О СООТНОШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ П. А. ШИФФА

Б. М. Нуллер

(Ленинград)

До сих пор считалось, что в статьях П. Ф. Папковича [1,2] впервые было дано соотношение обобщенной ортогональности и поставлена проблема одновременного разложения двух независимых функций в ряды по однородным решениям. Этой проблеме в рамках плоской задачи теории упругости впоследствии были посвящены работы Г. А. Гринберга [3], В. К. Прокопова [4], И. И. Воровича и В. Е. Ковальчука [5] и ряд зарубежных публикаций, обзор которых содержится в [6].

Однако, как недавно выяснилось [7], статья П. Ф. Папковича [1], положила начало исследованию вопроса, уже имевшего свою первоначальную историю в варианте пространственной задачи теории упругости. Речь идет о работе П. А. Шиффа 1883 г. [8], где установлено соотношение обобщенной ортогональности для осесимметричных однородных решений первой основной задачи теории упругости о бесконечном полом цилиндре. На основе этого соотношения П. А. Шифф получил точное решение задачи об осесимметричной деформации конечного сплошного цилиндра, на торцах которого заданы две произвольные функции. Одна функция характеризует касательные напряжения, другая связана с объемным расширением, но заранее из механических условий не может быть определена. Заметим, кстати, что в [8] была впервые решена и задача кручения конечного цилиндра усилиями, произвольно распределенными на его торцах. Позднее метод П. А. Шиффа применялся только в одной работе В. А. Стеклова [9]. Видимо, причиной забвения метода послужила неправильная оценка его Файлоном в широко известной статье [10].

Ниже соотношение П. А. Шиффа обобщается на другие виды однородных граничных условий. Приводятся решения методом Фурье некоторых частных задач о конечном упругом цилиндре. В общем случае нагружения рассматривается возможность точного удовлетворения любого из двух условий, задаваемых на торце цилиндра, при приближенном удовлетворении другого условия.

1. Выпишем решение П. А. Шиффа, сократив его за счет введения определенным образом связанных между собой функций Папковича — Нейбера. В цилиндрических координатах r, z, φ проекции вектора перемещений в осесимметричном случае выражаются формулами [11]

$$u = B_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial r}(rB_1 + zB_2 + B_3)$$
$$w = B_2 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial z}(rB_1 + zB_2 + B_3) \tag{1.1}$$

в которых σ — коэффициент Пуассона; функции B_2 и B_3 удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 B_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_n}{\partial z^2} = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, 5) \tag{1.2}$$

функция B_1 является коэффициентом при $e^{i\varphi}$ в выражении гармонической функции $\Delta(B_1 e^{i\mu}) = 0$, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2}B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial z^2} = 0 \tag{1.3}$$

Положим

$$B_1 = \frac{\partial B_4}{\partial r}, \qquad B_2 = 0, \qquad B_3 = 4(1-\sigma)(B_4 - B_5) \tag{1.4}$$

где B_4 и B_5 — гармонические функции. Ограничимся функциями, симметричными относительно срединной плоскости $z = 0$ цилиндра,— антисимметричный случай может быть рассмотрен совершенно аналогично, положим

$$B_4 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(r) \operatorname{ch} m_k z, \qquad B_5 = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(r) \operatorname{ch} m_k z \tag{1.5}$$

Функции $\rho_k(r)$ и $\eta_k(r)$ согласно (1.2) будут решениями уравнения Бесселя

$$\rho_k''(r) + \frac{1}{r}\rho_k'(r) + m_k^2\rho_k(r) = 0, \qquad \eta_k''(r) + \frac{1}{r}\eta_k'(r) + m_k^2\eta_k(r) = 0 \tag{1.6}$$

числа m_k будут определяться в дальнейшем граничными условиями. Подставив (1.4), а затем (1.5) в (1.1), получим

$$\begin{gathered} u = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\eta_k'(r) + \frac{m_k^2 r\rho_k(r)}{4(1-\sigma)}\right]\operatorname{ch} m_k z \\ w = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\eta_k(r) - \rho_k(r) - \frac{r\rho_k'(r)}{4(1-\sigma)}\right] m_k \operatorname{sh} m_k z \end{gathered} \tag{1.7}$$

Введем функцию $\varepsilon_k(r)$ (аргумент для краткости опустим)

$$\eta_k - \frac{r\rho_k'}{4(1-\sigma)} = \frac{\varepsilon_k + \rho_k}{2} \tag{1.8}$$

удовлетворяющую уравнению

$$\varepsilon_k'' + \frac{1}{r}\varepsilon_k' + m_k^2\varepsilon_k = \frac{m_k^2\rho_k}{1-\sigma} \tag{1.9}$$

В функциях ε_k и ρ_k выражения для перемещений (1.7) упрощаются

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k' + \rho_k')\operatorname{ch} m_k z, \qquad w = \sum_{k=1}^{\infty} m_k(\varepsilon_k - \rho_k)\operatorname{sh} m_k z \tag{1.10}$$

а компоненты тензора напряжений принимают вид

$$\sigma_r = 2G\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varepsilon_k'' + \rho_k'' - \frac{\sigma m_k^2\rho_k}{(1-\sigma)}\right]\operatorname{ch} m_k z \tag{1.11}$$

$$\sigma_\varphi = 2G\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varepsilon_k' + \rho_k'}{r} - \frac{\sigma m_k^2\rho_k}{(1-\sigma)}\right]\operatorname{ch} m_k z \tag{1.12}$$

$$\sigma_z = 2G\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\varepsilon_k - \rho_k)m_k^2 - \frac{\sigma m_k^2\rho_k}{(1-\sigma)}\right]\operatorname{ch} m_k z \tag{1.13}$$

$$\tau_{rz} = 2G\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k' m_k \operatorname{sh} m_k z \tag{1.14}$$

Покажем, что соотношение обобщенной ортогональности

$$\int_{r_1}^{r_2}(\varepsilon_j'\rho_k' + \varepsilon_k'\rho_j')\, r\, dr = 0, \qquad j \neq k \tag{1.15}$$

найденное Шиффом для случая отсутствия нормальных и касательных напряжений на граничных поверхностях полого бесконечного цилиндра $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, справедливо и при других однородных условиях.

Рассмотрим вторую основную задачу теории упругости

$$u = w = 0 \qquad \text{при } r = r_1 \text{ и } r = r_2 \tag{1.16}$$

Введем функцию $\theta_k = \rho_k + \varepsilon_k$. Согласно (1.6) и (1.9) она удовлетворяет уравнению

$$\theta_k'' + \frac{1}{r}\theta_k' + m_k^2\theta_k = \frac{m_k^2\rho_k}{1-\sigma} \tag{1.17}$$

Граничные условия (1.16) согласно (1.10) имеют вид

$$\theta_k' = 0, \ \theta_k - 2\rho_k = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } r = r_2 \tag{1.18}$$

Они формируют однородную систему четырех алгебраических уравнений относительно четырех произвольных постоянных, входящих в функции η_k и ρ_k. Нули детерминанта системы определяют числа m_k, нетривиальное ее решение выражает три постоянные через четвертую. Уравнение (1.17) дает

$$r\left[\frac{1}{r}(r\theta_k')'\right]' = r\left(\frac{m_k^2\rho_k'}{1-\sigma} - m_k^2\theta_k'\right) \tag{1.19}$$

Интегрированием по частям получаем

$$\int_{r_1}^{r_2} r\left[\frac{1}{r}(r\theta_j')'\right]'\theta_k' dr = [\theta_k'(r\theta_j')']_{r_1}^{r_2} - [\theta_j'(r\theta_k')']_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2}\theta_j'\left[\frac{1}{r}(r\theta_k')'\right]' rdr$$

или, учитывая первое условие (1.18)

$$\int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{1}{r}(r\theta_j')'\right]'\theta_k' rdr = \int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{1}{r}(r\theta_k')'\right]'\theta_j' r\,dr \tag{1.20}$$

Благодаря этому равенству из (1.19) следует:

$$(m_j^2 - m_k^2)\int_{r_1}^{r_2}\theta_j'\theta_k' rdr = -\frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}(m_k^2\rho_k'\theta_j' - m_j^2\rho_j'\theta_k')\, r\,dr \tag{1.21}$$

с другой стороны

$$\int_{r_1}^{r_2}\theta_j'\theta_k' rdr = (\theta_j\theta_k' r)_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2}\theta_j(r\theta_k')'dr = m_k^2\int_{r_1}^{r_2}\theta_j\left(r\theta_k - \frac{r\rho_k}{(1-\sigma)}\right)dr =$$

$$= m_k^2\int_{r_1}^{r_2}\theta_j\theta_k rdr + \frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}\theta_j(r\rho_k')'dr = m_k^2\int_{r_1}^{r_2}\theta_j\theta_k rdr +$$

$$+\frac{1}{1-\sigma}(r\theta_j\rho_k')_{r_1}^{r_2} - \frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2} r\rho_k'\theta_j' dr \tag{1.22}$$

Поменяв здесь местами индексы j и k, получим

$$\int_{r_1}^{r_2}\theta_j'\theta_k' rdr = m_j^2\int_{r_1}^{r_2}\theta_j\theta_k rdr + \frac{1}{1-\sigma}(r\theta_k\rho_j')_{r_1}^{r_2} - \frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}\rho_j'\theta_k' rdr \tag{1.23}$$

Умножим обе части тождеств (1.22) и (1.23) соответственно на m_j^2 и m_k^2 и вычтем второе из первого

$$(m_j^2 - m_k^2)\int_{r_1}^{r_2}\theta_j'\theta_k' rdr = \frac{1}{(1-\sigma)}(r\rho_k'\theta_j m_j^2 - r\rho_j'\theta_k m_k^2)_{r_1}^{r_2} -$$

$$-\frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}(m_j^2\rho_k'\theta_j' - m_k^2\rho_j'\theta_k')\, rdr \tag{1.24}$$

Приравнивая левые части (1.21) и (1.24) и учитывая второе условие (1.18), получим

$$\frac{m_k^2-m_j^2}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}(\varepsilon_j'\rho_k'+\varepsilon_k'\rho_j')\,r\,dr=\frac{2\,(m_j^2-m_k^2)}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}\rho_k'\rho_j' r\,dr-$$

$$-\frac{2}{1-\sigma}(r\rho_k'\rho_j m_j^2-r\rho_j'\rho_k m_k^2)_{r_1}^{r_2}=\frac{2}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}[(r\rho_j')'\,\rho_k m_k^2-(r\rho_k')'\,\rho_j m_j^2]\,dr=0$$

что и требовалось.

Пусть полый цилиндр находится в условиях скользящей заделки, т. е. $\tau_{rz}=u=0$ при $r=r_1$ и $r=r_2$. В этом случае можно сохранить прежний путь доказательства. Положив $\theta_k=\varepsilon_k$ и учитывая, что на границе цилиндра при $r=r_1$ и $r=r_2$ $\varepsilon_k'=\rho_k'=0$, вместо равенств (1.21), (1.23) и (1.24) получим соответственно

$$(m_j^2-m_k^2)\int_{r_1}^{r_2}\varepsilon_j'\varepsilon_k' r\,dr=-\frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}(m_k^2\rho_k'\varepsilon_j'-m_j^2\rho_j'\varepsilon_k')\,r\,dr \tag{1.25}$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\varepsilon_j'\varepsilon_k' r\,dr=m_j^2\int_{r_1}^{r_2}\varepsilon_j\varepsilon_k r\,dr-\frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}\rho_j'\varepsilon_k' r\,dr \tag{1.26}$$

$$(m_j^2-m_k^2)\int_{r_1}^{r_2}\varepsilon_j'\varepsilon_k' r\,dr=-\frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}(m_j^2\rho_k'\varepsilon_j'-m_k^2\rho_j'\varepsilon_k')\,r\,dr \tag{1.27}$$

Из (1.25) и (1.27) сразу следует обобщенная ортогональность (1.15).

Пусть, наконец, на граничных поверхностях заданы условия $w=0$, $\sigma_r=0$. Из (1.10) и (1.11) имеем

$$\varepsilon_k=\rho_k,\quad \varepsilon_k'+\rho_k'+m_k^2 r\varepsilon_k=0 \quad \text{при } r=r_1 \text{ и } r=r_2 \tag{1.28}$$

Интегрируя по частям и учитывая первое условие (1.28), получим

$$\int_{r_1}^{r_2} r\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_j')'\right]'\varepsilon_k' dr=\int_{r_1}^{r_2} r\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_k')'\right]'\varepsilon_j' dr+\left[\frac{\sigma r}{1-\sigma}(\varepsilon_k' m_j^2\varepsilon_j-\varepsilon_j' m_k^2\varepsilon_k)\right]_{r_1}^{r_2}$$

Отсюда и из равенства

$$r\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_k')'\right]'=r m_k^2\left(\frac{\rho_k'}{1-\sigma}-\varepsilon_k'\right)$$

следует

$$(m_j^2-m_k^2)\int_{r_1}^{r_2}\varepsilon_j'\varepsilon_k' r\,dr=-\frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}(m_k^2\rho_k'\varepsilon_j'-m_j^2\rho_j'\varepsilon_k')\,r\,dr-$$

$$-\left[\frac{\sigma r}{1-\sigma}(\varepsilon_k' m_j^2\varepsilon_j-\varepsilon_j' m_k^2\varepsilon_k)\right]_{r_1}^{r_2} \tag{1.29}$$

Далее, тем же путем, что и при выводе (1.22) и (1.24) приходим к тождествам

$$\int_{r_1}^{r_2}\varepsilon_j'\varepsilon_k' r\,dr=m_k^2\int_{r_1}^{r_2} r\varepsilon_j\varepsilon_k dr+\frac{1}{1-\sigma}(r\varepsilon_j\rho_k')_{r_1}^{r_2}+(\varepsilon_j\varepsilon_k' r)_{r_1}^{r_2}-\frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}\rho_k'\varepsilon_j' r\,dr \tag{1.30}$$

$$(m_j^2-m_k^2)\int_{r_1}^{r_2}\varepsilon_j'\varepsilon_k' r\,dr=-\frac{1}{1-\sigma}\int_{r_1}^{r_2}[m_j^2\rho_k'\varepsilon_j'-m_k^2\rho_j'\varepsilon_k']\,r\,dr+$$

$$+\left[m_j^2 r\varepsilon_j\left(\frac{\rho_k'}{1-\sigma}+\varepsilon_k'\right)-m_k^2 r\varepsilon_k\left(\frac{\rho_j'}{1-\sigma}+\varepsilon_j'\right)\right]_{r_1}^{r_2} \tag{1.31}$$

Приравнивая левые части (1.29) и (1.31), получим

$$(m_j^2-m_k^2)\int_{r_1}^{r_2}(\rho_k'\varepsilon_j'+\rho_j'\varepsilon_k')\,rdr-[m_j^2r\varepsilon_j(\rho_k'+\varepsilon_k')-m_k^2\varepsilon_kr(\rho_j'+\varepsilon_j')]_{r_1}^{r_2}=0$$

В силу второго условия (1.28) внеинтегральные члены в сумме дают нуль; отсюда и следует соотношение (1.15).

Не останавливаясь на доказательствах, отметим, что это соотношение справедливо и для задач, в которых рассмотренные четыре вида однородных граничных условий комбинируются в различных сочетаниях на внешней и внутренней поверхностях цилиндра. В частности, те случаи, когда на внутренней поверхности заданы условия скользящей заделки, охватывают одновременно и задачи о сплошном цилиндре. Действительно, перемещения и напряжения в сплошном цилиндре из условия их ограниченности на оси выражаются через функции Бесселя первого рода. В силу свойств последних при $r=0$ из (1.8) и (1.6) вытекает $\varepsilon_k'=\rho_k'=0$, или $u=\tau_{rz}=0$.

2. Рассмотрим задачу о равновесии полого упругого цилиндра $r_1\leqslant r\leqslant r_2$, $-l\leqslant z\leqslant l$, на торцовых поверхностях которого заданы симметричные относительно срединной плоскости $z=0$ касательные перемещения и нормальные напряжения

$$u=f_1(r),\quad \sigma_z=f_2(r)\ \text{при}\ z=\pm l,\quad r_1\leqslant r\leqslant r_2 \tag{2.1}$$

Граничные условия на цилиндрических поверхностях всегда можно привести к однородным, изменив, конечно, функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$. Однородные условия, вид которых пока не будем конкретизировать, определяют значения характеристических чисел m_k и связывают функции $\varepsilon_k(r)$ и $\rho_k(r)$, оставляя из четырех произвольных постоянных только одну a_k. Пусть

$$\varepsilon_k(r)=a_k\gamma_k(r),\quad \rho_k=a_k\delta_k(r)$$

при этом функции $\gamma_k(r)$ и $\delta_k(r)$ удовлетворяют тем же соотношениям (1.6), (1.9), (1.15)

Согласно условиям (2.1) из формул (1.13), (1.10) и уравнения (1.9) получим

$$\sigma_z=-2G\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{1}{r}(r\gamma_k')'\operatorname{ch}m_kl=f_2(r),\quad u=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\gamma_k'+\delta_k')\operatorname{ch}m_kl=f_1(r)$$

Записав теперь эти равенства в виде

$$F_1'(r)=(rf_1(r))'-\frac{rf_2(r)}{2G}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(r\delta_k')'\operatorname{ch}m_kl \tag{2.2}$$

$$F_2'(r)=-\frac{rf_2(r)}{2G}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(r\gamma_k')'\operatorname{ch}m_kl \tag{2.3}$$

и воспользовавшись соотношением обобщенной ортогональности (1.15), найдем коэффициенты a_k для любых однородных условий

$$a_k=\left[2\operatorname{ch}m_kl\int_{r_1}^{r_2}\gamma_k'\delta_k'rdr\right]^{-1}\int_{r_1}^{r_2}(F_1\gamma_k'+F_2\delta_k')\,dr$$

Здесь функции F_1 и F_2 суть первообразные функций F_1' и F_2' и это, вообще говоря, вызывает трудности в определении коэффициентов a_k. Если на граничных цилиндрических поверхностях $r=r_1$ и $r=r_2$ поставлены условия жесткого защемления ($\varepsilon_k'=-\rho_k'$, $\varepsilon_k=\rho_k$), условия скользящей заделки ($\varepsilon_k'=\rho_k'=0$) или их комбинации, то коэффициенты a_k можно найти по другой формуле, уже не содержащей первообразных. Умножим равенство (2.2) на γ_j, прибавим к нему умноженное на δ_j равенство (2.3) и результат проинтегрируем по частям. В силу (1.15) получим

$$\int_{r_1}^{r_2}(F_1'\gamma_j+F_2'\delta_j)\,dr=\sum_{k=1}^{\infty}[a_k(\gamma_j\delta_k'+\gamma_k'\delta_j)\,r\operatorname{ch}m_kl]_{r_1}^{r_2}+2a_j\operatorname{ch}m_jl\int_{r_1}^{r_2}\gamma_j'\delta_j'rdr$$

Указанные выше условия обращают в нуль слагаемые под знаком суммы; отсюда

$$a_k = [2 \operatorname{ch} m_k l \int_{r_1}^{r_2} \gamma_k' \delta_k' r dr]^{-1} \int_{r_1}^{r_2} (F_1' \gamma_k + F_2' \delta_k)\, dr$$

Тем же путем решается задача о цилиндре, на торцах которого заданы касательные напряжения и нормальные перемещения

$$\tau_{rz} = f_1(r), \quad w = f_2(r) \qquad \text{при } z = \pm l, \ r_1 \leqslant r \leqslant r_2$$

Из формул (1.14) и (1.10) следует:

$$f_1(r) = 2G \sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k' m_k \operatorname{sh} m_k l, \quad f_2(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\gamma_k' - \delta_k') m_k \operatorname{sh} m_k l$$

соотношение обобщенной ортогональности (1.15) дает

$$a_k = [4G m_k \operatorname{sh} m_k l \int_{r_1}^{r_2} \gamma_k' \delta_k' r dr]^{-1} \int_{r_1}^{r_2} [(f_1 - 2G f_2') \gamma_k' + f_1 \delta_k']\, r dr$$

Эта формула содержит лишь производную функции $f_2(r)$, поэтому найденное решение не учитывает постоянную составляющую нормального перемещения и справедливо для задач, которые хотя бы на одной из цилиндрических поверхностей имеют однородное условие $w = 0$. Чтобы сделать его пригодным для случая заданных на боковой поверхности нормальных и касательных напряжений, достаточно добавить элементарное решение задачи о растяжении цилиндра [11] равномерно распределенными по торцам нормальными напряжениями σ_z.

3. Следуя П. Ф. Папковичу [1], можно использовать соотношение обобщенной ортогональности и в основных задачах теории упругости о конечном полом цилиндре. При этом получается решение наиболее близкое к точному в том смысле, что из заданных на четырех граничных поверхностях восьми условий шесть удовлетворяются методом Фурье, а оставшиеся два — по одному на каждом из торцов — приближенно. Другими известными методами приближенно удовлетворяются четыре или все восемь условий.

Рассмотрим, в частности, первую основную задачу теории упругости для конечного сплошного цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_1$, $-l \leqslant z \leqslant l$ с однородными условиями на боковой поверхности и симметричными условиями на торцах

$$\sigma_r = \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } r = r_1 \tag{3.1}$$

$$\sigma_z = f_1(r), \quad \tau_{rz} = f_2(r) \quad \text{при } z = \pm l \quad (0 \leqslant r \leqslant r_1) \tag{3.2}$$

Будем считать, что добавлением соответствующего элементарного решения главный вектор напряжений на торцах цилиндра приведен к нулевому. Из формул (1.11), (1.14) и равенств (1.8), (3.1) получим известное характеристическое уравнение, определяющее числа m_k

$$[2(1-\sigma) - m_k^2 r_1^2]\, J_1^2(m_k r_1) - m_k^2 r_1^2 J_0^2(m_k r_1) = 0$$

и связь между функциями ε_k и ρ_k

$$\varepsilon_k = a_k \gamma_k, \quad \rho_k = a_k \delta_k, \quad \delta_k = J_0(m_k r) \tag{3.3}$$

$$\gamma_k = \frac{[(3-2\sigma) J_1(m_k r_1) - r_1 m_k J_0(m_k r_1)]\, J_0(m_k r)}{2(1-\sigma) J_1(m_k r_1)} + \frac{r m_k J_1(m_k r)}{2(1-\sigma)} - J_0(m_k r)$$

Согласно (3.2), (1.13) и (1.9)

$$f_1(r) = 2G \sum_{k=1}^{\infty} a_k m_k^2 \left(\gamma_k - \frac{\delta_k}{1-\sigma}\right) \operatorname{ch} m_k l \tag{3.4}$$

Введем неизвестную пока функцию

$$H(r) = 2G \sum_{k=1}^{\infty} a_k m_k^2 \gamma_k' \operatorname{ch} m_k l \tag{3.5}$$

и вычтем из нее функцию $f_1'(r)$. Учитывая (3.4), получим

$$H(r) - f_1'(r) = \frac{2G}{1-\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} a_k m_k^2 \delta_k' \operatorname{ch} m_k l \tag{3.6}$$

Умножим (3.5) на $r\delta_j'$, прибавим к равенству (3.6), умноженному на $(1 - \sigma)\, r\gamma_j'$, результат проинтегрируем по r от 0 до r_1.

В силу соотношения (1.15) имеем

$$a_k = \left[4Gm_k^2 \operatorname{ch} m_k l \int_0^{r_1} \gamma_k'\delta_k' r dr\right]^{-1} \int_0^{r_1} [(1-\sigma)\gamma_k'(H(r) - f_1'(r)) + H(r)\delta_k']\, r dr \tag{3.7}$$

Запишем функцию $H(r)$ в виде разложения по какой-либо полной системе функций $\psi_n(r)$

$$H(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(r) \tag{3.8}$$

Для нахождения коэффициентов c_n воспользуемся вторым граничным условием (3.2). Подставив (3.8) в (3.7), затем (3.7) в (1.14) и поменяв порядок суммирования, приходим к зависимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n S_n(r) = T(r) \tag{3.9}$$

$$S_n(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} m_k l}{2m_k} \left[\int_0^{r_1} (\delta_k' + (1-\sigma)\gamma_k)\psi_n r dr\right] \left[\int_0^{r_1} \gamma_k'\delta_k' r dr\right]^{-1} \gamma_k' \tag{3.10}$$

$$T(r) = f_2(r) + \frac{1-\sigma}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} m_k l}{m_k} \left[\int_0^{r_1} f_1'(r)\gamma_k' r dr\right] \left[\int_0^{r_1} \gamma_k'\delta_k' r dr\right]^{-1} \gamma_k' \tag{3.11}$$

из которой искомые коэффициенты c_n могут быть определены при помощи процесса ортогонализации Шмидта.

В качестве $\psi_n(r)$ удобно брать собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для уравнения Бесселя: в этом случае соответствующие интегралы в формуле (3.10) вычисляются при помощи табличных неопределенных интегралов. Рациональный выбор краевых условий в задаче Штурма — Лиувилля легко сделать из однородных условий (3.1) и разложения (3.5) функции $H(r)$. В частности, в рассматриваемой задаче, исходя из условия $\varepsilon_k' = 0$, или согласно (35), $H(r) = 0$ при $r = 0$ и $r = r_1$, собственные функции $\psi_n(r)$ целесообразно определить уравнением

$$\psi_n''(r) + \frac{1}{r}\psi_n'(r) + \left(p_n^2 + \frac{1}{r^2}\right)\psi_n(r) = 0$$

$$\psi_n(r) = 0 \quad \text{при } r = 0 \text{ и } r = r_1$$

т. е. $\psi_n(r) = J_1(p_n r)$, числа p_n удовлетворяют условию $J_1(p_n r_1) = 0$.

В заключение отметим, что, повторяя те же рассуждения, можно точно выполнить и любое другое условие на торцах цилиндра. Если таковым будет, например, касательное напряжение τ_{rz}, следует положить вместо (3,5)

$$H(r) = 2G \sum_{k=1}^{\infty} a_k m_k \delta_k' \operatorname{sh} m_k l \quad .$$

Поступила 25 VI 1968.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
2. Папкович П. Ф. Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит. ПММ, 1941, т. 5, вып. 3.
3. Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
4. Прокопов В. К. О соотношении обобщенной ортогональности П. Ф. Папковича для прямоугольной пластинки. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
5. Ворович И. И., Ковальчук В. Е. О базисных свойствах одной системы однородных решений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
6. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям. М., Машгиз, 1967 (Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 279).
7. Нуллер Б. М. Об однородных решениях теории упругости и соотношении ортогональности П. А. Шиффа (семинар «Механика деформируемого твердого тела» под руководством А. И. Лурье). Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
8. Schiff P. A. Sur l'equilibre d'un cylindre d'elastique. J. Math. pures et appl., 1883, ser. III, t. 9.
9. Стеклов В. А. О равновесии упругих тел вращения. Сообщения Харьковск. матем. о-ва, 1893, вторая серия., т. 3.
10. Filon L. N. G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. Trans. Royal. phil. Soc. of London, 1902, ser. A, vol. 193.
11. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.

ОБ ОШИБКАХ В КНИГЕ Л. ДЖ. СЛЕЙТЕР «ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ»

М. Э. Авербух, Л. Е. Борухов

(Саратов)

Исправлены неверные формулы разложений функций Куммера и Уиттекера первого рода по цилиндрическим функциям, приведенные в монографии Слейтер [1].

Разложения функций ${}_1F_1\,(a,\, b,\, x)$ и $M_{k,m}\,(x)$ в ряды по цилиндрическим функциям во многих случаях оказываются полезными ввиду отсутствия таблиц с необходимым интервалом изменения параметров. Такие разложения даны Слейтер в [1]. Однако все четыре итоговые формулы соответствующего параграфа 2.7.3 неверны.

Ошибочность формул (2.7.14) и (2.7.16) становится очевидной при сведении их к ранее известным частным случаям. Действительно, при $a = n + {}^1/_2$ и $b = 2n + 1$ находим по формуле (2.7.14)

$${}_1F_1\,[n + {}^1/_2,\, 2n + 1,\, x] = 2^{2n}\,\Gamma\,(n)\, e^{{}^1/_2 x} x^{-n} I_n\,({}^1/_2 x)$$

Это противоречит частной формуле (2.7.1). Из формулы (2.7.16) при $k = 0$ получаем

$$M_{0,m}\,(x) = 2^{2m}\Gamma\,(m) x^{{}^1/_2} I_m\,({}^1/_2\, x)$$

Это противоречит точной формуле (1.8.11) (см. также (9.235) [2]).