Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

К. Г. Валеев, Р. Ф. Ганиев

(Киев)

Излагается способ изучения колебаний, основанный на методе малого параметра и использующий нелинейные разностные уравнения специальной формы. Математическое обоснование способа изложено в работе [1]. Его сущность заключается в построении вспомогательной системы дифференциальных уравнений, решение которой в некоторые моменты времени совпадает с решением исходной системы. В качестве приложения рассматриваются резонансные случаи в квазилинейных системах, выводится интегральный признак устойчивости по первому приближению для периодических и почти периодических решений.

1. Разностные уравнения. Рассматривается система разностных уравнений порядка m

$$X_{n+1} - X_n = \mu\Psi(X_n, n\mu, \mu) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

Правая часть предполагается достаточное число раз дифференцируемой по всем аргументам в некоторой области, содержащей решение X_n. Параметр μ предполагается малым и $\mu \geqslant 0$. Перейдем от (1.1) к более общей системе разностных уравнений. Введем вспомогательную вектор-функцию $Z(\tau, \mu)$ такую, что

$$Z(n\mu, \mu) = X_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

Система (1.1) запишется в виде

$$Z(\tau + \mu, \mu) - Z(\tau, \mu) = \mu\, \Psi(\tau, Z(\tau, \mu), \mu), \quad \tau = n\mu \tag{1.3}$$
$$\Psi(\tau, Z, \mu) = \Psi_0(\tau, Z) + \mu\, \Psi_1(\tau, Z) + \mu^2\Psi_2(\tau, Z) + \ldots$$

Для возможности применения обычных методов математического анализа будем считать, что τ — непрерывно изменяющийся аргумент. При этом требуем, чтобы система разностных уравнений (1.3) удовлетворялась не только при дискретных значениях $\tau = n\mu$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, а при всех значениях τ. Как показано в работе [1], система (1.3) имеет единственное решение $Z(\tau, \mu)$, которое может быть разложено в асимптотический при $\mu \to 0$ ряд

$$Z(\tau, \mu) = Z_0(\tau) + \mu Z_1(\tau) + \mu^2 Z_2(\tau) + \ldots, \; Z(0, \mu) = X_0 \tag{1.4}$$

Ряд (1.4) обычно расходится, но обладает следующим асимптотическим свойством:

$$\left| Z(\tau, \mu) - \sum_{j=0}^{k} Z_j(\tau)\, \mu^j \right| = O(\mu^{k+1}), \quad \mu \to 0 \tag{1.5}$$

Асимптотический характер разложения (1.4) доказан в работе [1] (стр. 969). Для фактического построения $Z(\tau, \mu)$ можно использовать метод малого параметра, подставляя (1.4) в (1.3) и приравнивая коэффициенты в разложении по степеням параметра μ. В частности, получим для $Z_0(\tau)$ систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dZ_0}{d\tau} = \Psi(\tau, Z_0, 0), \qquad Z_0(0) = X_0 \tag{1.6}$$

Если для системы (1.6) можно найти общее решение, то при произвольном начальном векторе X_0 все векторы $Z_j(\tau)$ могут быть последовательно определены [1].

2. **Вспомогательная система дифференциальных уравнений.** В общем случае система (1.6) не интегрируется. Чтобы иметь возможность применять качественные методы, найдем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dZ}{d\tau} = S(\tau, Z, \mu), \qquad Z = X_0, \qquad \tau = 0 \tag{2.1}$$

которой удовлетворяет решение $Z(\tau, \mu)$ системы разностных уравнений (1.3). Систему (2.1) будем называть вспомогательной системой дифференциальных уравнений. Построение вектора $S(\tau, Z, \mu)$ по заданному вектору $\Psi(\tau, Z, \mu)$ вызывает большие затруднения из-за сложного аналитического строения $S(\tau, Z, \mu)$. На примере разностного уравнения первого порядка покажем, что несмотря на аналитичность функции $\Psi(\tau, Z, \mu)$ функция $S(\tau, Z, \mu)$ имеет в точке $\mu = 0$ особенность — точку сгущения полюсов.

Пример 2.1. Решение $z(\tau, \mu)$ разностного уравнения

$$z(\tau+\mu, \mu) - z(\tau, \mu) = -\mu(\tau + 1)^{-2}$$

определяется рядом, сходящимся при $\tau \geqslant 0$ вместе со всеми призводными

$$z(\tau, \mu) = \frac{\mu}{(\tau+1)^2} + \frac{\mu}{(\tau+1+\mu)^2} + \frac{\mu}{(\tau+2+\mu)^2} + \cdots$$

При закрепленном τ функция $z(\tau, \mu)$ имеет полюсы в точках $\mu = -(\tau + 1)n^{-1}$, следовательно, радиус сходимости степенного ряда-разложения $z(\tau, \mu)$ по степеням μ равен нулю. Поэтому следует искать другие формы решения, отличные от асимптотического разложения (1.4). Решение (1.4) зависит от m параметров-координат вектора X_0. Исключая их, приходим к системе дифференциальных уравнений (2.1), где

$$S(\tau, Z, \mu) = S_0(\tau, Z) + \mu S_1(\tau, Z) + \mu^2 S_2(\tau, Z) + \ldots \tag{2.2}$$

Векторы $S_j(\tau, Z)$ легко определяются по известным векторам $\Psi_j(\tau, Z)$ посредством дифференцирования. Получим (вывод см., например, [1])

$$S_0(\tau, Z) = \Psi_0(\tau, Z) \tag{2.3}$$
$$S_j(\tau, Z) + G_j(S_0, S_1, \ldots, S_{j-1}) = \Psi_j^*(\tau, Z) \quad (j = 1,2,3,\ldots)$$

Здесь проекциями G_j будут полиномы от проекций уже вычисленных векторов $S_0(\tau, Z), \ldots, S_{j-1}(\tau, Z)$ и их производных. Из-за особенности при $\mu = 0$ разложение (2.2), как правило, расходится. Поэтому следует искать другие виды аналитического представления вектора $S(\tau, Z, \mu)$.

В частности, укажем способ построения вспомогательной системы (2.1), использующей символические операторы Δ, d.

$$S(\tau, Z, \mu) = \Psi(\tau, Z, \mu) - \frac{\Delta}{2}\Psi(\tau, Z, \mu) + \frac{\Delta^2}{3}\Psi(\tau, Z, \mu) - \ldots \qquad (2.4)$$

Выражения для $\Delta^k\Psi$ вычисляются при помощи системы разностных уравнений (1.3) и имеют вид

$$\Phi_{k+1}(\tau, Z, \mu) = \Phi_k(\tau + \mu, \quad Z + \mu\Psi(\tau, Z, \mu), \mu) - \Phi_k(\tau, Z, \mu) \qquad (2.5)$$

$$\Phi_k(\tau, Z, \mu) \equiv \Delta^k\Psi(\tau, Z, \mu)$$

Обратно, получим для Ψ выражение

$$\Psi(\tau, Z, \mu) = S(\tau, Z, \mu) + \frac{\mu}{2!}dS(\tau, Z, \mu) + \frac{\mu^2}{3!}d^2S(\tau, Z, \mu) + \ldots \qquad (2.6)$$

где d — оператор дифференцирования в силу системы (2.1)

$$d^{k+1}S(\tau, Z, \mu) = \frac{Dd^kS(\tau, Z, \mu)}{DZ}S(\tau, Z, \mu) \qquad (2.7)$$

3. **Метод последовательных замен.** Для решения системы разностных уравнений (1.3) можно предложить метод последовательных замен, который аналогичен методу вариации произвольных постоянных. А именно, решим систему

$$\frac{dZ}{d\tau} = \Psi(\tau, Z, \mu) \qquad (3.1)$$

Представим решение в виде системы интегралов

$$C = \Pi(\tau, Z(\tau), \mu), \qquad C = \mathrm{const} \qquad (3.2)$$

Здесь и далее не записываем μ как аргумент y неизвестных. Эту систему можно разрешить относительно $Z(\tau)$

$$Z(\tau) = \Theta(\tau, C, \mu), \quad \frac{\partial\Theta(\tau, C, \mu)}{\partial\tau} \equiv \Psi(\tau, \Theta(\tau, C, \mu), \mu) \qquad (3.3)$$

Для определенности, в качестве C можно выбрать начальный вектор так, чтобы

$$C \equiv \Pi(0, C, \mu) \qquad (3.4)$$

Заменим теперь постоянный вектор C переменным Y. Будем искать решение системы (1.3) в виде

$$Z(\tau) = \Theta(\tau, Y(\tau), \mu) \qquad (3.5)$$

где $Y(\tau)$ — новый искомый вектор. При этом получим, подставляя в (1.3) и разлагая по степеням μ (3.6)

$$\mu\frac{\partial\Theta(\tau, Y(\tau), \mu)}{\partial\tau} + \frac{D\Theta(\tau, Y(\tau), \mu)}{DY(\tau)}[Y(\tau+\mu) - Y(\tau)] = \mu\Psi(\tau, \Theta(\tau, Y(\tau), \mu)) + O(\mu^2)$$

В силу второго условия (3.3) из уравнения (3.6) получим, что

$$Y(\tau + \mu) - Y(\tau) = O(\mu^2) \qquad (3.7)$$

Однако систему разностных уравнений для $Y(\tau)$ удобнее строить, используя формулу для $Y(\tau)$

$$Y(\tau) = \Pi(\tau, Z(\tau), \mu) \qquad (3.8)$$

Получим систему разностных уравнений

$$Y(\tau + \mu) - Y(\tau) = \Pi(\tau + \mu, Z(\tau) + \mu\Psi(\tau, Z(\tau), \mu), \mu) - \Pi(\tau, Z(\tau), \mu) \qquad (3.9)$$

Исключая затем из правой части $Z(\tau)$, при помощи (3.5) и учитывая (3.7), получим окончательно уравнения вида

$$Y(\tau+\mu)-Y(\tau)=\mu^2\Omega(\tau, Y(\tau), \mu) \tag{3.10}$$

Затем вся процедура повторяется сколько нужно раз. При каждой замене порядок правой части относительно μ увеличивается в два раза. Возможность фактического осуществления замен зависит от возможности решения в общем виде системы (3.1), так как при последующих заменах системы дифференциальных уравнений легко интегрируются асимптотическим методом. Так, для отыскания замены Y следует решить систему уравнений

$$\frac{dY}{d\tau}=\mu\Omega(\tau, Y, \mu) \tag{3.11}$$

При решении системы (3.11) можно изменить в правой части члены порядка μ, в системе (3.11) можно изменить члены порядка μ^3 и выше и т. д. Этим произволом можно воспользоваться при интегрировании систем (3.1), (3.11).... Отметим, что метод замен аналогичен методу, использованному А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом для дифференциальных уравнений [2].

Пример 3.1. Найдем приближенное решение разностного уравнения

$$z(\tau+\mu)-z(\tau)=\mu z^2(\tau) \tag{3.12}$$

Решая вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{d\tau}=z^2, \qquad c=\frac{z}{1+z\tau}, \qquad z=\frac{c}{1-c\tau}$$

получаем приближенное решение для z. Делаем в разностном уравнении замену

$$z(\tau)=\frac{y(\tau)}{1-\tau y(\tau)}, \qquad y(\tau)=\frac{z(\tau)}{1+\tau z(\tau)} \tag{3.13}$$

Приходим к разностному уравнению для $y(\tau)$

$$y(\tau+\mu)-y(\tau)=\mu^2y^2(\tau)\ [1+(\mu-\tau)y(\tau)+\mu^2y^2(\tau)]^{-1}$$

Решая вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{d\tau}=\mu\frac{y^3}{1+y(\mu-\tau)+\mu^2y^2}$$

находим приближенное выражение для $y(\tau)$

$$y(\tau)=c+\mu c^2\ln(1-c\tau)+\mu^2c^3\left[\ln^2(1-c\tau)+\frac{\ln(1+c\tau)+2}{1+c\tau}\right]+O(\mu^3)$$

Подставляя $y(\tau)$ в $z(\tau)$ (3.13) получим решение уравнения (3.12) с точностью до малых порядка μ^2 включительно.

4. Асимптотическое интегрирование существенно нелинейных колебательных систем. Рассмотрим систему уравнений с малым параметром μ

$$\frac{dX}{dt}=F(t, X, \mu), \qquad F(t+2\pi, X, \mu)\equiv F(t, X, \mu) \tag{4.1}$$

Предполагаем, что решения системы (4.1) продолжимы по t, а правая часть $F(t, X, \mu)$ достаточное число раз дифференцируема по всем аргументам в достаточно большой области. Предположим, что общее решение системы

$$X=\Phi(t, X_0, \mu), \qquad \Phi(0, X_0, \mu)=X_0 \tag{4.2}$$

удовлетворяет условию

$$\Phi(t+2\pi, X_0, 0)\equiv\Phi(t, X_0, 0) \tag{4.3}$$

т. е. при $\mu = 0$ все решения системы (4.1) становятся 2π-периодичными. Примером такой системы будет система в стандартной форме

$$\frac{dX}{dt} = \mu F(t, X, \mu), \qquad F(t + 2\pi, X, \mu) \equiv F(t, X, \mu) \tag{4.4}$$

которая удобна для применения асимптотических методов [3]. При $\mu = 0$ все решения постоянны и удовлетворяют условию (4.3).

Введем обозначение

$$X_n = \Phi(2\pi n, X_0, \mu) \tag{4.5}$$

В силу периодичности правой части системы (4.1) имеем

$$X_{n+1} = \Phi(2\pi, X_n, \mu), \qquad \Phi(2\pi, X_n, \mu) = X_n + O(\mu) \tag{4.6}$$

Окончательно систему разностных уравнений, связывающую X_n и X_{n+1}, можно записать в виде

$$X_{n+1} - X_n = \mu\Psi(X_n, \mu) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.7}$$

$$\mu\Psi(X_n, \mu) \equiv \Phi(2\pi, X_n, \mu) - X_n$$

Для фактического построения вектор-функции $\Psi(X_n, \mu)$ или решения (4.2) при $t = 2\pi$ можно использовать различные приближенные способы. Предполагаем, что при $\mu = 0$ система (4.1) полностью интегрируется, поэтому можно применять метод малого параметра [4]. Система разностных уравнений (1.3) уже не содержит явно τ и имеет вид

$$Z(\tau + \mu, \mu) - Z(\tau, \mu) = \mu\Psi(Z(\tau, \mu), \mu) \tag{4.8}$$

$$\Psi(Z, \mu) = \Psi_0(Z) + \mu\Psi_1(Z) + \mu^2\Psi_2(Z) + \ldots$$

Вспомогательная система уравнений также не содержит явно τ

$$dZ/d\tau = S(Z, \mu) \tag{4.9}$$

Вектор $Z(\tau, \mu)$ при $\tau = n\mu$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) принимает значения, совпадающие со значениями X_n, принимаемыми решением (4.2) системы (4.1) при $t = 2\pi n$. Совершая в (4.9) замену независимой переменной по формуле

$$2\pi\tau = \mu t \tag{4.10}$$

приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} S(Z, \mu), \quad S(Z, \mu) = S_0(Z) + \mu S_1(Z) + \mu^2 S_2(Z) + \ldots \tag{4.11}$$

Решения систем (4.1) и (4.11) совпадают при $t = 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Из периодичности системы (4.1) вытекает, что если значения Z, t соответствуют значениям X, t, то значения Z, $t + 2\pi$ соответствуют значениям X, $t + 2\pi$. Поэтому между X и Z существует соответствие периодическое по t с периодом 2π

$$X = P(t, Z, \mu), \qquad P(t + 2\pi, Z, \mu) \equiv P(t, Z, \mu) \tag{4.12}$$

$$P(t, Z, \mu) = P_0(t, Z) + \mu P_1(t, Z) + \mu^2 P_2(t, Z) + \ldots$$

Уравнения в (4.12) можно разрешить относительно Z

$$Z = Q(t, X, \mu), \qquad Q(t + 2\pi, X, \mu) \equiv Q(t, X, \mu) \tag{4.13}$$
$$Q(t, X, \mu) = Q_0(t, X) + \mu Q_1(t, X) + \mu^2 Q_2(t, X) + \ldots$$

Соотношения (4.12), (4.13) можно найти, интегрируя системы (4.1), (4.11). Однако проще сразу искать замену вида (4.12), которая приводит неавтономную систему уравнений (4.1) к автономной системе стандартного вида. При $\mu = 0$ получим

$$\frac{\partial P_0(t, Z)}{\partial t} = F(t, P_0(t, Z), 0), \qquad P_0(t, Z) \equiv \Phi(t, Z, 0) \tag{4.14}$$

Если система (4.1) интегрируется при $\mu = 0$, то, подставляя (4.12) и (4.11) в (4.1), можем последовательно определить $P_0, P_1, \ldots, S_0, S_1, \ldots$ Асимптотический характер полученных решений следует из теоремы 1 [1].

Пример 4.1. Найдем приближенное решение существенно нелинейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 \cos t - \mu x$$

асимптотическим методом. При $\mu = 0$ уравнение интегрируется

$$x = \frac{c}{1 + c \sin t}, \qquad c = \frac{x}{1 - x \sin t}; \qquad x = c, \quad t = 0$$

Поэтому ищем замену (4.12) в виде

$$x = \frac{z}{1 + z \sin t} + \mu P_1(t, z) + \ldots, \qquad \frac{dz}{dt} = \mu S_0(z) + \ldots$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, имеем

$$s_0(z) + \frac{\partial}{\partial t}\left[(1 + z \sin t)^2 p_1(t, z)\right] = -z - z^2 \sin t$$

Отсюда находим выражения для $s_0(z)$, $p_1(t, z)$

$$s_0(z) = -z, \qquad p_1(t, z) = \frac{z^2 \cos t}{(1 + z \sin t)^2}$$

Осуществляя интегрирование, находим приближенное решение

$$x = \frac{c}{e^{\mu t} + c \sin t} + \mu \frac{c^2 \cos t}{(e^{\mu t} + c \sin t)^2} + O(\mu^2)$$

Замечание 4.1. Для системы (4.4), приведенной к стандартной форме, замена (4.12) примет более простой вид

$$X = Z + \mu P(t, Z, \mu), \qquad P(t + 2\pi, Z, \mu) \equiv P(t, Z, \mu) \tag{4.15}$$

так как решения системы (4.4), (4.11) пересекаются в моменты $t = 2n\pi$ и производные пропорциональны μ. Можно сразу осуществлять замену

$$X = Z + \mu P_1(t, Z) + \mu^2 P_2(t, Z) + \mu^3 P_3(t, Z) + \ldots \tag{4.16}$$

переводящую неавтономную систему (4.4) в автономную (4.11). Если на систему (4.11) наложить условие, чтобы ее решение $Z(t)$ и решение системы (4.1) совпадали бы в моменты $t = 2n\pi$, то вспомогательная система (4.11) строится единственным образом. Использование вспомогательной автономной системы (4.11) для асимптотического интегрирования было предложено в работах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова [5,6] и было развито Ю. А. Митропольским [3,7]. Замена (4.16), построение ее совместно с системой (4.11) приводит к асимптотическому методу интегрирования. Следовательно, для систем вида (4.4) асимптотический метод интегрирования вытекает как частный, но удобный для практики приближенный прием применения метода малого параметра к методу точечных отображений. Для первого приближения асимптотического метода, называемого методом осреднения, это указано Ю. И. Неймарком в работе [8].

Замечание 4.2. Использование разностных уравнений дает метод асимптотического интегрирования для дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X, \mu, \mu t), \qquad F(t+2\pi, X, \mu, 0) \equiv F(t, X, \mu, 0) \tag{4.17}$$

Подробное исследование уравнений (4.17), содержащих медленное время μt, проводилось в работах Ю. А. Митропольского [7].

Замечание 4.3. Все рассмотренные авторами аналитические методы исследования нелинейных колебаний, например, метод припасовывания, метод медленно меняющихся коэффициентов (метод Ван-дер-Поля) [9], метод эквивалентной линеаризации, стробоскопический метод Минорского [10,11], метод Пуанкаре [4] и т. д., приводятся к решению нелинейных разностных уравнений, как правило, вида (1.1). В более сложных случаях использование общего метода точечных отображений [12] еще недостаточно разработано. Оно приводит к разностным уравнениям вида

$$X_{n+1} = X_n + F(X_n, \mu n, \mu), \qquad F(X_n, \mu n, 0) \not\equiv 0$$

которые не будут изучаться в этой работе.

5. Отыскание периодических решений. Периодическим решениям системы (4.1) соответствуют неподвижные точки отображения (4.6). Начальный вектор X_0 удовлетворяет системе уравнений

$$\Psi(X_0, \mu) \equiv \Psi_0(X_0) + \mu\Psi_1(X_0) + \mu^2\Psi_2(X_0) + \ldots = 0 \tag{5.1}$$

При отыскании периодического решения с помощью асимптотических методов приходим к вспомогательной системе (4.11). Постоянным решениям системы (4.11) соответствуют периодические решения системы (4.1). Начальный вектор X_0, определяющий периодическое решение, удовлетворяет системе уравнений

$$S(X_0, \mu) \equiv S_0(X_0) + \mu S_1(X_0) + \mu^2 S_2(X_0) + \ldots = 0 \tag{5.2}$$

Как следует из формул (2.4) — (2.7), связывающих Ψ, S, уравнения (5.1), (5.2) равносильны. Поэтому периодические решения, полученные асимптотическим методом и методом Пуанкаре [4], будут совпадать с любой степенью точности. Это было показано непосредственным вычислением для первых приближений в работе [13]. Здесь важно отметить, что, построив уравнения (5.1), определяющие начальные значения для периодического решения, можно, не обращаясь к системе (4.1), построить вспомогательную систему (4.11). К системе (4.11) в силу ее единственности приходим асимптотическим методом [5-7], который позволяет исследовать устойчивость периодических решений. Поэтому метод Пуанкаре может быть использован для исследования переходных процессов. Обычно это делалось лишь в окрестности неподвижной точки [12]. В частности, получим из (2.3), (2.4) приближенную формулу

$$\begin{aligned} S(Z, \mu) &= 1.5\Psi(Z, \mu) - 0.5\Psi(Z + \mu\Psi(Z, \mu), \mu) + O(\mu^2) = \\ &= \Psi(Z, \mu) - 0.5\mu\frac{D\Psi(Z, \mu)}{DZ}\Psi(Z, \mu) + O(\mu^2) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Пример 5.1. Рассмотрим в первом приближении устойчивость в резонансном случае $n = 1, 2, 3, \ldots$ решений уравнения

$$x^{\cdot\cdot} + n^2 x = \mu F(t,\ x,\ x^{\cdot},\ \mu), \qquad F(t + 2\pi,\ x,\ x^{\cdot},\ \mu) \equiv F(t,\ x,\ x^{\cdot},\ \mu) \tag{5.4}$$

Задавая начальные условия

$$x = a,\ x^{\cdot} = b,\ t = 0$$

получаем приближенное решение

$$x(t) = x_0(t) + \frac{\mu}{n}\int_0^t F(\tau,\ x_0(\tau),\ x_0^{\cdot}(\tau),\ \mu)\sin n(t-\tau)\,d\tau + O(\mu^2)$$

$$x_0(t) \equiv a\cos nt + bn^{-1}\sin nt$$

Подставляя значение $t = 2\pi$, вычисляем новые начальные значения

$$a_1 \equiv x(2\pi) = a + \mu P(a,\ b) + O(\mu^2), \qquad b_1 \equiv x^{\cdot}(2\pi) = b + \mu Q(a,b) = O(\mu^2)$$

где введены обозначения

$$P(a,\ b) = -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} F(\tau,\ x_0(\tau),\ x^{\cdot}_0(\tau),\ 0)\sin n\tau\,d\tau$$

$$Q(a,\ b) = \int_0^{2\pi} F(\tau,\ x_0(\tau),\ x_0^{\cdot}(\tau),\ 0)\cos n\tau\,d\tau$$

Разностные уравнения для координат точки пересечения интегральной кривой с плоскостями $t = 2n\pi$ имеют вид

$$a_{n+1} - a_n = \mu P(a_n,\ b_n) + O(\mu^2), \qquad b_{n+1} - b_n = \mu Q(a_n, b_n) + O(\mu^2)$$

Следовательно, дифференциальные уравнения для медленно меняющихся переменных a, b примут вид (4.11)

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} P(a,\ b) + O(\mu^2), \qquad \frac{db}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} Q(a,\ b) + O(\mu^2) \tag{5.5}$$

Если имеется простое решение $a = a_0$, $b = b_0$ уравнений

$$P(a,\ b) = 0, \qquad Q(a,\ b) = 0$$

то уравнение (5.4) имеет периодическое решение. Устойчивость решений в первом приближении определяется устойчивостью линеаризированной при $a = a_0$, $b = b_0$ системой (5.5)

$$\frac{d(a-a_0)}{dt} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{\partial P(a_0,\ b_0)}{\partial a_0}(a - a_0) + \frac{\mu}{2\pi}\frac{\partial P(a_0,\ b_0)}{\partial b_0}(b - b_0) + O(\mu^2)$$

$$\frac{d(b-b_0)}{dt} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{\partial Q(a_0,\ b_0)}{\partial a_0}(a - a_0) + \frac{\mu}{2\pi}\frac{\partial Q(a_0,\ b_0)}{\partial b_0}(b - b_0) + Q(\mu^2)$$

Для асимптотической устойчивости решений достаточно, чтобы корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \partial P(a_0,\ b_0)/\partial a_0 - \lambda & \partial P(a_0,\ b_0)/\partial b_0 \\ \partial Q(a_0,\ b_0)/\partial a_0 & \partial Q(a_0,\ b_0)/\partial b_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.6}$$

имели отрицательные вещественные части. Этот вывод получен в [4] (стр. 80). Первое приближение при использовании разностных уравнений фактически совпадает со стробоскопическим методом Минорского [9,10], который ограничивался лишь первым приближением (как в этом примере) и обычно на фазовой плоскости переходил к полярным координатам. Естественно, что первое приближение асимптотического метода [5–7], называемое обычно методом осреднения, приведет к системе (5.5), так же как и метод Ван-дер-Поля [11] (стр. 76).

6. Сложный резонансный случай. Рассмотрим квазилинейную систему

$$\frac{dX}{dt}=AX+\mu F(t,X,\mu),\qquad F(t+2\pi,X,\mu)\equiv F(t,X,\mu) \tag{6.1}$$

Предположим, что при $\mu=0$ все решения системы периодичны с периодом 2π, т. е.

$$\exp\{A2\pi\}=E \tag{6.2}$$

Решая систему (6.1) с начальным вектором X_0 находим решение

$$X(t)=e^{At}X_0+\mu\int_0^t e^{A(t-\tau)}F(\tau,e^{A\tau}X_0,\mu)\,d\tau+O(\mu^2) \tag{6.3}$$

Система разностных уравнений (4.7) принимает вид

$$X_{n+1}-X_n=\mu\int_0^{2\pi}e^{-A\tau}F(\tau,e^{A\tau}X_n,0)\,d\tau+O(\mu^2) \tag{6.4}$$

Приравнивая правую часть в (6.4) нулю, получим уравнения для отыскания начального вектора X_0, определяющего периодическое решение. Это периодическое решение будет асимптотически устойчиво, если асимптотически устойчиво решение $Z=X_0$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dZ}{dt}=\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-A\tau}F(\tau,e^{A\tau}Z,0)\,d\tau \tag{6.5}$$

Для этого достаточно, чтобы все собственные числа матрицы якобиана

$$J=D\int_0^{2\pi}e^{-A\tau}F(\tau,e^{A\tau}Z,0)\,d\tau/DZ \tag{6.6}$$

имели отрицательные вещественные части. Если матрица (6.6) имеет также нулевые собственные числа с элементарными делителями первой степени, то периодическое решение системы (6.1) будет устойчивым по первому приближению. В сомнительных случаях вопрос об устойчивости иногда решается при помощи непосредственно системы (6.5).

Пример 6.1. Изучим устойчивость периодического решения уравнения

$$x^{\cdot\cdot}+x+\mu x^2\sin t=0 \tag{6.7}$$

уравнения (5.5) имеют вид

$$\frac{da}{dt}=\frac{\mu}{8}(a^2+3b^2)+O(\mu^2),\qquad \frac{db}{dt}=-\frac{\mu}{4}ab+O(\mu^2) \tag{6.8}$$

Для периодического решения получим $a_0=0$, $b_0=0$. Уравнение (5.6) имеет кратный нулевой корень. Применение метода малого параметра в его обычной трактовке [4] требует вычисление следующих приближений. Между тем достаточно рассмотреть интегральные кривые системы (6.8) на плоскости ab, чтобы заключить о неустойчивости решения $a=0$, $b=0$ системы (6.8), т. е. периодического решения $x=0$ уравнения (6.7). Устойчивое по первому приближению решение $x=0$ будет неустойчивым при учете следующих приближений.

7. Интегральный признак устойчивости (в форме, отличной от использованной в работах [14–16]). Рассмотрим колебания системы, описываемой обобщенными координатами $q_1,\ldots,q_n$. Для простоты считаем, что для невозмущенной системы возможен переход к главным координатам. Кинетический потенциал имеет вид

$$L(q_i, q_i^{\cdot}, \omega t, \mu) \equiv T - \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(q_i^{\cdot 2} - \omega_i^2 q_i^2) + \mu l_1(q_i, q_i^{\cdot}, \omega t, \mu) \tag{7.1}$$

Предполагаем, что $\mu > 0$, μ — малый параметр и выполнено условие периодичности

$$l(q_i, q_i^{\cdot}, \Theta + 2\pi, \mu) \equiv l(q_i, q_i^{\cdot}, \Theta, \mu)$$

Рассматривается случай, близкий к резонансному, когда частота возмущения ω и собственные частоты ω_i невозмущенной системы ($\mu = 0$) находятся в рациональном отношении. Считаем, что

$$\frac{\omega_i}{\omega} \approx \frac{p_i}{N}, \quad \omega_i^2 - \nu_i^2 = O(\mu), \quad \nu_i = \frac{p_i\omega}{N} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.2}$$

Здесь p_i — целые неотрицательные числа, N — достаточно большое положительное число. Получаем для кинетического потенциала

$$L(q_i, q_i^{\cdot}, \omega t, \mu) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(q_i^{\cdot 2} - \nu_i^2 q_i^2) + \mu l(q_i, q_i^{\cdot}, \omega t, \mu) \tag{7.3}$$

$$l(q_i, q_i^{\cdot}, \omega t, \mu) \equiv l_1(q_i, q_i^{\cdot}, \omega t, \mu) + \mu^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{2}(\nu_i^2 - \omega_i^2)$$

Все решения невозмущенной системы ($\mu = 0$) с кинетическим потенциалом L (7.3) периодичны с общим периодом $T = 2\pi N\omega^{-1}$. Дифференциальные уравнения Лагранжа принимают вид

$$q_i^{\cdot\cdot} + \nu_i^2 q_i = -\mu\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial l}{\partial q_i}\right], \quad \nu_i = \frac{p_i\omega}{N} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.4}$$

В нулевом приближении получим порождающее решение

$$q_{i0}(t) = a_i \cos \nu_i t + (b_i / \nu_i) \sin \nu_i t \tag{7.5}$$

Здесь a_i, b_i — начальные значения $q_i(t)$, $q_i^{\cdot}(t)$ при $t = 0$. Вычислим новые начальные значения a_{i1}, b_{i1} через период T. С помощью метода малого параметра получаем

$$q_i(t) = q_{i0}(t) - \frac{\mu}{\nu_i}\int_0^t\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial l}{\partial q_i}\right]_0 \sin\nu_i(t-\tau)\,d\tau + O(\mu^2) \tag{7.6}$$

Выражение в квадратной скобке под знаком интеграла вычисляется для порождающего решения $q_{i0}(\tau)$, $q_{i0}^{\cdot}(\tau)$, что будем обозначать снизу нуликом. Приходим к точечному отображению (7.7)

$$a_{i1} = a_i + \mu T P_i(a_j, b_j) + O(\mu^2), \quad b_{i1} = b_i + \mu T Q_i(a_j, b_j) + O(\mu^2)$$

где введены обозначения

$$P_i(a_j, b_j) = \frac{1}{\nu_i T}\int_0^T \left[\frac{d}{d\tau}\frac{\partial l}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial l}{\partial q_i}\right]_0 \sin\nu_i\tau\, d\tau, \quad T = \frac{2\pi N}{\omega} \tag{7.8}$$

$$Q_i(a_j, b_j) = -\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{d}{d\tau}\frac{\partial l}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial l}{\partial q_i}\right]_0 \cos\nu_i\tau\, d\tau, \quad \mu = 0$$

После интегрирования по частям внеинтегральные члены обратятся в нуль из-за периодичности подынтегральных функций и получим

$$P_i(a_j, b_j) = -\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{\partial l}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot}}}\cos\nu_i\tau + \frac{\partial l}{\partial q_i}\frac{\sin\nu_i\tau}{\nu_i}\right]_0 d\tau = -\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{\partial l}{\partial b_i}\right]_0 d\tau \tag{7.9}$$

$$Q_i(a_j, b_j) = -\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{\partial l}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot}}}\nu_i\sin\nu_i\tau + \frac{\partial l}{\partial q_i}\cos\nu_i\tau\right]_0 d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{\partial l}{\partial a_i}\right]_0 d\tau$$

Введем вспомогательную функцию

$$\Lambda(a_j, b_j) = \frac{1}{T}\int_0^T L(q_{i0}(\tau), q_{i0}^{\boldsymbol{\cdot}}(\tau), \omega\tau)\, d\tau = \frac{\mu}{T}\int_0^T [l]_0\, d\tau \tag{7.10}$$

Последнее равенство выполняется, так как для порождающего решения выполнено соотношение

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n [q_{i0}^{\boldsymbol{\cdot}2}(\tau) - \nu_i^2 q_{i0}^2(\tau)]_0\, d\tau \equiv 0 \tag{7.11}$$

Здесь $\Lambda(a_j, b_j)$ — среднее значение кинетического потенциала L возмущенной системы, вычисленное для невозмущенного решения (7.5). Так как N в T может быть взято сколь угодно большим, то можем принять

$$\Lambda(a_j, b_j) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T L(q_{i0}(\tau), q_{i0}^{\boldsymbol{\cdot}}(\tau), \omega\tau, \mu)\, d\tau, \quad \Lambda = O(\mu) \tag{7.12}$$

При этом в качестве порождающего решения $q_{i0}(\tau)$ берем выражения, определяемые формулами (7.5). Они определяют гармонические колебания с частотами ν_i, рационально соизмеримыми с частотой возмущения ω. Отображение (7.7) принимает вид

$$a_{i1} = a_i - T\frac{\partial\Lambda}{\partial b_i} + O(\mu^2), \qquad b_{i1} = b_i + T\frac{\partial\Lambda}{\partial a_i} + O(\mu^2) \tag{7.13}$$

Соответствующая система дифференциальных уравнений (4.11) в первом приближении будет канонической

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial b_i} + O(\mu^2), \qquad \frac{db_i}{dt} = \frac{\partial\Lambda}{\partial a_i} + O(\mu^2) \tag{7.14}$$

Уравнения для отыскания периодического решения в первом приближении имеют вид

$$\frac{\partial\Lambda(a_j, b_j)}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial\Lambda(a_j, b_j)}{\partial b_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.15}$$

Следовательно, начальные значения a_{i0}, b_{i0}, определяющие периодическое решение, будут координатами стационарной точкой для функции $\Lambda(a_j, b_j)$. Уравнения (7.14) имеют интеграл энергии

$$\Lambda(a_j, b_j) = \text{const} + O(\mu^2) \tag{7.16}$$

Поверхности с уравнением (7.16) будут замкнуты в фазовом пространстве переменных a_j, b_j в окрестности стационарной точки a_{i0}, b_{i0}, если в этой точке будет находиться минимум или максимум функции $\Lambda(a_j, b_j)$. В других случаях поверхности (7.16) не будут замкнутыми. Окончательно доказали теорему.

Теорема. (Интегральный признак устойчивости.) Вычислим среднее значение $\Lambda(a_j, b_j)$ кинетического потенциала возмущенной системы $(\mu \neq 0)$ вдоль периодического решения невозмущенной системы $(\mu = 0)$ как функцию начальных значений a_i, b_i. Если функция Λ имеет в точке a_{i0}, b_{i0} минимум или максимум, то точка a_{i0}, b_{i0} определяет устойчивое по первому приближению периодическое решение. Другие стационарные точки требуют специального рассмотрения.

Пример 7.1. Рассмотрим систему с кинетическим потенциалом

$$L(x, x^\cdot, t) = {}^1/_2\,(x^{\cdot 2} - x^2 - \mu\lambda x^2) + \mu x x^\cdot \sin 2t$$

Соответствующее дифференциальное уравнение будет линейным дифференциальным уравнением Матье

$$x^{\cdot\cdot} + (1 + \mu\lambda + 2\mu\cos 2t)x = 0 \tag{7.17}$$

При $\mu = 0$ уравнение имеет решение

$$x_0(t) = a\cos t + b\sin t$$

Вычислим среднее значение кинетического потенциала для этого решения

$$\Lambda \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(x_0(\tau), x_0^\cdot(\tau), \tau)\,d\tau = \frac{\mu}{4}\left[-(\lambda+1)a^2 + (1-\lambda)b^2\right]$$

В стационарной точке $a = 0$, $b = 0$ функция $\Lambda(a, b)$ имеет минимум при $\lambda < -1$ и максимум при $\lambda > 1$. При $-1 < \lambda < 1$ точка $a = 0$, $b = 0$ будет седловой. Следовательно, при $|\lambda| > 1$ имеем устойчивое нулевое решение уравнения (7.17), а при $|\lambda| > 1$ неустойчивое нулевое решение. При $\lambda = \pm 1$ стационарная точка определяется неоднозначно, что соответствует существованию семейства периодических решений. Выводы примера согласуются с известными результатами [17].

Замечание 7.1. Интегральный признак может быть существенно обобщен для систем, являющихся в нулевом приближении каноническими. Он тесно связан с теорией возмущений [18]. Сформулируем без доказательства и уточнений один из выводов. Рассматривается каноническая система дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона H

$$H \equiv H(t, q_j, p_j, \mu) \tag{7.18}$$

которая почти периодична по t и дважды дифференцируема по всем аргументам. Пусть порождающая каноническая система

$$q_s^\cdot = \frac{\partial H_0}{\partial p_s}, \quad p_s^\cdot = -\frac{\partial H_0}{\partial q_s}, \quad H_0 = H(t, q_j, p_j, 0) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{7.19}$$

имеет порождающее решение

$$q_s = q_{s0}^{\sim}(t, a_j, b_j), \qquad p_s = p_{s0}^{\sim}(t, a_j, b_j) \tag{7.20}$$

где a_j, b_j — начальные значения q_j, p_j при $t = 0$. Принимая a_j, b_j за новые переменные и допуская применимость метода усреднения [19] к системе уравнений

$$\frac{da_s}{dt} = \frac{\partial (H - H_0)}{\partial b_s}, \quad \frac{db_s}{dt} = -\frac{\partial (H - H_0)}{\partial a_s} \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{7.21}$$

получим устойчивость решения системы с функцией Гамильтона H (7.18) относительно параметров a_j, b_j, если функция $\Lambda(a_j, b_j)$

$$\Lambda(a_j, b_j) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Big[\sum_{s=1}^n p_{s0} q^{\cdot}_{s0} - H(t, q_{j0}, p_{j0}, \mu) \Big] dt \tag{7.22}$$

имеет при этих значениях a_j, b_j минимум или максимум.

Признак устойчивости применим для исследования устойчивости почти периодических решений. В качестве параметров можно брать произвольные постоянные, не обязательно совпадающие с начальными условиями.

Пример 7.2. Найдем при помощи интегрального признака условие устойчивости при комбинационном резонансе решений системы

$$q_1^{\cdot\cdot} + \omega_1^2 q_1 - 2\mu q_2 \cos\omega t = 0, \quad q_2^{\cdot\cdot} + \omega_2^2 q_2 - 2\mu q_1 \cos\omega t = 0, \quad \omega \approx \omega_1 + \omega_2$$

Система будет канонической с функцией Гамильтона

$$H(q_j, p_j, t) = {}^1\!/_2 (p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2 + p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) + 2\mu q_1 q_2 \cos\omega t$$

Выберем порождающее решение

$$q_1 = A_1 \cos(\nu_1 t + \alpha_1), \quad q_2 = A_2 \cos(\nu_2 t + \alpha_2), \quad \omega_1 - \nu_1 = O(\mu), \quad \omega_2 - \nu_2 = O(\mu)$$

такое, чтобы выполнялось точное соотношение

$$\nu_1 + \nu_2 = \omega, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 - (\omega_1 - \nu_1) - (\omega_2 - \nu_2)$$

Среднее значение кинетического потенциала имеет вид

$$\Lambda(A_j, \alpha_j) = {}^1\!/_4 \, [A_1^2(\omega_1^2 - \nu_1^2) + 2\mu A_1 A_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + A_2^2(\omega_2^2 - \nu_1^2)]$$

В точке $A_1 = A_2 = 0$, соответствующей нулевому решению, имеет место минимум или максимум в случае выполнения условия

$$(\omega_1^2 - \nu_1^2)(\omega_2^2 - \nu_2^2) > \mu^2$$

Условие можно упростить и преобразовать к виду

$$4\omega_1\omega_2(\omega_1 - \nu_1)(\omega_2 - \nu_2) > \mu^2 + O(\mu^3)$$

Меняя ν_1, ν_2, получим наибольшую область устойчивости при

$$\omega_1 - \nu_1 = \omega_2 - \nu_2$$

Область устойчивости определяется неравенством

$$|\omega - \omega_1 - \omega_2| > \frac{\mu}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}$$

Замечание 7.3. Отметим, что ответ верный, несмотря на то, что метод усреднения непосредственно неприменим [20] к получающимся в процессе вывода уравнением (7.21). Отметим интересную работу [21], в которой рассматривается усреднение в канонических системах. Другим путем вывод примера получен в работе [22].

8. **Устойчивость систем с трением.** Пусть на систему, рассмотренную в п. 7, действует трение с функцией рассеяния Рэлея [23]

$$F = {}^1\!/_2 \mu (\varepsilon_1 q_1^{\cdot 2} + \varepsilon_2 q_2^{\cdot 2} + \ldots + \varepsilon_n q_n^{\cdot 2}), \quad \varepsilon_j \geqslant 0 \tag{8.1}$$

Уравнения (7.4) принимают вид

$$q_i^{\cdot\cdot} + \mu\varepsilon_i q_i^{\cdot} + \nu_i^2 q_i = -\mu \left[\frac{d}{dt} \frac{dl}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{dl}{\partial q_i} \right] \tag{8.2}$$

После замены (7.5), перехода к разностным уравнениям, а затем к дифференциальным получим уравнения первого приближения

$$\frac{da_i}{dt}=-\frac{\partial\Lambda}{\partial b_i}-\frac{\partial R}{\partial a_i},\qquad \frac{db_i}{dt}=\frac{\partial\Lambda}{\partial a_i}-\frac{\partial R}{\partial b_i} \tag{8.3}$$

где используются обозначения: (8.4)

$$\Lambda(a_j, b_j)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T L(q_{i0}(\tau), q_{i0}^{\cdot}(\tau), \omega\tau, \mu)\,d\tau,\qquad R(a_j, b_j)=\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(a_i^2+b_i^2)$$

Уравнения (8.3) позволяют исследовать переходные процессы. Для отыскания почти периодических или периодических решений следует приравнять правые части (8.3) нулю. Для исследования устойчивости найденных a_{j0}, b_{j0} по первому приближению введем матрицы P, Q, R, L с элементами, вычисленными в точке a_{j0}, b_{j0}

$$p_{ks}=\frac{\partial^2\Lambda}{\partial a_k\partial a_s},\qquad q_{ks}=\frac{\partial^2\Lambda}{\partial a_k\partial b_s},\qquad r_{ks}=\frac{\partial^2\Lambda}{\partial b_k\partial b_s},\qquad l_{ks}=\frac{\mu\varepsilon k}{2}\delta_{ks} \tag{8.5}$$

Здесь δ_{ks} — символ Кронекера: $\delta_{kk}=1$, $\delta_{ks}=0$ $(k\neq s)$.

Характеристическое уравнение системы в вариациях имеет вид

$$\operatorname{Det}\begin{Vmatrix}\lambda E+L+Q' & R\\ -P & \lambda E+L-Q\end{Vmatrix}=0 \tag{8.6}$$

Здесь в блочной матрице обозначаем через E единичную матрицу, а через Q' — матрицу, сопряженную к Q. В случае простых резонансов, когда лишь одна из собственных частот системы при $\mu=0$ равна удвоенной частоте возмущения, необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости можно найти из неравенства

$$\operatorname{Det}\begin{Vmatrix}P & Q-L\\ Q'+L & R\end{Vmatrix}>0 \tag{8.7}$$

Пример 8.1. Исследуем устойчивость колебаний с кинетическим потенциалом L

$$L={}^1/_2\,(x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}-\omega_1^2x^2-\omega_2^2y^2)+\mu cx^2y+yq\sin\omega t,\qquad \omega\approx 2\omega_1$$

и функцией рассеивания Рэлея

$$F={}^1/_2\mu(\varepsilon_1x^{\cdot 2}+\varepsilon_2y^{\cdot 2}),\qquad \varepsilon_1>0,\qquad \varepsilon_2>0$$

Получаем дифференциальные уравнения нулевого приближения

$$x^{\cdot\cdot}+0.25\omega^2x=0,\qquad y^{\cdot\cdot}+\omega_2^2y=q\sin\omega t$$

За порождающее решение примем выражения

$$x=a_1\cos\frac{\omega}{2}t+\frac{2b_1}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}t,\qquad y=a_2\cos\omega_2t+\frac{b_2}{\omega_2}\sin\omega_2t+\frac{q}{\omega_2^2-\omega^2}\sin\omega t$$

Из формулы (8.4) получим при $\omega_2\neq\omega_1$, $2\omega_2\neq\omega_1$, $\omega_2\neq 0$

$$\Lambda=\frac{a_1^2}{2}\left(\frac{\omega^2}{4}-\omega_1^2\right)+\frac{b_1^2}{2}\left(1-\frac{4\omega_1^2}{\omega^2}\right)+\frac{\mu ca_1b_1q}{2\omega(\omega_2^2-\omega^2)}$$

Условие устойчивости (8.7) принимает вид

$$\frac{\mu^2\varepsilon_2^2}{4}\left[\frac{(\omega^2-4\omega_1^2)}{4\omega^2}+\frac{\mu^2\varepsilon_1^2}{4}-\frac{\mu^2c^2q^2}{4\omega^2(\omega_2^2-\omega^2)}\right]>0$$

После упрощений оно преобразуется к неравенству

$$4(\omega-2\omega_1)^2+\mu^2\varepsilon_1^2-\frac{\mu^2c^2q^2}{\omega^2(\omega_2^2-\omega^2)}>0$$

Как видно из примера, не обязательно составление полных дифференциальных уравнений движения для того, чтобы исследовать устойчивость. Поэтому интегральный признак особенно удобен при исследовании устойчивости колебаний сложных механических систем.

9. Канонические разностные уравнения. Для канонической системы дифференциальных уравнений с малым параметром μ

$$q_s^{\cdot} = \mu \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad p_s^{\cdot} = -\mu \frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad H = H(q_i, p_j, t) \quad (s = 1, \ldots, n) \qquad (9.1)$$

где функция Гамильтона H достаточное число раз дифференцируема и 2π-периодична по t, применим асимптотический метод [5-7].

Введем в рассмотрение общее решение системы (9.1)

$$q_s = \varphi_s(t, a_j, b_j, \mu), \quad p_s = \psi_s(t, a_j, b_j, \mu) \quad (s = 1, \ldots, n) \qquad (9.2)$$

с начальными условиями

$$q_s = a_s, \quad p_s = b_s, \quad t = 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Найдем отображение, определяемое решением (9.2) через период 2π

$$a_{s,k+1} = \Phi_s(a_{jk}, b_{jk}, \mu), \quad b_{s,k+1} = \Psi_s(a_{jk}, b_{jk}, \mu) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (9.3)$$

$$\Phi_s(a_j, b_j, \mu) \equiv \varphi_s(2\pi, a_j, b_j, \mu), \quad \Psi_s(a_j, b_j, \mu) \equiv \psi_s(2\pi, a_j, b_j, \mu)$$

Из-за каноничности системы (9.1) имеет место относительный интегральный инвариант [23] (стр. 302)

$$\int\limits_{C_{k+1}} \sum_{s=1}^{n} \Psi_s \delta\Phi_s = \int\limits_{C_k} \sum_{s=1}^{n} b_{sk} \delta a_{sk} \qquad (9.4)$$

Здесь C_k — замкнутый контур в $2n$-мерном пространстве, получающийся из C_0 при помощи k последовательных отображений (9.3). Разностные уравнения (9.3), удовлетворяющие условию (9.4), будем называть каноническими. Введем вспомогательную систему дифференциальных уравнений вида (4.9) для разностных уравнений (9.3). Ее решение при $\tau = k\mu$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) имеет относительный интегральный инвариант. Отсюда можно получить (переходя к пределу при $\mu \to 0$), что вспомогательная система имеет относительный интегральный инвариант вида

$$\int \sum_{k=1}^{n} p_k \delta q_k$$

и, следовательно, будет канонической. Делая замену (4.10), имеем

$$u_s^{\cdot} = \mu \frac{\partial H_1(u_j, v_j, \mu)}{\partial v_s}, \quad v_s^{\cdot} = -\mu \frac{\partial H_1(u_j, v_j, \mu)}{\partial u_s} \quad (s = 1, \ldots, n) \qquad (9.5)$$

Итак, существует каноническое преобразование переменных

$$q_s = u_s + \sum_k \mu^k U_k(u_j, v_j, t), \quad p_s = v_s + \sum_k \mu^k V_k(u_j, v_j, t) \qquad (9.6)$$

переводящее каноническую систему (9.1) в каноническую автономную систему (9.5). Таким образом, применяя асимптотический метод к канонической системе, можем получить вспомогательную автономную систему в каноническом виде. Другим путем это доказано в работе [24].

Замечание 9.1. Можно искать функцию $W(q_j, u_j, t, \mu)$, определяющую каноническое преобразование по формулам

$$v_s = \frac{\partial W}{\partial u_s}, \qquad p_s = -\frac{\partial W}{\partial q_s} \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{9.7}$$

и такую, что функция H_1 не содержит времени t

$$H_1 = H - \frac{\partial W}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial t} \equiv 0 \tag{9.8}$$

10. Сложный резонанс в автономных системах. Рассматривается система с $n + 1$ степенью свободы

$$x_i^{\cdot\cdot} + \omega_i^2 x_i = \mu f_i(x_j, x_j^{\cdot}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \quad \omega_i \neq 0 \tag{10.1}$$

где отношение любых двух частот ω_i будет рациональным числом. Заменой независимой переменной можно привести систему (10.1) к случаю, когда все ω_i будут целыми положительными числами, с общим наибольшим делителем, равным единице. Ищем решение с начальными условиями

$$x_0 = u, \quad x_0^{\cdot} = 0, \quad x_i = y_i, \quad x_i^{\cdot} = z_i \quad (i = 1, \ldots, n), \quad t = 0 \tag{10.2}$$

При $\mu = 0$ все решения (10.1) будут периодичны с периодом 2π. Найдем при $\mu > 0$ отображение, осуществляемое вдоль траекторий системы (10.1) от момента $t = 0$ до момента t^*, близкого к 2π, в который $x_0^{\cdot} = 0$. Практически удобнее найти предварительное значение переменных в момент 2π. Имея в нулевом приближении при $\mu = 0$

$$x_{00}(t) = u \cos \omega_0 t, \qquad x_{i0}(t) = y_i \cos \omega_i t + \frac{z_i}{\omega_i} \sin \omega_i t \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{10.3}$$

с помощью метода малого параметра находим

$$x_i(t) = x_{i0}(t) + \mu x_{i1}(t) + O(\mu^2) \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{10.4}$$

$$x_{i1}(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f_i(x_{j0}(\tau), x_{j0}^{\cdot}(\tau)) \sin \omega_i (t - \tau)\, d\tau$$

Обозначая далее многоточием члены порядка μ^2 и выше, получим значения при $t = 2\pi$

$$x_0(2\pi) = u + \mu x_{01}(2\pi) + \ldots, \quad x_0^{\cdot}(2\pi) = \mu x_{01}^{\cdot}(2\pi) + \ldots \tag{10.5}$$

$$x_i(2\pi) = y_i + \mu x_{i1}(2\pi) + \ldots, \quad x_i^{\cdot}(2\pi) = z_i + \mu x_{i1}^{\cdot}(2\pi) + \ldots$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

Сдвинемся теперь вдоль траекторий в момент t^*, в который $x_0^{\cdot}(t^*) = 0$. Для этого перейдем от (10.1) к системе первого порядка

$$x_i^{\cdot} = u_i, \quad u_i^{\cdot} = -\omega_i^2 x_i + \mu f_i(x_j, u_j).$$

Возьмем за независимую переменную u_0. Получим систему

$$\frac{dx_i}{du_0} = \frac{u_i}{-\omega_0^2 x_0 + \mu f_0(x_j, u_j)}, \qquad \frac{du_i}{du_0} = \frac{-\omega_i^2 x_i + \mu f_i(x_j, u_j)}{-\omega_0^2 x_0 + \mu f_0(x_j, u_j)} \tag{10.6}$$

Решая ее приближенно с начальными условиями (10.5), до значения $u_0 = 0$, находим

$$x_0(t^*) = u + \mu x_{01}(2\pi) + \ldots, \quad x_0^{\cdot}(t^*) = 0, \quad t^* = 2\pi + \frac{\mu}{\omega_0^2 u} x_{01}^{\cdot}(2\pi) + \ldots \tag{10.7}$$

$$x_i(t^*) = y_i + \mu \left[x_{i1}(2\pi) + \frac{z_i}{\omega_0^2 u} x_{01}^{\cdot}(2\pi) \right] + \ldots$$

$$x_i^{\cdot}(t^*) = z_i + \mu \left[x_{i1}^{\cdot}(2\pi) - \frac{\omega_i^2 z_i}{\omega_0^2 u} x_{01}^{\cdot}(2\pi) \right] + \ldots$$

Формулы (10.7) определяют точечное преобразование значений u, y_i, z_i в аналогичные значения в момент t^*, который сам зависит от u, y_i, z_i. Перейдем к вспомогательной системе дифференциальных уравнений вида (4.11). Найдем из (10.4), (10.7) уравнения первого приближения

$$\frac{du}{ds} = -\frac{\mu}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}[f_0]\sin\omega_0\tau\,d\tau + O(\mu^2)$$

$$\frac{dy_i}{ds} = -\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{[f_i]\frac{\sin\omega_i\tau}{\omega_i} - [f_0]\frac{z_i\cos\omega_0\tau}{\omega_0^2 u}\right\}d\tau + O(\mu^2) \qquad (10.8)$$

$$\frac{dz_i}{ds} = \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{[f_i]\cos\omega_i\tau - [f_0]\frac{y_i\omega_i^2}{u\omega_0^2}\cos\omega_0\tau\right\}d\tau + O(\mu^2)$$

Получили автономную систему порядка $2n+1$ вместо первоначального порядка $2n+2$. Система удобна для применения приближенных методов из-за малого множителя у правых частей. Переменная s обозначает местное время вдоль каждой траектории. Она связана с t дифференциальным уравнением

$$\frac{dt}{ds} = 1 - \frac{\mu}{2\pi\omega_0 u}\int_0^{2\pi}[f_0]\cos\omega_0\tau\,d\tau + O(\mu^2) \qquad (10.9)$$

Выражения в квадратных скобках вычисляются для порождающего решения (10.3).

Периодическое решение находится приравниванием правых частей системы (10.8) нулю. Для исследования устойчивости используем уравнения в вариациях, которые в данном случае будут линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Пример 10.1. Для системы дифференциальных уравнений

$$x_0'' + n^2x_0 = \mu x_1^2 x_0', \quad x_1'' + m^2 x_1 = -\mu x_0^2 x_1', \quad \mu > 0, \quad m \neq n$$

уравнения (10.8), (10.9) имеют вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\mu u}{4}(y^2 + z^2 m^{-2}), \quad \frac{ds}{dt} = 1 + O(\mu^2), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu}{4}yu^2, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\mu}{4}zu^2$$

Система уравнений после замен

$$p = u^2, \quad q = y^2 + z^2m^{-2}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\mu}{2}pq, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\mu}{2}pq$$

легко интегрируется. Не решая уравнений, отметим, что существуют два семейства периодических решений. Устойчивое

$$x_0 = 0, \quad x_1 = y\cos mt + zm^{-1}\sin mt, \quad p = 0$$

и неустойчивое

$$x_0 = u\cos nt, \quad x_1 = 0, \quad q = 0$$

Все решения переходят в устойчивое периодическое решение таким образом, чтобы выполнялось условие

$$p + q = C, \quad u^2 + y^2 + z^2m^{-2} = C$$

Из уравнений находим приближенное решение

$$x_0(t) = C_1(1 + C_2 e^{0.5\mu C_1^2 t})^{-1/2} \cos(nt + C_3)$$

$$x_1(t) = C_1(1 + C_2^{-1} e^{-0.5\mu C_1^2 t})^{-1/2} \sin(mt + C_4)$$

содержащее четыре произвольных постоянных.

В заключение отметим, что резонанс в системе дифференциальных уравнений (10.1) облегчает исследование.

Поступила 22 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Валеев К. Г. К теории метода точечных отображений. Изв. вузов, Радиофизика, 1968, т. 11, № 7.
2. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Усп. матем. наук, 1963, т. 18, вып. 5, стр. 113.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
4. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
5. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев, Изд-во АН УССР, 1934.
6. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев, Изд-во АН УССР, 1937.
7. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., «Наука», 1964.
8. Неймарк Ю. И. Метод усреднения с точки зрения метода точечных отображений. Изв. вузов, Радиофизика, 1963, т. 6, № 5.
9. Каудерер Г. Нелинейная механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961, стр. 608.
10. Minorsky N. Sur la méthode stroboscopique. Compt. Rend. Acad. Sci., 1963, vol. 256, No. 19.
11. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний. Л., Судпромгиз, 1962.
12. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Тр. Международн. симпоз. по нелинейным колебаниям. Киев, Изд-во АН УССР, 1963, т. 2.
13. Проскуряков А. П. Сравнение периодических решений квазилинейных систем, построенных методом Пуанкаре и методом Крылова — Боголюбова. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
14. Блехман И. И., Лавров Б. П. Об одном интегральном признаке устойчивости движения. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
15. Блехман И. И. Обоснование интегрального признака устойчивости движения в задачах о самосинхронизации вибраторов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
16. Нагаев Р. Ф. Синхронизация в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
17. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложение функций Матье. Изд-во иностр. лит., 1953.
18. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
19. Митропольский Ю. А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1966.
20. Hsu C. S. On the parametric excitation of a dinamic system having multiple degrees of freedom. Trans. ASME, Ser. E, J. appl. mech., 1963, vol. 30, No. 3. (Рус. перев.: О параметрическом возбуждении динамических систем со многими степенями свободы. Прикл. механ., 1963, № 3.)
21. Musa Samuel A. Integral constraints in weakly nonlinear periodic systems. SIAM J. appl. math., 1967, vol. 15, No. 5.
22. Валеев К. Г. К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Определение характеристических показателей. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
23. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., 1937.
24. Федорченко А. М. Метод канонического усреднения в теории нелинейных колебаний. Укр. матем. ж., 1957, т. 9, № 2.