega_0^2 + \mathbf{K}_0^2) - \mathbf{M}_0], \quad \mathbf{K}_1^2 = \rho\int_D (\mathbf{r}\times\mathbf{u}_1^2)\, dm \qquad (2.26)$$

$$\mathbf{u}_1^2|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{u}_1^2(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \omega_1^2(0) = 0$$

Собственные числа однородной краевой задачи, соответствующей системе (2.26), все действительны, отрицательны ($|\lambda| > \alpha \geqslant c > 0$), а возмущения, как легко видеть, не превосходят некоторой постоянной. Поэтому

$$\mathbf{u}_1^2(\mathbf{r}, \tau) = [[\tau]], \quad \omega_1^2(\tau) = [[\tau]] \tag{2.27}$$

Для системы k-го приближения требуемый результат нетрудно получить методом математической индукции.

Заметим далее, что из самого определения функций $\mathbf{u}_k^3(\mathbf{r}, \tau)$, $\omega_k^3(\tau)$ следует, что

$$\mathbf{u}_k^3(\mathbf{r}, \tau) = [[\tau^k]], \quad \omega_k^3(\tau) = [[\tau^k]] \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.28}$$

Введем функции

$$\pi_k(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_k^2(\mathbf{r}, \tau) - \mathbf{u}_k^3(\mathbf{r}, \tau), \quad \pi_k(q) = q_k^2(\mathbf{r}, \tau) - q_k^3(\mathbf{r}, \tau) \tag{2.29}$$

$$\pi_k(\omega) = \omega_k^2(\tau) - \omega_k^3(\tau) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Лемма 2.2. Если задать начальные условия для систем уравнений в вариациях, получающихся при подстановке рядов (2.1) в систему (1.1) определенным указанным ниже образом, то имеют место соотношения

$$\pi_k(\mathbf{u}) = [[e^{-\alpha\tau}]], \quad \pi_k(\omega) = [[e^{-\alpha\tau}]] \quad (\alpha > 0) \tag{2.30}$$

Рассмотрим системы уравнений для $\pi_k(\mathbf{u})$, $\pi_k(q)$, $\pi_k(\omega)$, которые можно получить, вычитая из уравнений для $\mathbf{u}_k^2(\mathbf{r}, \tau)$, $q_k^2(\mathbf{r}, \tau)$, $\omega_k^2(\tau)$ аналогичные уравнения для $\mathbf{u}_k^3(\mathbf{r}, \tau)$, $q_k^3(\mathbf{r}, \tau)$, $\omega_k^3(\tau)$. Система уравнений для $\pi_0(\mathbf{u})$, $\pi_0(q)$, $\pi_0(\omega)$ совпадает по виду с системой (2.2) и, следовательно, для любых начальных условий

$$\pi_0(\mathbf{u}) = [[e^{-\alpha\tau}]] \tag{2.31}$$

Далее

$$\pi_0(\omega) = -J^{-1}\pi_0(\mathbf{K}) + \pi_0(\omega)|_{\tau=0} + J^{-1}\pi_0(\mathbf{K})|_{\tau=0} \tag{2.32}$$

$$\pi_0(\mathbf{K}) = \rho\int_D (\mathbf{r}\times\pi_0(\mathbf{u}))\,dm = [[e^{-\alpha\tau}]]$$

Потребуем, чтобы

$$\pi_0(\omega)|_{\tau=0} = -J^{-1}\pi_0(\mathbf{K})|_{\tau=0} \tag{2.33}$$

При этом условии справедливо соотношение

$$\pi_0(\omega) = [[e^{-\alpha\tau}]] \tag{2.34}$$

Рассмотрим условие (2.33). По определению

$$\pi_0(\omega)|_{\tau=0} = \omega_0^2(0) - \omega_0^3(0), \quad \pi_0(\mathbf{K})|_{\tau=0} = \rho\int_D [\mathbf{r}\times(\mathbf{u}_0^2(\mathbf{r}, 0) - \mathbf{u}_0^3(\mathbf{r}, 0)]\,dm$$

Но

$$\omega_0^2(0) = \omega^\circ, \quad \mathbf{u}_0^2(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}^\circ(\mathbf{r}), \quad \omega_0^3(0) = \omega_{00}^1 = \omega_0^1(0), \quad \mathbf{u}_0^3(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_{00}^1(\mathbf{r}) \tag{2.35}$$

Для $\mathbf{u}^1{}_{00}(\mathbf{r})$ имеем следующую систему уравнений:

$$\Delta\mathbf{u}_{00}^1 - \nabla q_{00}^1, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}_{00}^1 = 0, \quad \mathbf{u}_{00}^1|_\Gamma = 0 \tag{2.36}$$

Следовательно, $\mathbf{u}^1_{00} = 0$ и условие (2.33) эквивалентно соотношению

$$\omega^1_0(0) = \omega^1_{00} = \omega_0{}^\circ + \rho J^{-1} \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{u}^\circ(\mathbf{r}))\, dm \tag{2.37}$$

Выпишем теперь систему уравнений для $\pi_1(\mathbf{u})$, $\pi_1(q)$, $\pi_1(\omega)$

$$\frac{\partial \pi_1(\mathbf{u})}{\partial \tau} + \frac{\partial \pi_1(\omega)}{d\tau} \times \mathbf{r} - \Delta\pi_1(\omega) + \nabla\pi_1(q) =$$
$$= -[(\mathbf{u}^2_0\nabla)\mathbf{u}^2_0 + 2\omega^2_0 \times \mathbf{u}^2_0] + [(\mathbf{u}^3_0\nabla)\mathbf{u}^3_0 + 2\omega^3_0 \times \mathbf{u}^3_0]$$

$$\operatorname{div}\pi_1(\mathbf{u}) = 0, \quad \pi_1(\mathbf{u})\big|_\Gamma = 0, \quad \pi_1(\mathbf{K}) = \rho\int_D (\mathbf{r}\times\pi_1(\mathbf{u}))\, dm \tag{2.38}$$

$$J\frac{d\pi_1(\omega)}{d\tau} + \frac{d\pi_1(\mathbf{K})}{d\tau} = -[\omega^2_0 \times (\mathbf{K}^2_0 + J\omega^2_0)] + [\omega^3_0 \times (\mathbf{K}^3_0 + J\omega^3_0)]$$

Собственные числа однородной краевой задачи, соответствующей системе (2.38), все действительны, отрицательны ($|\lambda| > \alpha \geqslant c > 0$), а возмущения, как легко видеть, не превосходят по норме величины $ae^{-\alpha\tau}$. Следовательно

$$\pi_1(\mathbf{u}) = [[e^{-\alpha\tau}]] \tag{2.39}$$

Потребуем

$$\pi_1(\omega)\big|_{\tau=0} = -J^{-1}\pi_1(\mathbf{K})\big|_{\tau=0} + J^{-1}\int_0^\infty \Phi d\tau \tag{2.40}$$

Здесь

$$\Phi = \omega^2_0 \times (\mathbf{K}^2_0 + J\omega^2_0) - \omega^3_0 \times (\mathbf{K}^3_0 + J\omega^3_0)$$

В этом случае

$$\pi_1(\omega) = -J^{-1}\pi_1(\mathbf{K}) + J^{-1}\int_\tau^\infty \Phi d\tau \tag{2.41}$$

Но

$$\Phi = [[e^{-\alpha\tau}]], \quad \int_\tau^\infty \Phi d\tau = [[e^{-\alpha\tau}]], \quad \pi_1(\mathbf{K}) = [[e^{-\alpha\tau}]]$$

Следовательно $\pi_1(\omega) = [[e^{-\alpha\tau}]]$, и, так как $\pi_1(\mathbf{K}) = [[e^{-\alpha\tau}]]$, то

$$\pi_1(\omega) = [[e^{-\alpha\tau}]] \tag{2.42}$$

Рассмотрим условие (2.40). По определению

$$\pi_1(\omega)\big|_{\tau=0} = \omega^2_1(0) - \omega^3_1(0), \quad \pi_1(\mathbf{K})\big|_{\tau=0} = \rho\int_D [\mathbf{r}\times(\mathbf{u}^2_1(\mathbf{r}, 0) - \mathbf{u}^3_1(\mathbf{r}, 0))]dm$$

Но

$$\omega^2_1(0) = 0, \quad \mathbf{u}^2_1(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \omega^3_1(0) = \omega^1_{10} = \omega^1_1(0), \quad \mathbf{u}^3_1(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}^1_{10}(\mathbf{r}) \tag{2.43}$$

а для нахождения $\mathbf{u}^1_{10}(\mathbf{r})$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{u}^1_{10} - \nabla q^1_{10} - \omega^1_{01} \times \mathbf{r} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}^1_{10} = 0 \\ \mathbf{u}^1_{10}\big|_\Gamma = 0, \quad \omega^1_{01} = J^{-1}[\mathbf{M}_0 - \omega^1_{00} \times J\omega^1_{00}]\end{gathered} \tag{2.44}$$

Следовательно, условие (2.40) будет условием на начальные данные ω^1_{10} в системе, полученной при подстановке рядов (2.1) в систему (1.1).

Налагая аналогичные требования на $\pi_k(\omega)$ при $\tau = 0 (k = 2, 3, \ldots)$, используя лемму 2.1 для оценки правых частей и применяя метод индукции, нетрудно получить нужную оценку и для системы k-го приближения.

Отметим при этом, что

$$\pi_k(\omega)|_{\tau=0} = -\omega^1_{k0}, \qquad \pi_k(\mathbf{u})|_{\tau=0} = -\mathbf{u}^1_{k0}(\mathbf{r}) \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

и что $\mathbf{u}^1_{k0}(\mathbf{r})$ находятся при решении стационарных краевых задач.

Аналогично лемме 2.1 и, как следствие из нее, показывается, что имеют место соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\pi_k(\mathbf{u}) = [[e^{-\alpha\tau}]], \qquad \frac{d}{d\tau}\pi_k(\omega) = [[e^{-\alpha\tau}]] \qquad (\alpha > 0) \tag{2.45}$$

Лемма 2.3. В промежутке $0 \leqslant t \leqslant -b\mu \ln \mu$, где b — некоторая достаточно большая, но фиксированная постоянная, имеют место соотношения

$$G_n(\mathbf{u}) - (\mathbf{u})^2_{n+1} = [[\mu^{n+1}]], \qquad \frac{\partial}{\partial t}[G_n(\mathbf{u}) - (\mathbf{u})^2_{n+1}] = [[\mu^n]]$$

$$G_n(\omega) - (\omega)^2_{n+1} = [[\mu^{n+1}]], \qquad \frac{d}{dt}[G_n(\omega) - (\omega)^2_{n+1}] = [[\mu^n]] \tag{2.46}$$

Доказательство леммы 2.3 в точности повторяет доказательство аналогичной леммы в работе [3].

Разобьем отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$ на две части: участок $0 \leqslant t \leqslant t^\circ = -b\mu \ln \mu$ и участок $t^\circ \leqslant t \leqslant T$, здесь b — некоторая достаточно большая, но фиксированная при $\mu \to 0$ постоянная.

Используя леммы 2.2 и 2.3, можно показать [3], что при подстановке в первое и третье уравнения системы (1.1) вместо решений выражений (2.7) на участке $[0, t^\circ]$ получаются невязки, равные, соответственно, $[[\mu^{n+1}]]$ и $[[\mu^{n+1}]] + [[\mu^n \exp(-\alpha t/\mu)]]$, а на $[t^\circ, T]$ — невязки, равные $[[\mu^{n+1}]]$.

Заметим при этом, что в силу леммы 2.2 на участке $[t^\circ, T]$ в неравенствах (2.8) вместо выражений $G_n(\mathbf{u})$, $G_n(\omega)$ можно взять, соответственно, $(\mathbf{u})^1_n$, $(\omega)^1_n$. Введем теперь функции

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t, \mu) - G_n(\mathbf{u}), \qquad \Omega_{n+1} = \omega(t, \mu) - G_n(\omega) \\ &R_{n+1} = q(\mathbf{r}, t, \mu) - G_n(q) + \mu(\Omega_{n+1} \times \mathbf{r})(G_n(\omega) \times \mathbf{r}) \end{aligned} \tag{2.47}$$

Они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}_{n+1} + \frac{d}{dt}\Omega_{n+1} \times \mathbf{r}\right] - \Delta\mathbf{V}_{n+1} + \nabla R_{n+1} + $$
$$+ \mu[(\mathbf{V}_{n+1}\nabla)\mathbf{V}_{n+1} + 2\Omega_{n+1} \times \mathbf{V}_{n+1}] = \mathbf{f}_1$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_{n+1} = 0, \qquad \mathbf{V}_{n+1}|_\Gamma = 0, \qquad \mathbf{K}_{n+1} = \rho\int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{V}_{n+1})\, dm \tag{2.48}$$

$$J\frac{d}{dt}\Omega_{n+1} + \frac{d}{dt}\mathbf{K}_{n+1} + \Omega_{n+1} \times [J\Omega_{n+1} + \mathbf{K}_{n+1}] = \mathbf{f}_2$$

Здесь

$$\mathbf{f}_1 = [[\mu^{n+1}]], \quad \mathbf{f}_2 = [[\mu^{n+1}]] + [[\mu^n \exp(-\alpha t \mu^{-1})]] \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant t^\circ$$

$$\mathbf{f}_1 = [[\mu^{n+1}]], \quad \mathbf{f}_2 = [[\mu^{n+1}]] \quad \text{при } t^\circ \leqslant t \leqslant T \tag{2.49}$$

Рассмотрим участок $[0, t^\circ]$. В начальной точке $\mathbf{V}_{n+1} = 0$, $\Omega_{n+1} = 0$, поэтому можно в окрестности точки $t = 0$ линеаризовать систему (2.48)

$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}_{n+1} + \frac{d}{dt}\Omega_{n+1}\times\mathbf{r}\right] - \Delta\mathbf{V}_{n+1} + \nabla R_{n+1} = \mathbf{f}_1, \quad \operatorname{div}\mathbf{V}_{n+1} = 0$$

$$J\frac{d}{dt}\Omega_{n+1} + \frac{d}{dt}\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{K}_{n+1} = \rho\int\limits_D (\mathbf{r}\times\mathbf{V}_{n+1})\,dm \tag{2.50}$$

$$\mathbf{V}_{n+1}|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \Omega_{n+1}(0) = 0$$

Как уже было показано, собственные числа однородной краевой задачи, соответствующей системе (2.50), все действительны, отрицательны ($|\lambda| > a/\mu \geqslant c/\mu > 0$). Следовательно,

$$\mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{r}, t, \mu) = \int\limits_0^t \exp(-\alpha(t-\tau)\mu^{-1})[[\mu^n]]\,d\tau = [[\mu^{n+1}]] \tag{2.51}$$

и, так как

$$J\Omega_{n+1} + \mathbf{K}_{n+1} = \int\limits_0^t \{[[\mu^{n+1}]] + [[\mu^n \exp(-\alpha t\mu^{-1})]]\}\,dt = [[\mu^{n+1}]] \tag{2.52}$$

то

$$\Omega_{n+1}(t, \mu) = [[\mu^{n+1}]] \tag{2.53}$$

Выбирая μ достаточно малым, можно обеспечить возможность линеаризации системы (2.48) на всем отрезке $[0, t^\circ]$. Заметим, что

$$\mathbf{V}_{n+1}|_{t=t^\circ} = [[\mu^{n+1}]], \quad \Omega_{n+1}|_{t=t^\circ} = [[\mu^{n+1}]]$$

Поэтому выбирая μ достаточно малым, получим, как и на $[0, t^\circ]$

$$\mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{r}, t, \mu) = [[\mu^{n+1}]], \quad \Omega_{n+1}(t, \mu) = [[\mu^{n+1}]] \quad \text{на } [t^\circ, T] \tag{2.54}$$

Итак, при достаточно малом μ соотношения (2.54), равносильные неравенствам (2.8), справедливы при $t \in [0, T]$.

§ 3. Применение описанного алгоритма для построения асимптотики решения задачи (1.1) с точностью до членов порядка μ^2 вне пограничного слоя по t. Система уравнений для определения нулевого приближения к решению задачи (1.1) вне интервала времени $[0, -b\mu\ln\mu]$ имеет следующий вид:

$$J\frac{d\omega_0^1}{dt} + \omega_0^1\times J\omega_0^1 - \mathbf{M}(t) = 0, \quad \mathbf{u}_0^1 = 0 \tag{3.1}$$

$$\omega_0^1(0) = \omega^\circ + \rho J^{-1}\int\limits_D (\mathbf{r}\times\mathbf{u}^\circ)\,dm$$

Считая, что решение системы (3.1) найдено

$$\omega_0^1(t) = \vartheta(t) \tag{3.2}$$

выпишем систему для определения первого приближения

$$\Delta \mathbf{u}_1^1 - \nabla q_1^1 - \frac{d\boldsymbol{\vartheta}(t)}{dt} \times \mathbf{r} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u}_1^1 = 0$$

$$J\frac{d\boldsymbol{\omega}_1^1}{dt} + \boldsymbol{\vartheta}(t) \times J\boldsymbol{\omega}_1^1 - J\boldsymbol{\vartheta}(t) \times \boldsymbol{\omega}_1^1 + \frac{d\mathbf{K}_1^1}{dt} + \boldsymbol{\vartheta}(t) \times \mathbf{K}_1^1 = 0 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{K}_1^1 = \rho \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{u}_1^1)\, dm, \qquad \mathbf{u}_1^1|_\Gamma = 0$$

$$\boldsymbol{\omega}_1^1(0) = -J^{-1}\left\{\rho \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{u}_1^1(r, 0))\, dm + \int_0^\infty [\boldsymbol{\omega}_0^2 \times (J\boldsymbol{\omega}_0^2 + \mathbf{K}_0^2) - \boldsymbol{\omega}_0^1(0) \times J\boldsymbol{\omega}_0^1(0)]\, d\tau\right\}$$

Значения $\boldsymbol{\omega}_0^2(\tau)$, $\mathbf{K}_0^2(\tau)$ находятся из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0^2}{\partial \tau} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_0^2}{\partial \tau} \times \mathbf{r} - \Delta \mathbf{u}_0^2 + \nabla q_0^2 = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u}_0^2 = 0$$

$$J\frac{d\boldsymbol{\omega}_0^2}{d\tau} + \frac{d\mathbf{K}_0^2}{d\tau} = 0, \qquad \mathbf{K}_0^2 = \rho \int_D (\mathbf{r} \times \mathbf{u}_0^2)\, dm \tag{3.4}$$

$$\mathbf{u}_0^2|_\Gamma = 0, \qquad \mathbf{u}_0^2(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}^\circ(\mathbf{r}), \qquad \boldsymbol{\omega}_0^2(0) = \boldsymbol{\omega}^\circ$$

Решение стационарной краевой задачи в системе (3.3) построено Ф. Л. Черноусько в работе [1]. Из этой работы следует, что

$$\rho \int_D [\mathbf{r} \times \mathbf{u}_1^1(\mathbf{r}, t)]\, dm = -\rho P \frac{d\boldsymbol{\vartheta}(t)}{dt} \tag{3.5}$$

где P — симметрический тензор, зависящий лишь от области D.

Итак, для функции $\boldsymbol{\omega}_1^1(t)$ получаем следующую систему уравнений:

$$J\frac{d\boldsymbol{\omega}_1^1}{dt} + \boldsymbol{\vartheta}(t) \times J\boldsymbol{\omega}_1^1 - J\boldsymbol{\vartheta}(t) \times \boldsymbol{\omega}_1^1 - \rho\left[P\frac{d^2\boldsymbol{\vartheta}(t)}{dt^2} + \boldsymbol{\vartheta}(t) \times P\frac{d\boldsymbol{\vartheta}(t)}{dt}\right] = 0$$

$$\boldsymbol{\omega}_1^1(0) = J^{-1}\left\{\rho P \frac{d\boldsymbol{\vartheta}(t)}{dt}\Big|_{t=0} - J\boldsymbol{\omega}_0^1(0) \times \int_0^\infty [\boldsymbol{\omega}_0^2(\tau) - \boldsymbol{\omega}_0^1(0)]\, d\tau\right\} \tag{3.6}$$

Сумма $\boldsymbol{\omega}_0^1(t) + \mu\boldsymbol{\omega}_1^1(t)$ представляет собой первые два члена разложения маклореновского типа решения системы (1.1) вне пограничного слоя. Она совпадает с точностью до малых порядка μ^2 с решением системы (5.4) в работе [1], если начальные условия для указанной системы задать в виде $\boldsymbol{\omega}_0^1(0) + \mu\boldsymbol{\omega}_1^1(0)$.

Поступила 2 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
2. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
3. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Усп. матем. наук, 1963, т. 18, вып. 3.
4. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1960, вып. 59.
5. Нго Зуй Кан. О движении твердого тела с полостями, наполненными несжимаемой вязкой жидкостью. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 4.