Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Фам Гуен

(Ханой — Москва)

Пользуясь операторами перемещений, построенными при помощи всех связей, выведена одна форма уравнений движения, пригодная как для голономных, так и для неголономных механических систем, причем в первом случае они совпадают с известными уравнениями Пуанкаре [1,2].

1. **Построение операторов перемещений.** Пусть положения механической системы с l степенями свободы определяются n переменными $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, подчиненными $n - l$ линейным связям на действительных перемещениях

$$\eta_j\, dt \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, dx_i + a_{j0}\, dt = 0 \qquad (j = l+1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

а на возможных перемещениях — уравнениям

$$\omega_j \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \delta x_i = 0 \qquad (j = l+1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Здесь a_{ji}, a_{j0} — функции переменных t, x_i; dx_i, δx_i — дифференциалы и вариации переменных x_i на действительных и возможных перемещениях системы.

Следуя Четаеву [2], дополним (1.2) системой l линейных дифференциальных форм

$$\omega_1, \ldots, \omega_l \tag{1.3}$$

независимых между собой, а также независимых по отношению к формам $\omega_{l+1}, \ldots, \omega_n$ из (1.2), затем определим полную вариацию функции $f\,(t, x_i)$ формулой

$$\delta f = \sum_{j=1}^{n} \omega_j X_j(f), \qquad X_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_j^{\,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Здесь $\xi_j^{\,i}$ — определенные функции переменных t, x_i, зависящие от выбора форм (1.3).

В силу (1.2) и (1.4) изменение (вариация) функции f на возможных перемещениях системы будет

$$\delta f = \sum_{s=1}^{l} \omega_s X_s(f) \tag{1.5}$$

Символы $X_1, \ldots, X_l$ называются операторами, а формы (1.3) — параметрами возможных перемещений системы.

Аналогично присоединим к (1.1) формы

$$\eta_1 dt, \ldots, \eta_l dt, dt \tag{1.6}$$

линейные и независимые между собой и по отношению к формам (1.1) и такие, чтобы полный дифференциал функции $f(t, x_i)$ определился по формуле

$$df = dt\left[X_0(f) + \sum_{j=1}^{n} \eta_j X_j(f)\right] \quad \left(X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \xi_0^i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \tag{1.7}$$

для которой X_j — операторы (1.4).

При учете (1.1) получим изменение функции f на действительных перемещениях системы в виде

$$df = dt\left[X_0(f) + \sum_{s=1}^{l} \eta_s X_s(f)\right] \tag{1.8}$$

Символы $X_0, X_1, \ldots, X_l$ называются операторами действительных перемещений системы, а $\eta_1, \ldots, \eta_l$ — их параметрами. Здесь ξ_0^i — определенные функции переменных t, x_i, зависящие от выбора (1.6).

Можно доказать, что система операторов возможных перемещений системы замкнута, если механическая система голономная. В противном случае она не замкнута.

В самом деле, так как внешняя производная от полной вариации (1.4) равна нулю

$$0 \equiv (\delta f)' = \sum_{j=1}^{n} \omega_j' X_j(f) + \sum_{(i,j)} [\omega_i, \omega_j](X_i, X_j) f \tag{1.9}$$

а внешние производные ω_t' для форм (1.2), (1.3) могут быть представлены в виде

$$\omega_t' = -\sum_{(i,j)} C_{ijt} [\omega_i, \omega_j] \qquad (t = 1, \ldots, n) \tag{1.10}$$

из (1.9) получим [3]

$$(X_i, X_j) = \sum_{t=1}^{n} C_{ijt} X_t \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1.11}$$

Здесь C_{ijt} — функции переменных t, x_i. Не нарушая общности, можно допустить, что $n - k$ последних связей (1.2) голономны ($l \leqslant k \leqslant n$).

Тогда, согласно теореме Фробениуса [3], в (1.10) должны быть

$$C_{ijt} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n; \ t = k + 1, \ldots, n) \tag{1.12}$$

а коммутаторы операторов возможных перемещений равны

$$(X_r, X_s) = \sum_{t=1}^{l} C_{rst} X_t + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{rs\nu} X_\nu \qquad (r, s = 1, \ldots, l) \tag{1.13}$$

Для голономных систем все связи (1.2) голономные, $k = l$, $C_{rs\nu} = 0$, поэтому отсюда операторы $X_1, \ldots, X_l$, согласно (1.13) образуют замкнутую систему [3]. В случае же неголономных систем, когда $k - l$ первых связей (1.2) не образуют вместе с остальными вполне интегрируемой системы, согласно теореме Фробениуса, коэффициенты $C_{rs\nu}$ в (1.13) не могут быть все равны нулю, а потому и система операторов возможных перемещений для неголономных систем по определению не может быть замкнутой.

Аналогичным рассуждением получим коммутаторы операторов действительных перемещений рассматриваемой системы в виде

$$(X_r, X_s) = \sum_{t=1}^{l} C_{rst} X_t + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{rs\nu} X_\nu \qquad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \ldots, l \\ s = 1, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

причем все $C_{rs\nu}$ равны нулю, если система голономная. В противном случае не все из этих коэффициентов могут быть равны нулю.

Пользуясь терминологией теории групп непрерывных преобразований в пространстве переменных x_i на связях (1.2), можно заметить, что $X_1,\ldots, X_l$ представляют собой операторы бесконечно малого преобразования (1.6) с параметрами $\omega_1,\ldots,\omega_l$, переводящего точку с координатами x_i в соседнюю точку $x_i + \delta x_i$ по связям (1.2). Если все связи (1.2) голономные, а коэффициенты C_{rst} в (1.13) постоянные ($C_{rs\nu} = 0$), указанные операторы образуют группу Ли [1,2,3]. Когда система неголономная, а C_{rst}, $C_{rs\nu}$ постоянные, имеем лишь неполную группу Ли, операторы которой не образуют замкнутой системы.

2. Уравнения движения. Пусть все связи механической системы идеальные, а активные силы имеют силовую функцию U. Подставляя в общее уравнение динамики выражения возможных перемещений точек системы, определяемые согласно (1.6)

$$\delta u_i = \sum_{s=1}^{l} \omega_s X_s(u_i), \qquad \delta v_i = \sum_{s=1}^{l} \omega_s X_s(v_i), \qquad \delta w_i = \sum_{s=1}^{l} \omega_s X_s(w_i) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

в силу независимости между параметрами $\omega_1, \ldots, \omega_l$, получим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i [u_i'' X_s(u_i) + v_i'' X_s(v_i) + w_i'' X_s(w_i)] - X_s(U) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, l) \tag{2.2}$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i [u_i' X_s(u_i) + v_i' X_s(v_i) + w_i' X_s(w_i)] - X_s(U) -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} m_i \left[u_i' \frac{dX_s(u_i)}{dt} + v_i' \frac{dX_s(v_i)}{dt} + w_i' \frac{dX_s(w_i)}{dt}\right] = 0 \qquad (s = 1, \ldots, l) \tag{2.3}$$

Здесь N — число материальных точек системы; u_i, v_i, w_i — декартовы координаты i-й точки массы m_i; u_i'', v_i'', w_i'' — ее ускорения; u_i', v_i', w_i' — скорости, определяемые, согласно (1.9), по формулам

$$u_i' = X_0(u_i) + \sum_{s=1}^{l} \eta_s X_s(u_i), \qquad v_i' = X_0(v_i) + \sum_{s=1}^{l} \eta_s X_s(v_i)$$
$$w_i' = X_0(w_i) + \sum_{s=1}^{l} \eta_s X_s(w_i) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.4}$$

Из (2.4) определим

$$X_s(u_i) = \frac{\partial u_i'}{\partial \eta_s}, \qquad X_s(v_i) = \frac{\partial v_i'}{\partial \eta_s}, \qquad X_s(w_i) = \frac{\partial w_i'}{\partial \eta_s} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, l \\ i = 1, \ldots, N \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

а из (1.9), в силу (1.14) и (1.17)

$$\frac{dX_s(u_i)}{dt} = X_s(u_i') + \sum_{t=1}^{l} \left(C_{0st} + \sum_{r=1}^{l} \eta_r C_{rst}\right) X_t(u_i) +$$
$$+ \sum_{\nu=l+1}^{k} \left(C_{0s\nu} + \sum_{r=1}^{l} \eta_r C_{rs\nu}\right) X_\nu(u_i) \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, l \\ i = 1, \ldots, N \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Формулы (2.6) для координат v_i, w_i получаются аналогично.

В силу (2.5) и (2.6), уравнения (2.3) преобразуются к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_s} - X_s(T+U) - \sum_{t=1}^{l}\left(C_{0st} + \sum_{r=1}^{l}\eta_r C_{rst}\right)\frac{\partial T}{\partial \eta_t} -$$
$$- \sum_{\nu=l+1}^{k}\left(C_{0s\nu} + \sum_{r=1}^{l}\eta_r C_{rs\nu}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = 0 \qquad (s=1,\ldots,l) \qquad (2.7)$$

Это — искомая форма уравнений движения, пригодная как для голономных, так и для неголономных систем. Здесь T — живая сила рассматриваемой системы, $(\partial T^\circ / \partial \eta_\nu)$ обозначают выражения

$$\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[u_i' X_\nu(u_i) + v_i' X_\nu(v_i) + w_i' X_\nu(w_i)\right] \qquad (\nu = l+1,\ldots,k) \quad (2.8)$$

имеющие механический смысл импульсов, соответствующих параметрам η_ν для так называемой соответствующей голономной системы с живой силой T°, получаемой из рассматриваемой при отбрасывании из (1.1) и (1.2) $k-l$ первых связей [4].

Уравнения (2.7) совпадают с известными уравнениями Пуанкаре [1-3], если система голономная, ибо тогда все коэффициенты $C_{rs\nu}$ в (2.7) равны нулю. Когда система неголономная, (2.7) эквивалентны уравнениям (1.13) работы [4], так как, беря l форм (1.7) и $k-l$ форм $\eta_{l+1},\ldots,\eta_k$ из (1.1) за параметры действительных перемещений соответствующей голономной системы, уравнения (1.13) из [4] будут иметь вид (2.7).

Эквивалентность уравнений (2.7) уравнениям Аппеля [4]

$$\frac{\partial S}{\partial \eta_s'} = X_s(U) \qquad (s=1,\ldots,l) \qquad (2.9)$$

следует из соотношений

$$\frac{\partial S}{\partial \eta_s'} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_s} - \sum_{i=1}^{N} m_i\left[u_i'\frac{dX_s(u_i)}{dt} + v_i'\frac{dX_s(v_i)}{dt} + w_i'\frac{dX_s(w_i)}{dt}\right] (s=1,\ldots,l) \quad (2.10)$$

правые части которых, согласно (2.3), преобразуются в (2.7). Здесь S — энергия ускорения системы, $\eta_s' = d\eta_s / dt$.

В случае, когда x_i — обобщенные лагранжевы координаты, а связи (1.1) имеют частный вид

$$\eta_j \equiv x_j' - \sum_{s=1}^{l} a_{js}x_s' - a_{j_0} = 0 \qquad (j = l+1,\ldots,n) \qquad (2.11)$$

уравнения (2.7) представляют собой уравнения Гамеля [5], преобразованные к живой силе T.

3. *Примеры. 1°. Уравнения движения обруча.* Положения обруча, движущегося по горизонтальной плоскости, могут быть определены переменными $\theta, \psi, \varphi, \xi, \eta, \zeta$ со связями [6]

$$\eta_4 \equiv \xi' - a\sin\theta\sin\psi\theta' + a\cos\theta\cos\psi\psi' + a\cos\psi\varphi' = 0$$
$$\eta_5 \equiv \eta' + a\sin\theta\cos\psi\theta' + a\cos\theta\sin\psi\psi' + a\sin\psi\varphi' = 0 \qquad (3.1)$$
$$\eta_6 \equiv \zeta' - a\cos\theta\theta' = 0$$

Принимая

$$\eta_1 = \theta', \qquad \eta_2 = \psi'\sin\theta, \qquad \eta_3 = \psi'\cos\theta + \varphi' \qquad (3.2)$$

за параметры действительных перемещений обруча, получаем

$$X_0=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_1=\frac{\partial}{\partial\theta}+a\sin\theta\sin\psi\frac{\partial}{\partial\xi}-a\sin\theta\cos\psi\frac{\partial}{\partial\eta}+a\cos\theta\frac{\partial}{\partial\zeta}$$
$$X_2=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}-\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial\varphi}-a\cos\psi\frac{\partial}{\partial\xi}-a\sin\psi\frac{\partial}{\partial\eta}\qquad(3.3)$$
$$X_4=\frac{\partial}{\partial\xi},\quad X_5=\frac{\partial}{\partial\eta},\quad X_6=\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

Из этих операторов первые четыре будут операторами действительных перемещений обруча. Их коммутаторы равны

$$(X_0,X_1)=(X_0,X_2)=(X_0,X_3)=0,\quad (X_1,X_2)=-(X_2,X_1)=-\operatorname{ctg}\theta X_2+X_3\qquad(3.4)$$
$$(X_1,X_3)=0,\quad (X_2,X_3)=-(X_3,X_2)=\frac{a\sin\psi}{\sin\theta}X_4-\frac{a\cos\psi}{\sin\theta}X_5$$

Для обруча имеем

$$T={}^1\!/_2[(A+a^2)\eta_1^2+A\eta_2^2+(C+a^2)\eta_3^2],\qquad U=-ag\sin\theta\qquad(3.5)$$
$$T^\circ={}^1\!/_2(\eta_4^2+\eta_5^2+\eta_6^2+2a\sin\theta\sin\psi\,\eta_1\eta_4-2a\sin\theta\cos\psi\,\eta_1\eta_5+$$
$$+2a\cos\theta\,\eta_1\eta_6-2a\cos\psi\,\eta_3\eta_4-2a\sin\psi\,\eta_3\eta_5)+\ldots$$

Здесь многоточие обозначает члены, не содержащие η_4, η_5, η_6.

Подставляя (3.3) — (3.5) в (2.7), получим уравнения движения обруча [4,6]

$$(A+a^2)\eta_1'-A\operatorname{ctg}\theta\eta_2^2+(C+a^2)\eta_2\eta_3+ag\cos\theta=0\qquad(3.6)$$
$$A\eta_2'+A\operatorname{ctg}\theta\,\eta_1\eta_2-C\eta_1\eta_3=0,\qquad(C+a^2)\eta_3'-a^2\eta_1\eta_2=0$$

2°. Об одной голономной системе Аппеля. Для голономной системы, рассматриваемой Аппелем в п. 469 Курса [6], все связи голономные

$$\eta_4\equiv\xi'+a\sin\theta\theta'=0,\qquad \eta_5\equiv\eta'=0,\qquad \eta_6\equiv\zeta'-a\cos\theta\theta'=0\qquad(3.7)$$

Беря вновь (3.2) за параметры действительных перемещений, получим

$$X_0=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_1=\frac{\partial}{\partial\theta}-a\sin\theta\frac{\partial}{\partial\xi}+a\cos\theta\frac{\partial}{\partial\eta},\quad X_2=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}-\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$X_3=\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad X_4=\frac{\partial}{\partial\xi},\quad X_5=\frac{\partial}{\partial\eta},\quad X_6=\frac{\partial}{\partial\zeta}\qquad(3.8)$$

Операторы действительных перемещений X_0, X_1, X_2, X_3 образуют замкнутую систему, так как

$$(X_0,X_1)=(X_0,X_2)=(X_0,X_3)=0,\ (X_1,X_2)=-(X_2,X_1)=-\operatorname{ctg}\theta X_2+X_3\qquad(3.9)$$
$$(X_1,X_3)=-(X_3,X_1)=0,\qquad (X_2,X_3)=-(X_3,X_2)=0$$

Живая сила и силовая функция системы равны

$$T={}^1\!/_2[(A+a^2)\eta_1^2+A\eta_2^2+(C+a^2)\eta_3^2],\qquad U=-ag\sin\theta\qquad(3.10)$$
$$T^\circ={}^1\!/_2(\eta_4^2+\eta_5^2+\eta_6^2-2a\sin\theta\eta_1\eta_4+2a\cos\theta\eta_1\eta_6+\ldots$$

Здесь многоточие — члены, не содержащие η_4, η_5, η_6. В силу (3.8) — (3.10), уравнения (2.7) дают

$$(A+a^2)\eta_1'-A\operatorname{ctg}\theta\eta_2^2+(C+a^2)\eta_2\eta_3+ag\cos\theta=0\qquad(3.11)$$
$$A\eta_2'+A\operatorname{ctg}\theta\eta_1\eta_2-(C+a^2)\eta_1\eta_3=0,\qquad(C+a^2)\eta_3'=0$$

Это — уравнения движения рассматриваемой голономной системы Аппеля. Они отличаются от уравнений движения обруча (3.6), хотя обе системы имеют одинаковые выражения живой силы T. Это качественное различие можно заметить и по тому, что для обруча операторы перемещений не образуют замкнутой системы.

Приведенные примеры лишний раз показывают, что уравнения (2.7) могут быть применимы, без предварительного определения, будет ли рассматриваемая система голономной или неголономной и какие из наложенных на систему связей будут неголономными, что требуется, например, для уравнений (1.13) из [4].

3°. Уравнения движения саней Чаплыгина по наклонной плоскости. Пусть плоскость, по которой двигаются сани, образует угол θ с горизонтальной плоскостью, а $O\xi\eta$ — некоторая неподвижная система координат, жестко свя́занная с этой плоскостью, причем $O\xi$ — ось быстрого ската, $O\eta$ — горизонтальная. Определяя положения саней координатами ξ, η точки касания A саней с наклонной плоскостью и углом φ между $O\xi$ и осью Ax, направленной по плоскости колесика, получаем уравнение связи (неголономной) в виде [7]

$$\eta_3 \equiv \xi' \sin\varphi - \eta' \cos\varphi = 0 \tag{3.12}$$

Примем $\eta_1 = \varphi'$, $\eta_2 = \xi' \cos\varphi + \eta' \sin\varphi$ за параметры действительных перемещений саней; тогда получим (3.13)

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad X_2 = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\xi} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\eta}, \quad X_3 = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\xi} - \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\eta}$$

Операторы перемещений саней X_0, X_1, X_2 образуют неполную группу Ли, так как их коммутаторы равны

$$(X_0, X_1) = (X_0, X_2) = 0, \quad (X_1, X_2) = -(X_2, X_1) = -X_3 \tag{3.14}$$

Живая сила T, T° и силовая функция U для саней на наклонной плоскости суть

$$T = \frac{m}{2}(\gamma^2\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\beta\eta_1\eta_2), \qquad T^\circ = \frac{m}{2}(\eta_3^2 - 2\alpha\eta_1\eta_3) + \ldots \tag{3.15}$$

$$U = mg \sin\theta \, (\xi + \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)$$

Многоточие в T° — члены, не содержащие η_3.

Подставляя (3.13) — (3.15) в (2.7) и разрешая их относительно η_1', η_2', получаем

$$\eta_1' = \frac{\alpha\eta_1}{\gamma^2 - \beta^2}(\beta\eta_1 - \eta_2) - \frac{\alpha g \sin\theta}{\gamma^2 - \beta^2}\sin\varphi$$

$$\eta_2' = \frac{\alpha\eta_1}{\gamma^2 - \beta^2}(\gamma^2\eta_1 - \beta\eta_2) + \frac{g\sin\theta}{\gamma^2 - \beta^2}[(\gamma^2 - \beta^2)\cos\varphi - \alpha\beta\sin\varphi] \tag{3.16}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + k^2$$

Здесь α, β — координаты центра тяжести саней в подвижной системе Axy, жестко связанной с санями; k — радиус инерции саней относительно центра тяжести. Заметим, что один частный случай уравнений (3.16) рассмотрен в работе [8].

Уравнения (3.16) совместно с

$$\varphi' = \eta_1, \quad \xi' = \eta_2\cos\varphi, \quad \eta' = \eta_2\sin\varphi \tag{3.17}$$

определяют η_1, η_2, φ, ξ, η в функции времени t.

Можно заметить, что если за параметры действительных перемещений саней берем $\eta_1 = \varphi'$, $\eta_2 = \xi'$, то получаемые операторы перемещения не образуют неполную группу Ли, так как не все коэффициенты в их коммутаторах будут постоянными.

Автор благодарит В. В. Румянцева за ценные указания при выполнении работы.

Поступила 18 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré M. H. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique. Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, 1901, t. 132, pp. 369—371.
2. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2.
3. Картан Э. Интегральные инварианты. М.—Л., Гостехтеориздат, 1940.
4. Фам Гуен. К уравнениям движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре — Четаева. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
5. Hamel G. Die Lagrange — Eilerschen Gleichungen der Mechanik. Z. Math. und Phys., 1904, Bd. 50, S. 1—57.
6. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960.
7. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Матем. сб., 1912, т. 28, вып. 2.
8. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.