Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМАМ ЛЯПУНОВА

А. Ф. Клейменов, С. Н. Шиманов

(Свердловск)

Известное определение систем Ляпунова [1] обобщается на системы с последействием. Исследуется система, близкая к системе Ляпунова с последействием, с периодической по t малой добавкой. Доказана теорема о существовании периодического решения. Рассмотрен пример.

1. Рассматривается система, описываемая уравнениями с последействием вида

$$\frac{dx}{dt} = \int_{-\tau}^{0} x(t+\vartheta)\, d\eta(\vartheta) + X(x(t+\vartheta)) + \mu F(t, x(t+\vartheta), \mu) \qquad (1.1)$$

где x — n-мерный вектор, $\eta(\vartheta)$ — $n \times n$ — матрица функций $\eta_{ij}(\vartheta)$ с ограниченной вариацией, определенных на отрезке $[-\tau, 0]$; интеграл понимается в смысле Стилтьеса; $X(x(\vartheta)) = \{X_i(x(\vartheta))\}$ — нелинейный функционал, определенный на кусочно-непрерывных функциях $x(\vartheta)$, $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$ (с разрывами первого рода), ограниченных по норме $\|x(\vartheta)\| < R$, где $R > 0$

$$\| x(\vartheta) \| = \sup (| x_1(\vartheta)|, \ldots, | x_n(\vartheta) |), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0 \qquad (1.2)$$

При подстановке в функционал $X(x(\vartheta))$ любой аналитической относительно y и дифференцируемой по ϑ вектор-функции $x(y, \vartheta)$ получаем аналитическую функцию $X(x(y, \vartheta)) = X_1(y)$.

Функционал $F(t, x(\vartheta), \mu) = \{F_i(t, x(\vartheta), \mu)\}$ (μ — малый параметр) будет непрерывной и периодической с периодом 2π функцией t, а также непрерывной функцией μ; $|\mu| \leqslant \mu^*$, $\mu^* > 0$, $t \subset (-\infty, \infty)$.

Будем предполагать, что в некоторой области G пространства кусочно-непрерывных функций $[-\tau, 0]$ существуют вторая производная Фреше функционала X и первая производная Фреше функционала F, так что можно записать:

$$X(x(\vartheta) + z(\vartheta)) - X(x(\vartheta)) = X'(x(\vartheta))(z(\vartheta)) + \\ + {}^1/_2 X''(x(\vartheta))(z(\vartheta), z(\vartheta)) + \omega_2(x(\vartheta), z(\vartheta)) \qquad (1.3)$$

$$F(t, x(\vartheta) + z(\vartheta), \mu) - F(t, x(\vartheta), \mu) = \\ = F'(t, x(\vartheta), \mu)(z(\vartheta)) + \omega_1(t, x(\vartheta), z(\vartheta), \mu)$$

где X', F' — линейные функционалы от $z(\vartheta)$, X'' — квадратичный функционал от $z(\vartheta)$

$$\lim_{\|z(\vartheta)\|\to 0}\frac{\|\omega_2(x(\vartheta), z(\vartheta))\|}{\|z(\vartheta)\|^2} = 0, \qquad \lim_{\|z(\vartheta)\|\to 0}\frac{\|\omega_1(t, x(\vartheta), z(\vartheta), \mu)\|}{\|z(\vartheta)\|} = 0$$

Кроме того, будем предполагать, что производные X'', F' удовлетворяют в области G условиям Липшица по $z(\vartheta)$.

Рассмотрим «порождающую» систему

$$\frac{dx}{dt} = \int_{-\tau}^{0} x(t+\vartheta)\,d\eta(\vartheta) + X(x(t+\vartheta)) \tag{1.4}$$

Если в качестве элемента решения принять вектор-отрезок

$$x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta) \qquad (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$$

то системе (1.4) в функциональном пространстве B кусочно-непрерывных функций с нормой (1.2) будет соответствовать система «обыкновенных» дифференциальных уравнений с операторной правой частью [2]

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta) + R(x_t(\vartheta)) \tag{1.5}$$

$$Ax(\nu) = \left\{\frac{dx(\nu)}{d\nu} \quad \text{при } -\tau \leqslant \nu < 0, \quad \int_{-\tau}^{0} x(\nu)\,d\eta(\nu) \quad \text{при } \nu = 0\right\}$$

$$R(x(\nu)) = \{0 \quad \text{при } -\tau \leqslant \nu < 0, \quad X(x(\nu)) \quad \text{при } \nu = 0\}$$

Пусть характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv \left| -E\lambda + \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda\vartheta}\,d\eta(\vartheta)\right| = 0 \tag{1.6}$$

имеет пару простых чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm\,\omega i$.

Предположим также, что остальные корни характеристического уравнения (1.6) имеют отрицательные действительные части.

В [3] показывается, что в этом случае можно ввести сопряженные переменные y, $\bar{y}$ и вектор-функцию $z_{1t}(\vartheta)$ по следующим формулам:

$$y = f\,[x_t(\vartheta)], \quad \bar{y} = \bar{f}\,[x_t(\vartheta)], \quad z_{1t}(\vartheta) = x_t(\vartheta) - b(\vartheta)\,y - \bar{b}(\vartheta)\,\bar{y} \tag{1.7}$$

$$f\,[x_t(\vartheta)] = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jk_1}(\omega i)\left\{-x_{jt}(0) + \sum_{l=1}^{n}\int_{-\tau}^{0}\left[\int_{0}^{\vartheta} x_{lt}(\xi)\,e^{\omega i(\vartheta-\xi)}\,d\xi\right]d\eta_{jl}(\vartheta)\right\} \tag{1.8}$$

$$b(\vartheta) = \{b_j(\vartheta)\} = \{\Delta_{l_1 j}(\omega i)\,e^{\omega i\vartheta}\}\,d^{-1}, \qquad d = \Delta_{l_1k_1}(\omega i)\left[\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\omega i} \tag{1.9}$$

Здесь $\Delta_{jl}(\omega i)$ — алгебраическое дополнение элемента определителя $\Delta(\omega i)$, расположенного в пересечении j-й строки и l-го столбца ($\Delta_{l_1k_1}(\omega i) \neq$ $\neq 0$).

В переменных y, $\bar{y}$, $z_{1t}(\vartheta)$ система (1.5) примет вид (1.10)

$$dy / dt = \omega i y + Y_1(y, \bar{y}, z_{1t}(\vartheta)), \quad d\bar{y} / dt = -\omega i \bar{y} + \overline{Y}_1(\bar{y}, y, z_{1t}(\vartheta))$$
$$dz_{1t}(\vartheta) / dt = A z_{1t}(\vartheta) + Z_1(y, \bar{y}, z_{1t}(\vartheta)), \quad z_{1t}(\vartheta) \subset L : f[z_{1t}(\vartheta)] = 0$$

Здесь Y_1, Z_1 удовлетворяют всем требованиям, наложенным на X; кроме того, Z_1 принимает только действительные значения. В [3] показано, что переменные y, $\bar{y}$, $z_{1t}(\vartheta)$ взаимно однозначно связаны с $x(\vartheta)$ и поэтому системы (1.4) и (1.10) эквивалентны.

Систему (1.10) будем называть системой Ляпунова с последействием, если выполнены следующие условия:

1) характеристическое уравнение (1.6), кроме пары простых корней $\lambda_{1,2} = \pm\, \omega i$, не имеет корней вида $\pm N\omega i$ (N — целое число, включая нуль);

2) система (1.10) допускает первый интеграл вида

$$y\bar{y} + S_1(y, \bar{y}, z_{1t}(\vartheta)) = \text{const} \tag{1.11}$$

где S_1 — аналитическая функция y, $\bar{y}$ и функционал от $z_{1t}(\vartheta)$. Порядок S_1 по всем аргументам в окрестности точки $y = \bar{y} = z_{1t}(\vartheta) = 0$ выше второго.

Отметим, что при наличии интеграла вида (1.11), имеет место особый случай [3] при исследовании на устойчивость системы (1.10).

В переменных y, $\bar{y}$, $z_{1t}(\vartheta)$ система (1.1) примет вид

$$dy / dt = \omega i y + Y_1(y, \bar{y}, z_{1t}(\vartheta)) + \mu G_1(t, y, \bar{y}, z_{1t}(\vartheta), \mu) \tag{1.12}$$
$$dy / dt = -\omega i \bar{y} + \overline{Y}_1(\bar{y}, y, z_{1t}(\vartheta)) + \mu \overline{G}_1(t, \bar{y}, y, z_{1t}(\vartheta), \mu)$$
$$dz_{1t}(\vartheta) / dt = A z_{1t}(\vartheta) + Z_1(y, \bar{y}, z_{1t}(\vartheta)) + \mu H_1(t, y, \bar{y}, z_{1t}(\vartheta), \mu)$$

где G_1, H_1 удовлетворяют тем же требованиям, что и F. Кроме того, H_1 принимает только действительные значения.

Для системы (1.12), близкой к системе Ляпунова с последействием, рассмотрим вопрос о существовании и построении периодических решений, обращающихся при $\mu = 0$ в периодическое решение порождающей системы (1.10). Аналогичная задача для системы, содержащей члены с запаздыванием лишь в малых добавках, исследовалась в [4].

2. Порождающая система (1.10) допускает семейство периодических решений [3], зависящее от произвольных постоянных c и h

$$y^\circ(t + h, c), \quad \bar{y}^\circ(t + h, c), \quad z_1{}^\circ{}_{,t+h}(\vartheta, c) \tag{2.1}$$

с начальными условиями $y^\circ(0, c) = \bar{y}^\circ(0, c) = c$, где c — малая по модулю константа. Период решения (2.1) определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\Omega(c)} = \frac{2\pi}{\omega}(1 + h_2 c^2 + h_4 c^4 + \cdots) \tag{2.2}$$

причем ряд (2.2) содержит члены только с четными степенями c. Обозначим через h_{2r} первый из коэффициентов h_i, отличный от нуля.

Из соотношения

$$(1 + h_{2r}c^{2r} + \ldots)\, 2\pi / \omega = 2\pi / m \tag{2.3}$$

где m — произвольное целое число, определим те значения c, при которых решение (2.1) имеет период 2π. При условии $h_{2r}(\omega - m) > 0$ существует только два вещественных корня уравнения (2.3), из которых один будет положительным, а другой отрицательным [1]. Обозначив через c_m один из этих корней и подставив его значение в (2.1), получим решение

$$y^\circ(t + h, c_m), \quad \bar{y}^\circ(t + h, c_m), \quad z^\circ_{1,t+h}(\vartheta, c_m) \tag{2.4}$$

с периодом $2\pi / m$.

Вернемся к системе (1.10). Попытаемся найти такое частное решение системы (1.10), в котором $z_{1t}(\vartheta)$ представимо в виде ряда

$$z_{1t}^*(\vartheta, y, \bar{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} z_{1t}^{(k)}(\vartheta, y, \bar{y}) \qquad (z_{1t}^{(k)}(\vartheta, y, \bar{y}) \subset L) \tag{2.5}$$

Здесь $z_{1t}^{(k)}(\vartheta, y, \bar{y})$ — форма k-го порядка переменных $y, \bar{y}$.

Легко установить, что в этом случае удовлетворяются уравнения

$$\left(\frac{\partial z^{(k)}}{\partial y} y - \frac{\partial z^{(k)}}{\partial \bar{y}} \bar{y}\right)\omega i = Az^{(k)} + Q^{(k)}(\vartheta, y, \bar{y}) \quad (k \geqslant 1), \qquad Q^{(1)}(\vartheta, y, \bar{y}) \equiv 0 \tag{2.6}$$

причем $Q^{(k)}(\vartheta, y, \bar{y})$ при фиксированном k будет известной формой k-го порядка. Пусть

$$Q^{(k)}(\vartheta, y, \bar{y}) = \sum_{p+q=k} b_{pq}^{(k)}(\vartheta)\, y^p \bar{y}^q, \quad z^{(k)}(\vartheta, y, \bar{y}) = \sum_{p+q=k} a_{pq}^{(k)}(\vartheta)\, y^p \bar{y}^q \tag{2.7}$$

Подставим (2.7) в (2.6). Тогда, приравнивая коэффициенты при произведении $y^p \bar{y}^q$, получим

$$[J(p - q)\,\omega i - A]\, a_{pq}^{(k)}(\vartheta) = b_{pq}^{(k)}(\vartheta) \qquad (J\varphi(\vartheta) \equiv \varphi(\vartheta)) \tag{2.8}$$

Здесь J — тождественный оператор.

Заметим, что в подпространстве L спектр оператора A не содержит точек вида $\pm N\omega i$ (N — целое число). Следовательно, операторное уравнение (2.8) однозначно разрешимо относительно $a_{pq}^{(k)}(\vartheta)$, причем

$$a_{pq}^{(k)}(\vartheta) \subset L, \quad a_{pq}^{(1)}(\vartheta) \equiv 0$$

Таким образом, получим ряд (2.5), формально удовлетворяющий системе (1.10). В [3] показано, что если в ряд (2.5) подставить функции y°, $\bar{y}^\circ$ из решения (2.1), то получим сходящийся ряд, представляющий собой периодическое решение $z^\circ_{1,t+h}(\vartheta, c)$.

В системе (1.10) сделаем замену

$$z_{1t}(\vartheta) = z_t(\vartheta) + z_{1t}^*(\vartheta, y, \bar{y}) \tag{2.9}$$

после чего она примет вид (2.10)

$$dy \,/\, dt = \omega i y + Y\,(y,\ \bar y,\ z_t\,(\vartheta)), \qquad d\bar y \,/\, dt = -\,\omega i \bar y + \overline{Y}\,(\bar y,\ y,\ z_t\,(\vartheta))$$

$$dz_t\,(\vartheta) \,/\, dt = A z_t\,(\vartheta) + Z\,(y,\ \bar y,\ z_t\,(\vartheta),\ \vartheta) \qquad (Z\,(y,\ \bar y,\ 0,\ \vartheta) \equiv 0)$$

Периодическое решение (2.4) для системы (2.10) будет

$$y^\circ\,(t + h,\ c_m),\ \bar y^\circ\,(t + h,\ c_m),\ z_t\,(\vartheta) \equiv 0 \tag{2.11}$$

Составим уравнения в вариациях системы (2.10) для решения (2.11)

$$\frac{d\xi}{dt} = \left[\omega i + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\right]\xi + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar y}\right)_0 \bar\xi + Y'\,(y^\circ,\ \bar y^\circ,\ 0)\,(\eta_t\,(\vartheta))$$

$$\frac{d\bar\xi}{dt} = \left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}\right)_0 \xi + \left[-\,\omega i + \left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \bar y}\right)_0\right]\bar\xi + \overline{Y}'\,(y^\circ,\ \bar y^\circ,\ 0)\,(\eta_t\,(\vartheta))$$

$$\frac{d\eta_t\,(\vartheta)}{dt} = A\eta_t\,(\vartheta) + Z'\,(y^\circ,\ \bar y^\circ,\ 0)\,(\eta_t\,(\vartheta)) \tag{2.12}$$

Здесь и в дальнейшем скобки $(\ldots.)_0$ означают подстановку решения (2.11). Легко показать, что система (2.12) допускает единственное периодическое решение вида

$$\left\{\frac{dy^\circ}{dt} = \varphi,\ \frac{d\bar y^\circ}{dt} = \bar\varphi,\ \eta_t\,(\vartheta) \equiv 0\right\} \tag{2.13}$$

Составим «сопряженную» систему

$$\frac{d\xi^*}{dt} = -\left[\omega i + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\right]\xi^* - \left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}\right)_0 \bar\xi^*$$

$$\frac{d\bar\xi^*}{dt} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar y}\right)_0 \xi^* - \left[-\,\omega i + \left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \bar y}\right)_0\right]\bar\xi^*$$

$$\frac{d\eta_t^*\,(\vartheta)}{dt} = -\,A^*\eta_t^*\,(\vartheta) - Z'^*\,(y^\circ,\ \bar y^\circ,\ 0)\,(\eta_t^*\,(\vartheta)) \tag{2.14}$$

$$-\,A^* x\,(\vartheta) = \left\{\frac{dx_k\,(\vartheta)}{d\vartheta} \quad \text{при } 0 < \vartheta \leqslant \tau, \qquad -\int_\tau^0 \sum_{j=1}^n x_j\,(\vartheta)\,d\eta_{jk}\,(-\,\vartheta) \quad \text{при } \vartheta = 0\right\}$$

Аналогично определяется оператор Z'^*. Система (2.14) имеет единственное периодическое решение

$$\{\psi,\ \bar\psi,\ \eta_t^*\,(\vartheta) \equiv 0\}$$

Определим ψ. Если в (2.12) и (2.14) положить $\eta_t\,(\vartheta) = \eta_t^*\,(\vartheta) \equiv 0$, то для решений получающихся систем имеет место соотношение

$$\xi\,\xi^* + \bar\xi\,\bar\xi^* = \mathrm{const} \tag{2.15}$$

Первый интеграл (1.11) для системы (2.10) можно записать в виде

$$N = y\,\bar y + S\,(y,\ \bar y,\ z_t\,(\vartheta)) = \mathrm{const} \tag{2.16}$$

Порядок функции S по всем аргументам в окрестности точки $y = \bar y = z_t\,(\vartheta) = 0$ выше второго. Нетрудно показать, что выражение

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial N}{\partial \bar y}\right)_0 \bar\xi + S'\,(y^\circ,\ \bar y^\circ,\ 0)\,(\eta_t\,(\vartheta)) = \mathrm{const} \tag{2.17}$$

будет первым интегралом системы в вариациях (2.12).

Полагая в (2.17) $\eta_t(\vartheta) \equiv 0$ и сравнивая с (2.15), установим, что в качестве функций ψ, $\overline{\psi}$ можно принять

$$\psi = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)_0, \qquad \overline{\psi} = \left(\frac{\partial N}{\partial \bar{y}}\right)_0 \tag{2.18}$$

Рассмотрим теперь систему (1.12) после замены (2.9)

$$\begin{aligned} dy / dt &= \omega i y + Y(y, \bar{y}, z_t(\vartheta)) + \mu G(t, y, \bar{y}, z_t(\vartheta), \mu) \\ d\bar{y} / dt &= -\omega i \bar{y} + \overline{Y}(\bar{y}, y, z_t(\vartheta)) + \mu \overline{G}(t, \bar{y}, y, z_t(\vartheta), \mu) \\ dz_t(\vartheta) / dt &= A z_t(\vartheta) + Z(y, \bar{y}, z_t(\vartheta), \vartheta) + \mu H(t, y, \bar{y}, z_t(\vartheta), \vartheta, \mu) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь функционал G и оператор H удовлетворяют тем же требованиям, что и G_1, H_1. Введем обозначения

$$G_0 = G(t, y^\circ, \bar{y}^\circ, 0, 0), \qquad H_0 = H(t, y^\circ, \bar{y}^\circ, 0, 0)$$

$$Y_0'(x_t(\vartheta)) = Y'(y^\circ, \bar{y}^\circ, 0)(x_t(\vartheta)), \quad Z_0'(x_t(\vartheta)) = Z'(y^\circ, \bar{y}^\circ, 0)(x_t(\vartheta))$$

$w_t(\vartheta)$ — единственное периодическое решение уравнения

$$\frac{dw_t(\vartheta)}{dt} = A w_t(\vartheta) + Z_0'(w_t(\vartheta)) + H_0, \qquad w_t(\vartheta) \subset L$$

Теорема. Для того чтобы система (2.19) допускала периодическое решение периода 2π, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее (2.11), необходимо, чтобы выполнялось условие (2.20)

$$P(h) \equiv \int_0^{2\pi} \left\{ [G_0 + Y_0'(w_t(\vartheta))] \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)_0 + [\overline{G}_0 + \overline{Y}_0'(w_t(\vartheta))] \left(\frac{\partial N}{\partial \bar{y}}\right)_0 \right\} dt = 0$$

Если к тому же выполнено неравенство

$$\left(\frac{dP(h)}{dh}\right)_{h=h_1} \neq 0 \tag{2.21}$$

где $h = h_1$ — корень уравнения (2.20), то искомое периодическое решение будет единственным. Это решение будет непрерывной функцией μ.

Доказательство. В системе (2.19) сделаем замену

$$y = y^\circ(t + h, c_m) + \mu u(t), \qquad z_t(\vartheta) = \mu v_t(\vartheta)$$

Тогда система (2.19) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left[\omega i + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\right] u + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}}\right)_0 \bar{u} + Y_0'(v_t(\vartheta)) + G_0 + \mu\Phi \\ \frac{d\bar{u}}{dt} &= \left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}\right) u + \left[-\omega i + \left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0\right] \bar{u} + \overline{Y}_0'(v_t(\vartheta)) + \overline{G}_0 + \mu\overline{\Phi} \\ \frac{dv_t(\vartheta)}{dt} &= A v_t(\vartheta) + Z_0'(v_t(\vartheta)) + H_0 + \mu\chi \end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi(t, u, \bar{u}, v_t(\vartheta), \mu) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)_0 u^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial \bar{y}}\right)_0 u\bar{u} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \bar{y}^2}\right)_0 \bar{u}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 u + \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{y}}\right)_0 \bar{u} + \left(\frac{\partial G}{\partial \mu}\right)_0 + G_0'(v_t(\vartheta)) + \\ &+ \left(\frac{\partial Y'}{\partial y}\right)_0 (v_t(\vartheta)) u + \left(\frac{\partial \overline{Y}'}{\partial \bar{y}}\right)_0 (v_t(\vartheta)) \bar{u} + Y_0''(v_t(\vartheta), v_t(\vartheta)) + \mu(\ldots) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Аналогичным образом определяется χ.

Положим в системе (2.22) $\mu=0$. Тогда из последнего уравнения находим $v_t^{(0)}(\vartheta) = w_t(\vartheta)$, причем $w_t(\vartheta)\subset L$. Подставим вектор-функцию $v_t^{(0)}(\vartheta) = w_t(\vartheta)$ в первые два уравнения системы (2.22) при $\mu=0$. Чтобы полученная система допускала периодическое решение u°, $\bar u^\circ$, необходимо должно выполняться условие (2.20). Допустим, что выбором $h=h_1$ условие (2.20) выполнено. Докажем, что если к тому же имеет место (2.21), то существует единственное периодическое решение системы (2.22). Наряду с системой (2.22) рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{du_1}{dt}=\left[\omega i+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\right]u_1+\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar y}\right)_0\bar u_1+Y_0'(v_{1t}(\vartheta))+G_0+\mu\Phi+W\varphi^*$$

$$\frac{d\bar u_1}{dt}=\left(\frac{\partial \bar Y}{\partial y}\right)_0u_1+\left[-\omega i+\left(\frac{\partial \bar Y}{\partial \bar y}\right)_0\right]\bar u_1+\bar Y_0'(v_{1t}(\vartheta))+\bar G_0+\mu\bar\Phi+W\bar\varphi^* \qquad (2.24)$$

$$\frac{dv_{1t}(\vartheta)}{dt}=Av_{1t}(\vartheta)+Z_0'(v_{1t}(\vartheta))+H_0+\mu\chi,\quad W=-\frac{\mu}{2\pi K}\int_0^{2\pi}[\Phi\psi+\bar\Phi\bar\psi]\,dt$$

$$\varphi^*=\left(\frac{\partial y^\circ}{\partial c}+\frac{t}{T}\frac{dT}{dc}\frac{\partial y^\circ}{\partial h}\right)_{c=c_m},\quad K=\int_0^{2\pi}[\varphi^*\psi+\bar\varphi^*\bar\psi]\,dt$$

Величина T определена в (2.2).

Вспомогательная система (2.24) построена так, что она всегда имеет периодическое решение. Для нахождения его воспользуемся методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения примем $W^{(0)}=0$ и функции u_1°, $\bar u_1^\circ$, $v_{1t}^{(0)}(\vartheta)=w_t(\vartheta)$, определенные выше. Решение u_1° можно представить в виде

$$u_1^\circ=M\varphi+L_1(t,\ G_0+Y_0'(w_t(\vartheta)),\ \bar G_0+\bar Y_0'(w_t(\vartheta)))$$

Здесь L_1 — вполне определенный ограниченный оператор, M — произвольная постоянная, функция φ определена в (2.13).

Приближение номера m находим из системы

$$\frac{du_1^{(m)}}{dt}=\left[\omega i+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0\right]u_1^{(m)}+\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar y}\right)_0\bar u_1^{(m)}+Y_0'(v_{1t}^{(m)}(\vartheta))+G_0+\mu\Phi^{(m-1)}+W^{(m)}\varphi^*$$

$$\frac{d\bar u_1^{(m)}}{dt}=\left(\frac{\partial \bar Y}{\partial y}\right)_0u_1^{(m)}+\left[-\omega i+\left(\frac{\partial \bar Y}{\partial \bar y}\right)_0\right]\bar u_1^{(m)}+\bar Y_0'(v_{1t}^{(m)}(\vartheta)+$$
$$+\bar G_0+\mu\bar\Phi^{(m-1)}+W^{(m)}\bar\varphi^* \qquad (2.25)$$

$$\frac{dv_{1t}^{(m)}(\vartheta)}{dt}=Av_{1t}^{(m)}(\vartheta)+Z_0'(v_{1t}^{(m)}(\vartheta))+H_0+\mu\chi^{(m-1)}$$

$$W^{(m)}=-\frac{\mu}{2\pi K}\int_0^{2\pi}[\Phi^{(m-1)}\psi+\bar\Phi^{(m-1)}\bar\psi]\,dt$$

Здесь индекс $m-1$ у величин Φ, χ означает подстановку $(m-1)$-го приближения. Из системы (2.25) находим

$$v_{1t}^{(m)}(\vartheta)=w_t(\vartheta)+L_2(t,\ \vartheta,\mu\ \chi^{(m-1)})$$

$$u_1^{(m)}=M\varphi+L_1(t,\ G_0+Y_0'(v_{1t}^{(m)}(\vartheta)),\ \bar G_0+\bar Y_0'(v_{1t}^{(m)}(\vartheta)))+L_1(t,\mu\Phi^{(m-1)}+W^{(m)}\varphi^*$$

$$\mu\bar\Phi^{(m-1)}+W^{(m)}\bar\varphi^*)$$

где L_2 — ограниченный оператор.

Производя соответствующие оценки, можно убедиться в том, что при достаточно малом $|\mu|$ последовательности $\{u_1^{(m)}\}$, $\{W^{(m)}\}$, $\{v_{1t}^{(m)}(\vartheta)\}$ равномерно сходятся к некоторым функциям $u_1^*(t, M, \mu)$, $W^*(M, \mu)$ и вектору-отрезку $v_{1t}^*(M, \vartheta, \mu)$.

Для того чтобы система (2.22) допускала периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$W^*(M, \mu) = -\frac{\mu}{2\pi K}\int_0^{2\pi} [\Phi^*\psi + \bar{\Phi}^*\bar{\psi}]\, dt = 0$$

$$\Phi^* = \Phi(t, u_1^*, \bar{u}_1^*, u_{1t}^*(\vartheta), \mu) \tag{2.26}$$

Уравнение (2.26), учитывая вид функционала Φ (2.23), после несложных, но громоздких преобразований может быть приведено к виду

$$M\frac{dP(h)}{dh} + R + \mu(\ldots) = 0 \tag{2.27}$$

где функция $P(h)$ определена в (2.20), а R — некоторая вполне определенная постоянная. Если выполнено условие (2.21), то на основании теоремы о неявных функциях при достаточно малом $|\mu|$ уравнение (2.27) однозначно разрешимо относительно M, причем M будет непрерывной функцией μ в окрестности точки $\mu = 0$. Значит, система (2.22), а следовательно, и система (2.19) имеют единственное периодическое решение.

Системы (2.19) и (1.1) эквивалентны, поэтому тем самым решен вопрос о существовании периодического решения системы (1.1).

Построение искомого периодического решения можно производить по той же схеме, которая применялась при доказательстве теоремы; причем трудности, связанные с нахождением периодического решения сопряженной системы (2.14), здесь отпадают, поскольку это решение определяется в явном виде (2.18).

3. В качестве примера рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1x(t) + a_2x(t-\tau) + \gamma y_1^2 + \mu(a\sin mt + d\sin 2mt) \tag{3.1}$$

где обозначено

$$a_1 = \omega\operatorname{ctg}\omega\tau, \quad a_2 = -\frac{\omega}{\sin\omega\tau}, \quad y_1 = \frac{\omega}{\sin\omega\tau}\int_{-\tau}^{0} x(t+\vartheta)\sin\omega(\tau+\vartheta)\, d\vartheta$$

Легко проверить, что порождающая система (при $\mu = 0$) является системой Ляпунова с последействием, поскольку она имеет первый интеграл

$$\omega^2 y_1^2 + \dot{y}_1^2 - {}^2/_3\gamma\omega y_1^3 = \text{const}$$

и, кроме того, характеристическое уравнение линейной части системы (3.1) имеет пару простых чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$, а остальные корни имеют отрицательные действительные части.

Функционал $f[x_t(\vartheta)]$ и функция $b(\vartheta)$, определяемые формулами (1.8) и (1.9), в данном примере будут

$$f[x(\vartheta)] \equiv x(0) + \frac{\omega}{\sin\omega\tau}e^{-i\omega\tau}\int_0^{-\tau} x(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi, \qquad b(\vartheta) = \frac{e^{i\omega\vartheta}}{1 - \omega\tau\csc\omega\tau e^{-i\omega\tau}}$$

После замены (1.7) система (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dt} = \omega i y + \left[\frac{\sqrt{\gamma}\omega}{\sin\omega\tau}\int_{-\tau}^{0} z_{1t}(\vartheta)\sin\omega(\tau+\vartheta)\, d\vartheta + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}i(\bar{y} - y)\right]^2 +$$

$$+ \mu(a\sin mt + d\sin 2mt)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = -\omega i\bar{y} + \left[\frac{\sqrt{\gamma}\omega}{\sin\omega\tau}\int_{-\tau}^{0} z_{1t}(\vartheta)\sin\omega(\tau+\vartheta)\, d\vartheta + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}i(\bar{y} - y)\right]^2 +$$

$$+ \mu(a\sin mt + d\sin 2mt)$$

$$\frac{dz_{1t}(\vartheta)}{dt} = Az_{1t}(\vartheta) + R\,[z_{1t}(\vartheta) + b(\vartheta)\,y + \bar{b}(\vartheta)\,\bar{y}] + \mu S(t, \vartheta) - \tag{3.2}$$

$$- [b(\vartheta) + \bar{b}(\vartheta)] \left\{ \left[\frac{\sqrt{\gamma}\omega}{\sin \omega\tau} \int\limits_{-\tau}^{0} z_{1t}(\vartheta) \sin \omega(\tau + \vartheta)\, d\vartheta + \frac{\sqrt{\gamma}}{2} i(\bar{y} - y) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \mu(a \sin mt + d \sin 2mt) \right\}$$

где

$$Ax(\vartheta) = \left\{ \frac{dx(\vartheta)}{d\vartheta} \quad \text{при } -\tau \leqslant \vartheta < 0, \qquad a_1 x(0) + a_2 x(-\tau) \quad \text{при } \vartheta = 0 \right\}$$

$$R(x(\vartheta)) = \left\{ 0 \quad \text{при } -\tau \leqslant \vartheta < 0, \ \frac{\gamma\omega^2}{\sin^2 \omega\tau} \left(\int\limits_{-\tau}^{0} x(t + \vartheta) \sin \omega(\tau + \vartheta)\, d\vartheta \right)^2 \quad \text{при } \vartheta = 0 \right\}$$

$$S(t, \vartheta) = \{0 \quad \text{при } -\tau \leqslant \vartheta < 0, \qquad \mu(a \sin mt + d \sin 2mt) \quad \text{при } \vartheta = 0\}$$

Для порождающей системы (система (3.2) при $\mu = 0$) ищем частное решение $z_{1t}(\vartheta, y, \bar{y})$ вида (2.5). Решая операторные уравнения типа (2.8), получим

$$z_{1t}^*(\vartheta, y, \bar{y}) = z_2(\vartheta, y, \bar{y}) + z_3(\vartheta, y, \bar{y}) + \ldots$$

$$z_2(\vartheta, y, \bar{y}) = a_{20}(\vartheta)\, y^2 + a_{11}(\vartheta)\, y\bar{y} + a_{02}(\vartheta)\bar{y}^2 \tag{3.3}$$

$$a_{20}(\vartheta) = -\frac{\gamma \sin \omega\tau e^{2i\omega\vartheta}}{4\omega\,[(\cos 2\omega\tau - \cos \omega\tau) + i(2 \sin \omega\tau - \sin 2\omega\tau)]} + \frac{\gamma}{4\omega i}\left(\frac{e^{i\omega\vartheta}}{K} + \frac{e^{-i\omega\vartheta}}{3\bar{K}}\right)$$

$$a_{11}(\vartheta) = \frac{\gamma \sin \omega\tau}{2\omega(1 - \cos \omega\tau)} + \frac{\gamma}{2\omega i}\left(\frac{e^{i\omega\vartheta}}{K} - \frac{e^{-i\omega\vartheta}}{\bar{K}}\right)$$

$$a_{02}(\vartheta) = \bar{a}_{20}(\vartheta), \qquad K = 1 - \frac{\omega\tau}{\sin \omega\tau} e^{-i\omega\tau}$$

В системе (3.2) сделаем замену

$$z_{1t}(\vartheta) = z_t(\vartheta) + z_{1t}^*(\vartheta, y, \bar{y}) \tag{3.4}$$

и в полученной порождающей системе положим $z_t(\vartheta) \equiv 0$. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$dy/dt = \omega iy + [{}^1\!/_2 \sqrt{\gamma} i(\bar{y} - y) + \ldots]^2 \tag{3.5}$$

$$d\bar{y}/dt = -\omega i\bar{y} + [{}^1\!/_2 \sqrt{\gamma} i(\bar{y} - y) + \ldots]^2$$

В квадратных скобках ненаписанные члены начинаются с формы третьего порядка относительно y, $\bar{y}$, поскольку простым вычислением убеждаемся, что

$$\int\limits_{-\tau}^{0} a_{pq}(\vartheta) \sin \omega(\tau + \vartheta)\, d\vartheta = 0 \qquad (p + q = 2)$$

Система (3.5) заменой

$$y = u + y_2(u, \bar{u}) + y_3(u, \bar{u}) + \ldots$$

$$y_2(u, \bar{u}) = \frac{\gamma}{4\omega} i(u^2 + 2u\bar{u} - {}^1\!/_3\bar{u}^2)$$

$$y_3(u, \bar{u}) = -\frac{\gamma}{24\omega^2}(u^3 + 5u\bar{u}^2 + {}^1\!/_2\bar{u}^3) \tag{3.6}$$

приводится к виду

$$du/dt = \omega iu - {}^5\!/_{12}\gamma^2\omega^{-1} iu^2\bar{u} + \ldots \tag{3.7}$$

$$d\bar{u}/dt = -\omega i\bar{u} + {}^5\!/_{12}\gamma^2\omega^{-1} iu\bar{u}^2 - \ldots$$

Система (3.7) допускает семейство периодических решений

$$u = ce^{\varphi i}, \quad \varphi = \Omega(c)(t+h), \quad \Omega(c) = \omega - {}^5/_{12}\gamma^2\omega^{-1}c^2 + \ldots \tag{3.8}$$

зависящее от произвольных постоянных c и h. Период решения (3.8) вычисляется по формуле

$$T(c) = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{5\gamma^2}{12\omega^2}c^2 + \ldots\right)$$

Из уравнения $T(c) = 2\pi/m$ при $\omega > m$ находим два вещественных корня c_m. Порождающее периодическое решение (2.11) будет иметь вид

$$y^\circ(t+h, c_m) = c_m e^{im(t+h)} + \frac{\gamma}{2\omega} i c_m^2 \left(1 + \frac{1}{2}e^{2im(t+h)} - \frac{1}{6}e^{-2im(t+h)}\right) + c_m^3(\ldots) \tag{3.9}$$

Первый интеграл (2.16) при $z_t(\vartheta) \equiv 0$ будет следующим:

$$H = y\bar{y} + \frac{\gamma i}{12\omega}(\bar{y} - y)^3 + \ldots = \mathrm{const}$$

где ненаписанные члены не содержат членов четвертого порядка от переменных y, $\bar{y}$. Формула (2.18) дает

$$\psi = \bar{y}^0 - {}^1/_4\gamma i\omega^{-1}(\bar{y}^\circ - y^\circ)^2 + \ldots$$

Уравнение (2.20) для определения величины h будет следующим:

$$a \sin mh\left(1 - \frac{5\gamma^2}{24m^2}c^2 + \ldots\right) + \frac{d\gamma}{3m}c\cos 2mh + c^3(\ldots) = 0 \tag{3.10}$$

Разрешая уравнение (3.10) относительно h, получим

$$h = -\frac{d\gamma}{3am^2}c + c^3(\ldots)$$

Подставляя найденное значение h в формулу (3.9), а затем полученное выражение y° в формулы (3.3), получим первое приближенное искомого периодического решения системы (3.2). По формуле

$$x_t^\circ(\vartheta) = z_{1t}^\circ(\vartheta) + b(\vartheta)y^\circ + \bar{b}(\vartheta)\bar{y}^\circ$$

вычисляем первое приближение периодического решения системы (3.1). Вычисление последующих приближений не представляет трудностей, однако следует заметить, что выкладки при этом весьма громоздки.

Поступила 8 XII 1968

Свердловское отделение
Математического института
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
3. Шиманов С. Н. Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием. Сиб. матем. ж., 1961, т. 2, № 3.
4. Клейменов А. Ф., Шиманов С. Н. К вопросу о существовании и построении периодических решений систем с запаздыванием, близких к системам Ляпунова. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 7.