

## ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ СЛАБОМ МАХОВСКОМ ОТРАЖЕНИИ

Г. П. Шиндяпин

(Саратов)

При распространении ударной волны вдоль стенки с изломом может возникнуть сложная картина пересечения трех ударных волн (падающей, отраженной, волны Маха), называемая нерегулярным или Маховским отражением. Начиная с работы Неймана [1], впервые исследовавшего совокупность трех плоских скачков, встречающихся вместе (трехскачковая теория), возникает несоответствие между результатами теории и эксперимента. Особенно резко это несоответствие выступает в случае слабых ударных волн, для которых экспериментальные измерения углов ударных волн в тройной точке находятся в диапазоне, где трехскачковая теория не имеет решения. Большую роль в установлении этого факта сыграли результаты эксперимента Смита [2], которые впоследствии были уточнены в ряде работ [3,4].

Проблема несоответствия при слабом Маховском отражении стала хорошо известна с появлением обзорных работ [5,6].

Их многих последующих попыток устранить несоответствие теории и эксперимента и объяснить недостатки трехскачковой теории необходимо отметить работы Стернберга [7] и Сакураи [8]. Анализируя граничные условия, которые используются в трехскачковом взаимодействии, Стернберг приходит к выводу, что простые условия равного давления и направления за тройной точкой не действительны для реальной жидкости с конечной вязкостью. Невязкая теория газа приводит к неограниченному искривлению ударной волны около тройной точки, что не согласуется с существованием скачка Ранкина — Гюгонио. Стернберг предположил, что эффекты вязкости изменяют граничные условия в тройном пересечении и постулировал существование ограниченной области ударной волны (негюгониевской), которая изменяет структуру ударной волны выше и ниже тройной точки. Хотя эта область сама относительно мала, она может оказать значительное влияние на поток вниз по течению.

Впоследствии Сакураи, проводя количественный анализ граничных условий в трехскачковой теории и сравнивая теоретические и экспериментальные значения углов, пришел к выводу, что за тройной точкой имеется область существенно неоднородного течения, где вязкость играет важную роль и где, поэтому, для построения решения необходимо использовать уравнения Навье — Стокса. Приведенные Сакураи решения [8], являющиеся первым приближением при разложении искомых функций в ряды в окрестности тройной точки, устанавливают соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями углов ударных волн, но не дают ясного представления о влиянии вязкости на характер течения за тройной точкой. Представляют также интерес результаты численного расчета задачи для Маховского отражения вязких скачков уплотнения, выполненные в последнее время Шао [9].

Экспериментальные исследования и численные расчеты показывают, что вниз по течению за тройной точкой имеет место довольно резкое изменение параметров потока, происходящее в ограниченной области, прилегающей к ударным фронтам. Такие течения называются короткими волнами. Их общая теория для идеального газа была развита в работе А. А. Гриба, О. С. Рыжова, С. А. Христиановича [10]. Уравнения типа коротких волн для вязкого газа были впервые получены в работе О. С. Рыжова и Г. М. Шефтера [11] и являются упрощениями уравнений Навье — Стокса для описания двумерных нестационарных течений подобно упрощениям, проводимым для стационарных трансзвуковых течений газа в работах Зихела [12], О. С. Рыжова [13] и других авторов.

В предлагаемой работе для исследования течения вниз по потоку за тройной точкой отыскивается решение системы вязких уравнений коротких волн, подобное решению Томотики и Тамады [14]. Математически задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка при условиях, соответствующих граничным условиям зоны короткой волны. Зависимость решения от параметра,

включающего коэффициенты вязкости и теплопроводности, позволяет проследить влияние диссипативных факторов на величину и структуру области неоднородного потока за тройной точкой. Исследуется поведение решения для предельного случая вязкости, когда  $\lambda \rightarrow 0$ . Представляются доводы, которые доказывают, что решение для  $\lambda \rightarrow 0$  отлично от решения для  $\lambda = 0$ .

1. Приведем вывод системы уравнений коротких волн для вязкого теплопроводящего газа, описывающих структуру течения в окрестности тройной точки, следуя работе О. С. Рыжова и Г. М. Шефтера [11]. Уравнения неразрывности, Навье — Стокса, энергии и состояния в случае двумерных нестационарных движений можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\eta_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\eta_2 - \frac{2}{3} \eta_1) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right] \quad (1.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\eta_1 \frac{\partial v_y}{\partial y} + (\eta_2 - \frac{2}{3} \eta_1) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right] \quad (1.3)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \alpha T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\eta_2 - \frac{2}{3} \eta_1) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2\eta_1 \left\{ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (1.4)$$

$$ndp = a^2 d\rho + \alpha a^2 dT, \quad \alpha^2 a^2 T = (n - 1) c_p \quad (1.5)$$

Здесь  $x, y$  — ортогональные декартовы координаты,  $t$  — время,  $v_x, v_y$  — компоненты вектора скорости,  $\rho, p, T$  — плотность, давление, температура,  $a$  — скорость звука,  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения,  $n$  — отношение теплоемкостей,  $\eta_1, \eta_2, \kappa$  — коэффициенты вязкости, второй вязкости, теплопроводности. Удобно в дальнейшем ввести коэффициент «продольной» вязкости  $\eta = \frac{4}{3} \eta_1 + \eta_2$ .

Пусть по невозмущенному газу с параметрами  $p_0, \rho_0, T_0, \dots, \eta_0$  распространяется в направлении оси  $x$  волна, в которой избыточные величины малы по сравнению с начальными; возмущения давления, плотности, температуры и скорости звука имеют такой же порядок малости, как продольная составляющая вектора скорости  $v_x$ .

Введем, как и в теории коротких волн для идеального газа [10], подвижную систему координат и перейдем к безразмерным переменным

$$\frac{x}{a_0 t} = 1 + LX, \quad \frac{y}{a_0 t} = \frac{L}{\varepsilon} Y, \quad t = \frac{\eta_0}{\rho_0 a_0^2} \frac{\tau}{\Delta}$$

$$v_x = a_0 N V_X, \quad v_y = a_0 N \varepsilon V_Y, \quad p = \rho_0 a_0^2 (p_0 / \rho_0 a_0^2 + NP')$$

$$\rho = \rho_0 (1 + NR), \quad T = T_0 (1 + N\theta), \quad a = a_0 (1 + NA) \quad (1.6)$$

Здесь безразмерные величины  $X, Y, \tau, V_X, V_Y, P', R, \theta, A$  — порядка единицы, а  $L, \varepsilon, \Delta, N$  малы по сравнению с единицей.

Отнесем коэффициенты вязкости и теплопроводности, имеющие одинаковый порядок величин [15], к  $\eta_0$ , а остальные коэффициенты к их значениям в состоянии равновесия. Обозначая штрихами малые величины возмущений, будем иметь

$$\eta_1 = \eta_0 (\eta_{01} / \eta_0 + \eta_1'), \dots, \alpha = \alpha_0 (1 + \alpha') \quad (1.7)$$

Подставим переменные (1.6), (1.7) в систему (1.1) — (1.5) и сохраним в полученных выражениях только старшие члены.

В случае двумерных течений ( $N = L$ ,  $\varepsilon = L^{1/2}$ ,  $\Delta = L^2$ ) при медленном изменении параметров волны со временем ( $\partial(\dots)/\partial\tau \ll 1$ ) приходим к квазистационарным, а в переменных

$$X' = X, \quad Y' = \sqrt{2}Y, \quad V'_X = m_0 V_X, \quad V'_Y = 1/2 \sqrt{2} m_0 V_Y$$

$$P = \frac{\eta_0 c_{p_0}}{\alpha_0}, \quad \tau' = \frac{2\tau}{1 + (n_0 - 1)/P}, \quad m = \frac{1}{2\rho^3 a^2} \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial(1/\rho)^2} \right]_S \quad (1.8)$$

квазиавтомодельным течениям, описываемым системой коротких волн (штрихи опускаем)

$$m_0 R = V_X, \quad m_0 P' = V_X, \quad m_0 \theta = [(n_0 - 1)/\alpha_0 T_0] V \bar{X}$$

$$\frac{\partial V_X}{\partial X} = \frac{\partial V_Y}{\partial Y}, \quad (V_X - X) \frac{\partial V_X}{\partial X} - Y \frac{\partial V_X}{\partial Y} + \frac{\partial V_Y}{\partial Y} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 V_X}{\partial X^2} = 0 \quad (1.9)$$

Хотя коэффициенты вязкости не входят в (1.9), их порядок учтен величиной  $\Delta$ , а их отношение определяет число Прандтля  $P$ ; число  $m_0$  представляет значение  $m$  в невозмущенном газе, причем для совершенного газа (подчиняющегося уравнению состояния Клаперона)  $m_0 = 1/2(n_0 + 1)$ ,  $\tau$  выступает в роли параметра.

2. Для исследования структуры течения в зоне короткой волны удобно ввести цилиндрическую систему координат  $r, \vartheta, t$  и соответствующую ей подвижную систему  $\delta, Y, \tau$ . При этом связь компонент скоростей и координат систем осуществляется по формулам

$$\mu = \frac{M}{M_0} = \frac{1}{M_0} \frac{u}{a_0}, \quad v = \frac{1}{M_0 \sqrt{m_0 M_0}} \frac{v}{a_0}, \quad \delta = \frac{1}{m_0 M_0} \left( \frac{r}{a_0 t} - 1 \right)$$

$$Y = \vartheta / \sqrt{m_0 M_0}, \quad \tau = \ln t, \quad M_0 = N / m_0 \quad (2.1)$$

Переход от переменных подвижной декартовой системы (1.8) к переменным подвижной цилиндрической системы (2.1)

$$V X' = \mu, \quad V Y' = 1/2 / \sqrt{2} (\mu Y + v), \quad X' = \delta - 1/2 Y^2, \quad Y' = \sqrt{2} Y$$

$$\ln c \tau' = \tau, \quad c = \eta_0 [1 + (n_0 - 1)/P]^{-1} [2\rho_0 a_0^2 M_0^2 m_0^2]^{-1} \quad (\delta = X + 1/2 Y^2) \quad (2.2)$$

преобразует систему (1.9) к виду

$$\frac{\partial v}{\partial \delta} = \frac{\partial \mu}{\partial Y}, \quad (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \mu - \lambda \frac{\partial^2 \mu}{\partial \delta^2} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь  $\lambda = c/t$  и при  $\lambda = 0$  ( $\eta_0 = 0$ ) система (2.3) соответствует системе коротких волн для идеального газа [10].

Первые три уравнения (1.9) представляют интегралы системы и имеют в переменных (2.1) вид

$$M = \frac{p - p_0}{n_0 p_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\alpha_0 T_0}{n_0 - 1} \frac{T - T_0}{T_0} \quad (2.4)$$

который означает, что в рассматриваемом приближении движение газа адиабатическое и согласно первому уравнению (2.3) безвихревое.

3. Исключая в уравнениях системы (2.3) функцию  $v$ , приходим к уравнению

$$\mu_{\delta\delta}^2 + (\mu - \delta) \mu_{\delta\delta} + 1/2 \mu_{YY} + 1/2 \mu_{\delta} - \lambda \mu_{\delta\delta\delta} = 0 \quad (3.1)$$

которое подстановкой  $\mu = \delta + R$  приводится к виду

$$(R^2)_{\delta\delta} + R_{XX} + 3R_{\delta} + 1 - 2\lambda R_{\delta\delta\delta} = 0 \quad (3.2)$$

Индекс снизу означает частную производную по соответствующей переменной.

Уравнение (3.2) преобразованием типа Томотики — Тамады [14]

$$R = Z(S) - 2\sigma^2 Y^2, \quad S = \delta + \sigma Y^2 \quad (3.3)$$

приводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$-2\lambda Z''' + (Z^2)'' + (2\sigma + 3)Z' - 4\sigma^2 + 1 = 0 \quad (3.4)$$

или

$$-\lambda Z''' + ZZ'' + (Z' + 2\sigma + 1)(Z' - \sigma + 1/2) = 0 \quad (3.5)$$

4. Будем отыскивать решение (3.4), которое в предельном случае  $\lambda = 0$  имеет линейную равных скоростей  $\mu_1 = \mu(\delta, Y)$  звуковую линию  $\delta = \mu_1$ , на которой градиенты скорости (давления, плотности и температуры согласно (2.4)) обращаются в нуль, т. е.

$$\mu(\delta, Y) = \mu_1, \quad \mu_\delta(\delta, Y) = 0, \quad \mu_Y(\delta, Y) = 0 \quad \text{при } \delta = \mu_1 \quad (4.1)$$

Это требование необходимо при невязком течении в окрестности тройной точки, когда отраженная волна вырождается в звуковую линию [16].

Условия (4.1) выполняются согласно (3.1), (3.3) при

$$Z|_{\delta=\mu_1} = 2\sigma^2 Y^2, \quad Z'|_{\delta=\mu_1} = -1 \quad (4.2)$$

и значениях  $\sigma = 0, \sigma = -1/2$ .

При этом в уравнении

$$(Z^2)' + (2\sigma + 3)Z - (4\sigma^2 - 1)S + c = 0 \quad (4.3)$$

полученном из (3.4) понижением порядка, константа интегрирования  $c$  принимает соответственно значения:  $c = -\mu_1, c = 0$ . Решения (4.3), удовлетворяющие условиям (4.1), имеют вид

$$Z = \mu_1 - \delta \quad \text{при } \sigma = 0 \quad (4.4)$$

$$Z = \mu_1 - \delta + 1/2 Y^2 \quad \text{при } \sigma = -1/2 \quad (4.5)$$

Легко видеть, что решения (4.4), (4.5) содержатся в классах специальных решений уравнения (3.5)

$$Z = -(2\sigma + 1)S + C \quad \text{при } \sigma = 0 \quad (4.6)$$

$$Z = (\sigma - 1/2)S + C \quad \text{при } \sigma = -1/2$$

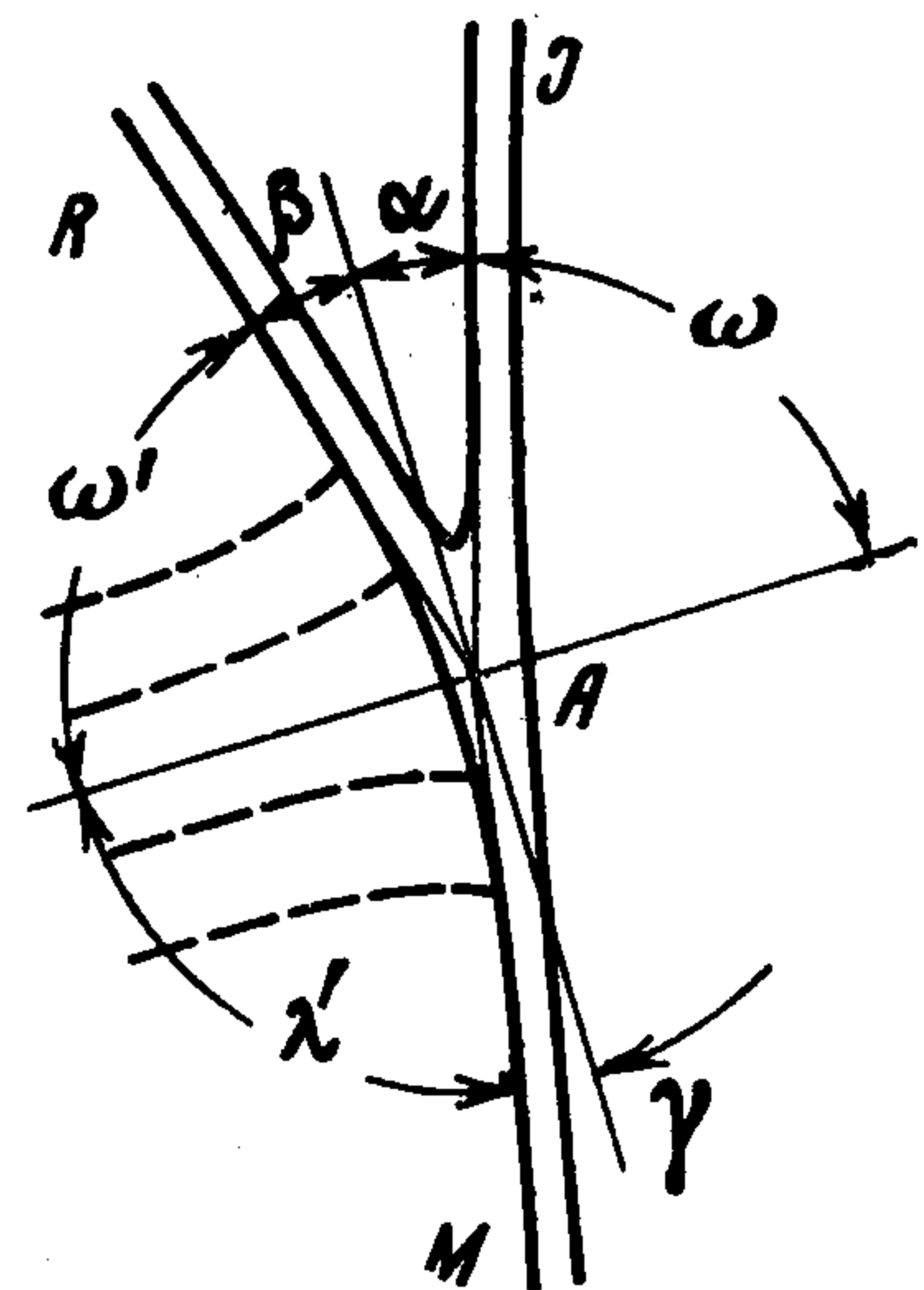
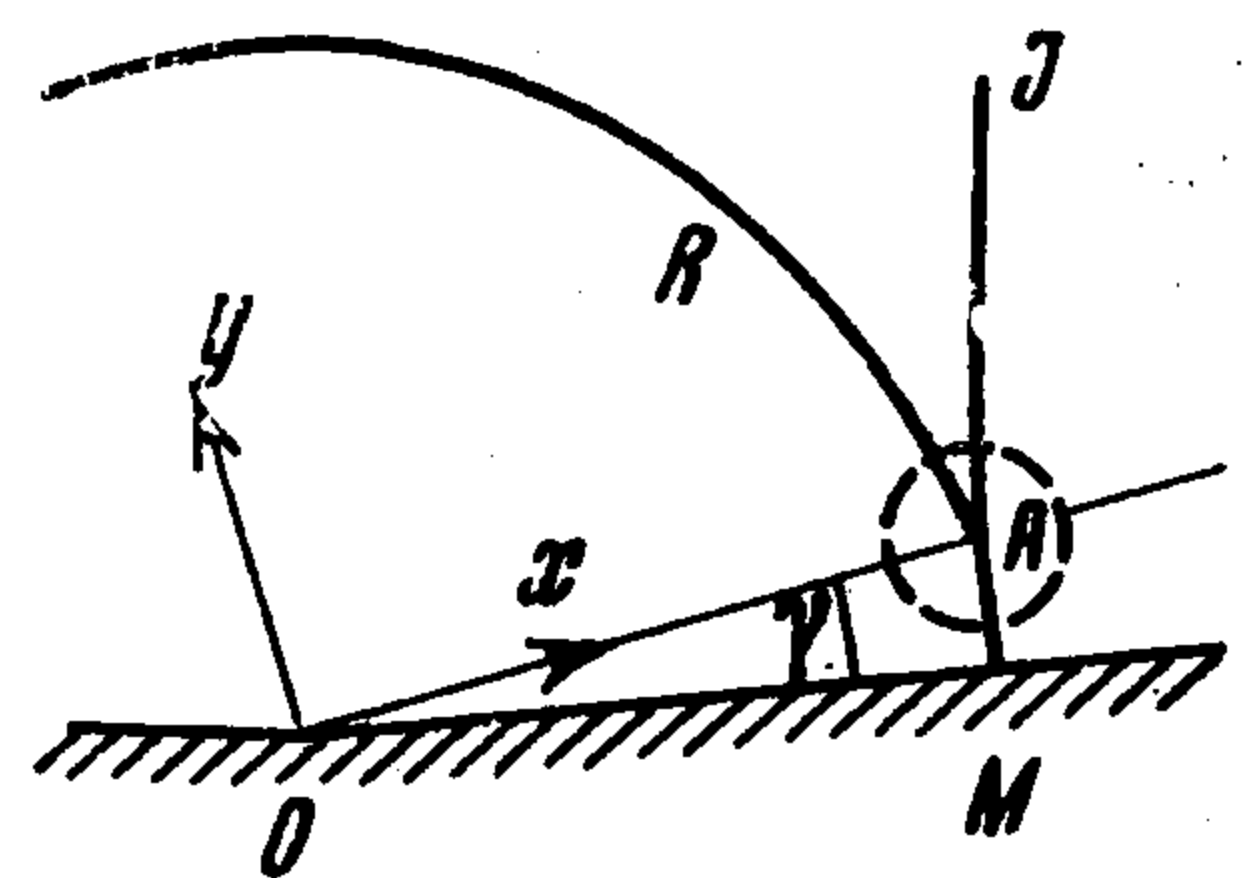
и, таким образом, будут решениями вязкого уравнения.

В дальнейшем будет показано, что физической картине течения в окрестности тройной точки отвечает значение  $\sigma = 0$ .

5. Рассмотрим течение вязкого газа за тройной конфигурацией ударных волн, возникающей при Маховском отражении слабой ударной волны от жесткой стенки с изломом (фиг. 1).

Будем считать, согласно модели Стернберга [7], что влияние вязкости и теплопроводности существенно за переходной (негюгониевской) областью, делящей три ударные волны, на которых выполняются обычные условия ударного перехода. Течение за переходной областью будем описывать моделью вязкой короткой волны, требуя, чтобы вне переходной области (выше и ниже тройной точки) решения удовлетворяли обычным условиям перехода через ударные фронты. Кроме того, потребуем, чтобы область короткой волны замыкалась вниз по потоку границей, на которой градиенты всех параметров потока обращались бы в нуль.

Обычно интенсивность  $M_1$  и наклон  $\omega$  падающей волны  $AJ$  задаются и определяются интенсивностью и наклоном  $\omega', \lambda'$  отраженной волны и волны Маха (вдали от  $A$ ).



Фиг. 1

Условия на ударных фронтах для нормальной и касательной составляющих скорости в переменных цилиндрической системы (2.1) имеют вид [16]

$$\mu = \frac{M}{M_0} = \frac{1}{M_0} \frac{p - p_0}{n_0 p_0}, \quad (\mu - \mu') \psi^\circ - v = \mu' (\alpha^\circ + Y) \quad (5.1)$$

$$\alpha^\circ = \alpha' / \sqrt{m_0 M_0}, \quad \psi^\circ = \psi / \sqrt{m_0 M_0}$$

Здесь  $\mu'$  — составляющая скорости перед фронтом волны,  $\alpha'$  — угол между направлением скорости перед фронтом и осью  $\vartheta = 0$ ;  $\psi$  — угол между направлением радиус-вектора и нормалью к ударному фронту. Будем в дальнейшем использовать  $m_0 = 1/2 (n_0 + 1)$ ; считая газ совершенным, и записывать уравнение фронта

$$\frac{d\delta}{dY} = \psi^\circ = \pm \sqrt{2\delta - (\mu + \mu')} \quad (5.2)$$

За фронтом падающей волны вне области взаимодействия имеем однородный поток со скоростью  $\mu_1 = M_1 / M_0$ . Величина скорости (давления) за фронтом отраженной волны падает по мере удаления от тройной точки и в некоторой точке  $R$ , находящейся на границе, замыкающей область короткой волны,  $\mu_R = \mu_1$ . В этой точке отраженный фронт вырождается согласно (5.2) в звуковую линию  $\delta = \mu_1$ ; наоборот, за фронтом волны Маха скорость (давление) растет при подходе к стенке (точнее к границе пограничного слоя у стенки). Выбирая за  $M_0$  значение  $M$  у основания ножки Маха, получим  $\mu_0 = 1$ .

Найдем координаты точек  $R$ ,  $A$ ,  $M$  и определим условия течения. Вводя в рассмотрение углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , являющиеся дополнительными к углам  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\lambda'$ , получим, подставляя значения  $\psi$  в выражение (5.2), уравнения лучей  $AJ$ ,  $AR$ ,  $AM$

$$X - \alpha^\circ Y = 1/2 \mu_1 + 1/2 \alpha^{\circ 2}, \quad X + \beta^\circ Y = \mu_1 + 1/2 \beta^{\circ 2}, \quad X - \gamma^\circ Y = 1/2 + 1/2 \gamma^{\circ 2} \quad (5.3)$$

Здесь

$$\alpha^\circ = \alpha / \sqrt{1/2 (n_0 + 1) M_0}, \quad \beta^\circ = \beta / \sqrt{1/2 (n_0 + 1) M_0}, \quad \gamma^\circ = \gamma / \sqrt{1/2 (n_0 + 1) M_0} \quad (5.4)$$

Записывая выражения (5.3) в точке  $A$ , получим

$$X_A = 1/2 + 1/2 \gamma^{\circ 2}, \quad \mu_1 = \alpha^{\circ 2} - \beta^{\circ 2}, \quad \mu_1 = 1 - (\alpha^{\circ 2} - \gamma^{\circ 2}) \quad (5.5)$$

Координаты точки  $R$  определим, как координаты точки касания лучом  $AR$  дуги  $\delta = \mu_1$

$$X_R = X_A - \beta^{\circ 2}, \quad Y_R = \beta^\circ, \quad (\delta_R = \mu_1) \quad (5.6)$$

Координаты точки  $M$  получим из условия перпендикулярности основания ножки Маха, а следовательно, и луча  $AM$ , к стенке по (5.2)

$$X_M = X_A - \gamma^{\circ 2}, \quad Y_M = -\gamma^\circ \quad (\delta_M = 1/2) \quad (5.7)$$

Условия для составляющей скорости  $v$  в точках  $R$ ,  $M$  получим из (5.1)

$$v_R = -\mu_1 (\alpha^\circ + \beta^\circ), \quad v_M = 0 \quad (5.8)$$

Граница, замыкающая область короткой волны вниз по потоку, будет совпадать с линией постоянного значения скорости  $\mu = \mu_1$  решения (3.3) и содержать звуковую линию  $\delta = \mu_1$  при значении  $\sigma = 0$ . При этом решение  $\mu = \delta + Z(\delta)$  будет удовлетворять условиям (4.2)

$$Z(\mu_1) = 0, \quad Z'(\mu_1) = -1 \quad (5.9)$$

6. Течение в области короткой волны за тройной точкой будет описываться уравнением

$$-\lambda Z''' + ZZ'' + (Z' + 1)(Z' + Z^{1/2}) = 0 \quad (6.1)$$

решение которого должно удовлетворять согласно (5.6), (5.7), (5.9) условиям

$$Z(\mu_1) = 0, \quad Z'(\mu_1) = -1, \quad Z^{1/2} = 1/2 \quad (6.2)$$

Определим область допустимых значений исходных параметров потока  $\alpha$ ,  $M_1$ , переписывая уравнения (5.5)

$$\alpha^{*2} - \beta^{*2} = 1, \quad 1/\mu_1 = 1 + \alpha^{*2} - \gamma^{*2} \quad (6.3)$$

в переменных

$$\alpha^* = \alpha / \sqrt{1/2(n_0 + 1)M_1}, \quad \beta^* = \beta / \sqrt{1/2(n_0 + 1)M_1}, \quad \gamma^* = \gamma / \sqrt{1/2(n_0 + 1)M_1} \quad (6.4)$$

Как видно из первого уравнения (6.3), исходные параметры  $\alpha$  и  $M_1$  должны удовлетворять условию

$$\alpha^* \gg 1 \quad (6.5)$$

Зависимость угла отражения  $\omega'$  от угла падения  $\omega$  и интенсивности  $M_1$  при этом будет даваться формулой

$$\omega' = 1/2\pi - \sqrt{(1/2\pi - \omega)^2 - 1/2(n_0 + 1)M_1} \quad (6.6)$$

На фиг. 2 результаты расчета по формуле (6.6) в случае слабых интенсивностей ударных волн ( $\zeta = 0.9$ ,  $\zeta = 0.8$ ,  $\zeta = p_0/p_1 = (1 + n_0 M_1)^{-1}$ ) сравниваются с результатами трехударной (1) и двухударной (2) теорий [1,6] и экспериментальными данными различных авторов [2,3,4].

Для вычисления угла наклона волны Маха  $\lambda'$  (или, что равносильно, угла отхода тройной точки от стенки  $\gamma$ ) необходимо к имеющимся связям (6.3) добавить недостающую зависимость для определения  $\mu_1$ . Эта зависимость может быть установлена при использовании решения уравнения (6.1)  $Z = Z(\delta)$ .

Подставим решение  $\mu = \delta + Z(\delta)$  в дифференциальные уравнения фронтов (5.2)

$$(6.7)$$

$$\frac{d\delta}{dY} = -\sqrt{2\delta - (\mu + \mu_1)}, \quad \frac{d\delta}{dY} = -\sqrt{2\delta - \mu}$$

и проинтегрируем эти уравнения, выстраивая фронты отраженной волны и волны Маха от точек  $R$  и  $M$ , соответственно, до предельной точки пересечения  $S$  на луче  $OA$ .

Обозначая через  $\delta^*$  координату предельной точки  $S$ , получим окончательно выражения

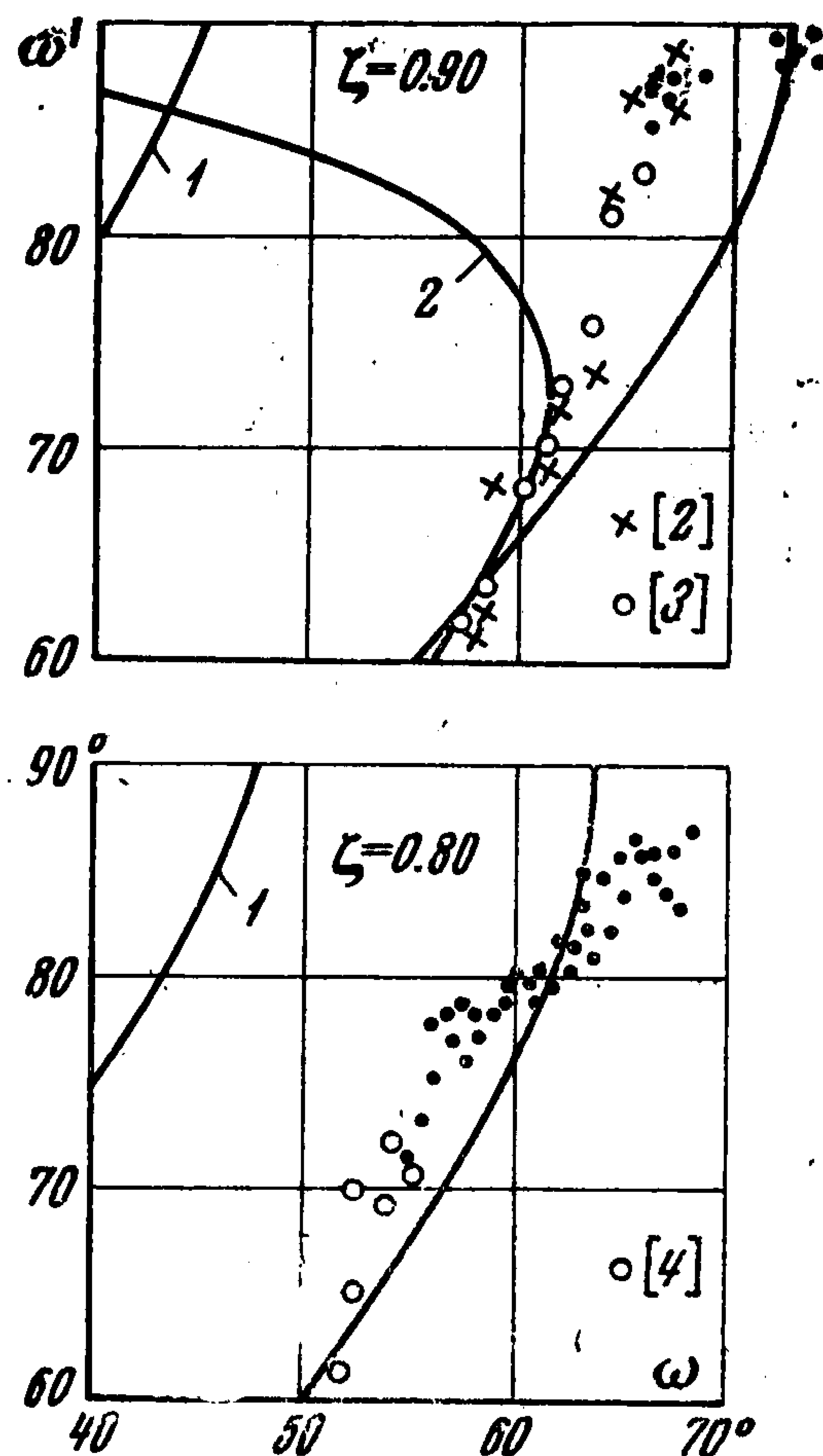
$$\beta^* = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \int_{\mu_1}^{\delta^*} \frac{d\delta}{\sqrt{\delta - Z(\delta) - \mu_1}}, \quad \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \int_{\xi^*}^{1/2} \frac{d\delta}{\sqrt{\delta - Z(\delta)}} \quad (6.8)$$

Заметим, что оба интеграла (6.8) являются сходящимися, несмотря на наличие особенностей при значениях в нижнем и верхнем пределах, соответственно, в выражениях для  $\beta^*$  и  $\gamma^*$ .

В дальнейшем удобно считать заданными величины  $\lambda$  и  $\mu_1$  ( $M_0$  и  $M_1$ ) и использовать уравнения (6.3), (6.8) для определения  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\gamma^*$ .

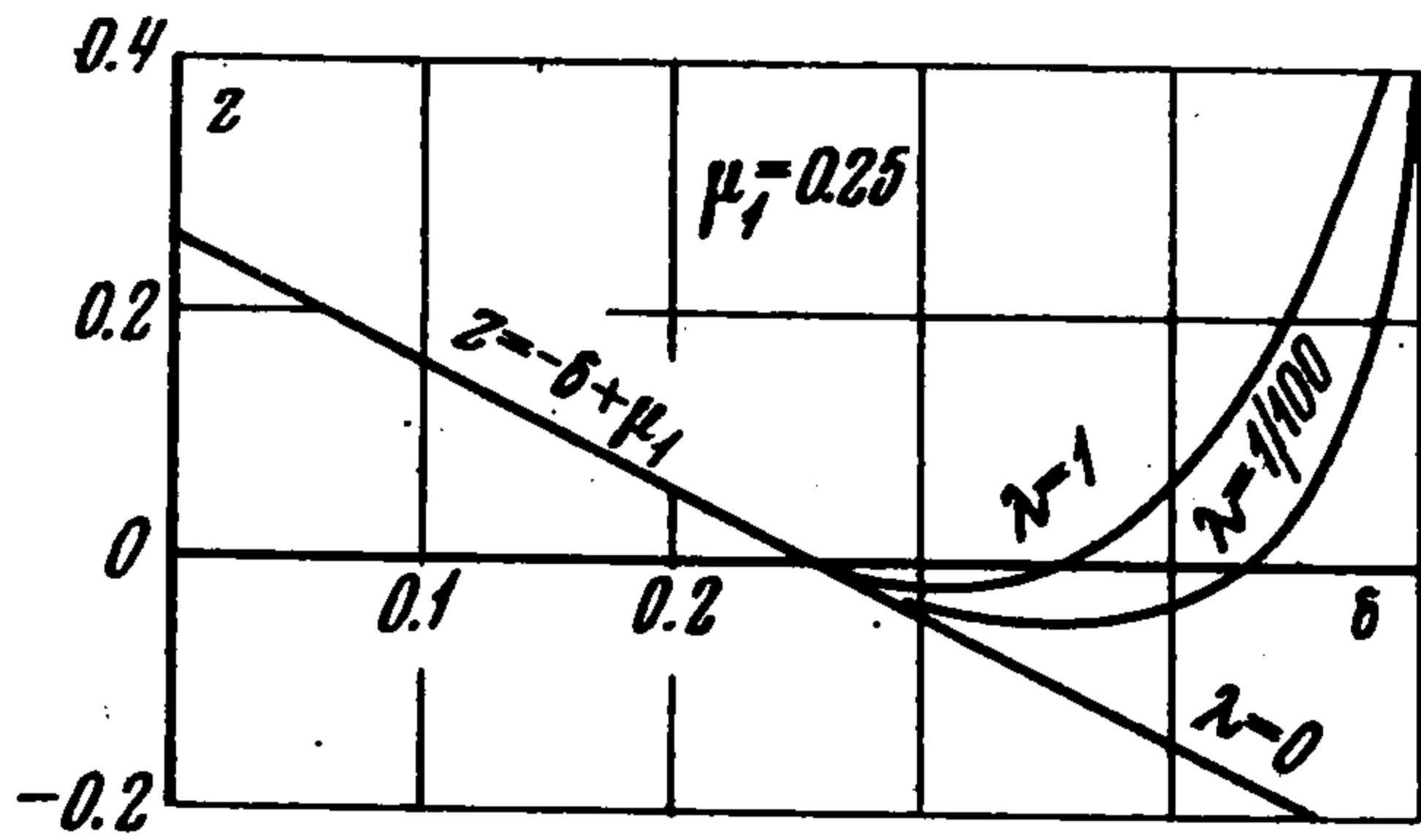
7. Решения дифференциального уравнения (6.1), удовлетворяющие условиям (6.2), находились численным интегрированием уравнения на ЭВМ при различных фиксированных значениях параметров  $\lambda$  (0, 0.01, 1.0) и  $\mu_1$  (0.45, 0.40, 0.33, 0.25, 0.20, 0).

Типичная картина интегральных кривых  $Z = Z(\delta)$  и соответствующих скоростей  $\mu = \mu(\delta)$  приведена на фиг. 3 ( $\mu_1 = 0.25$ ,  $\lambda = 0, 0.01, 1.0$ ). Как видно в зоне короткой волны при различных  $\lambda \neq 0$  происходит значительное изменение скорости (давления, плотности, температуры). Эти изменения тем резче, чем меньше величина параметра  $\lambda$ , характеризующего вязкость и теплопроводность.



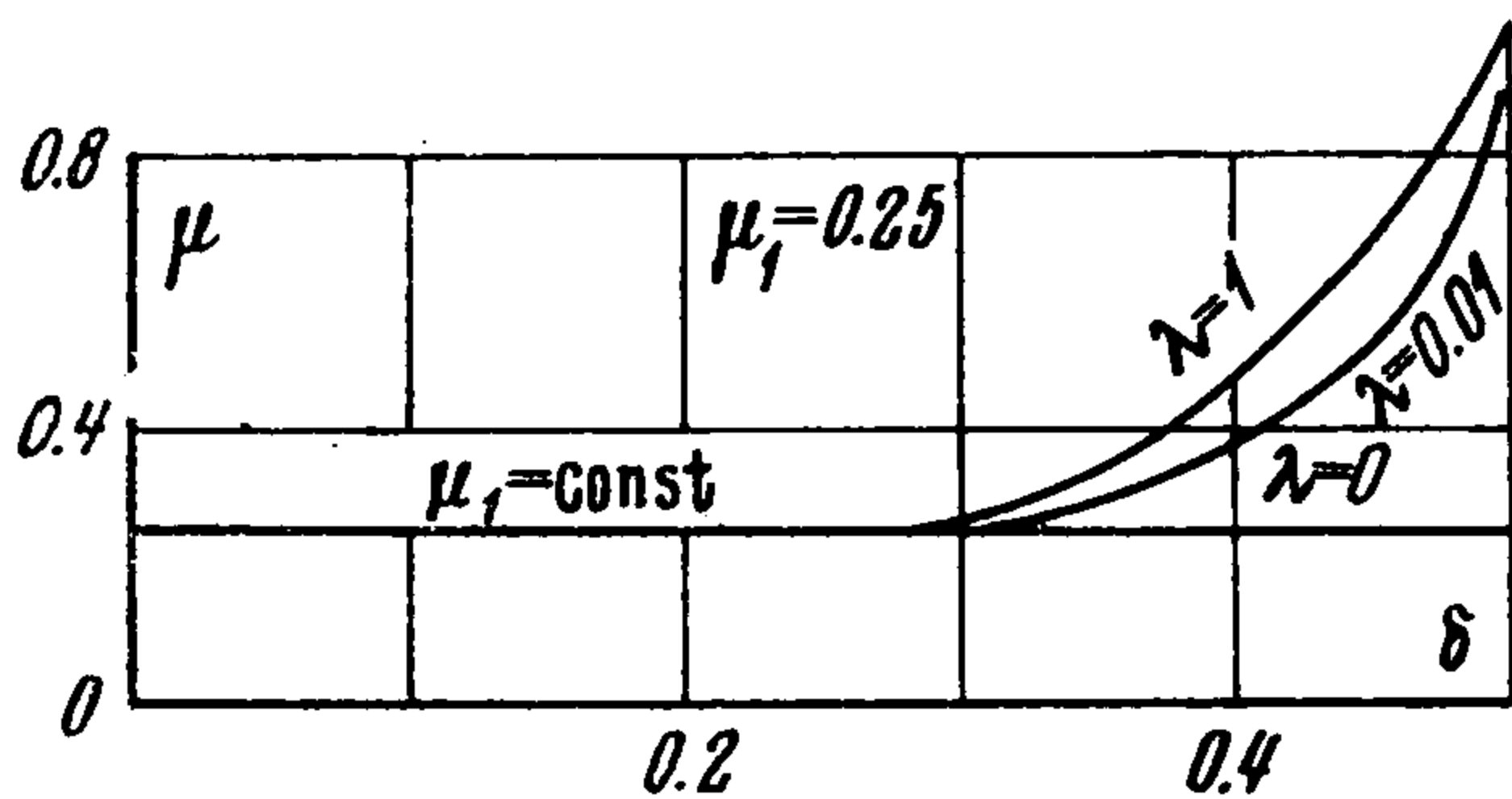
Фиг. 2

В предельном случае при  $\lambda \rightarrow 0$  интегральные кривые неограниченно приближаются к вершине угла, претерпевая там излом. Решение уравнения (6.1) при  $\lambda \rightarrow 0$  отлично от решения при  $\lambda = 0$  соответствующего упрощенного уравнения второго порядка, для которого выполняются первое и второе и не выполняется третье условия (6.2). Это обстоятельство будет причиной, по которой модель идеального газа не может быть использована для течений при  $\alpha^* > 1$ .

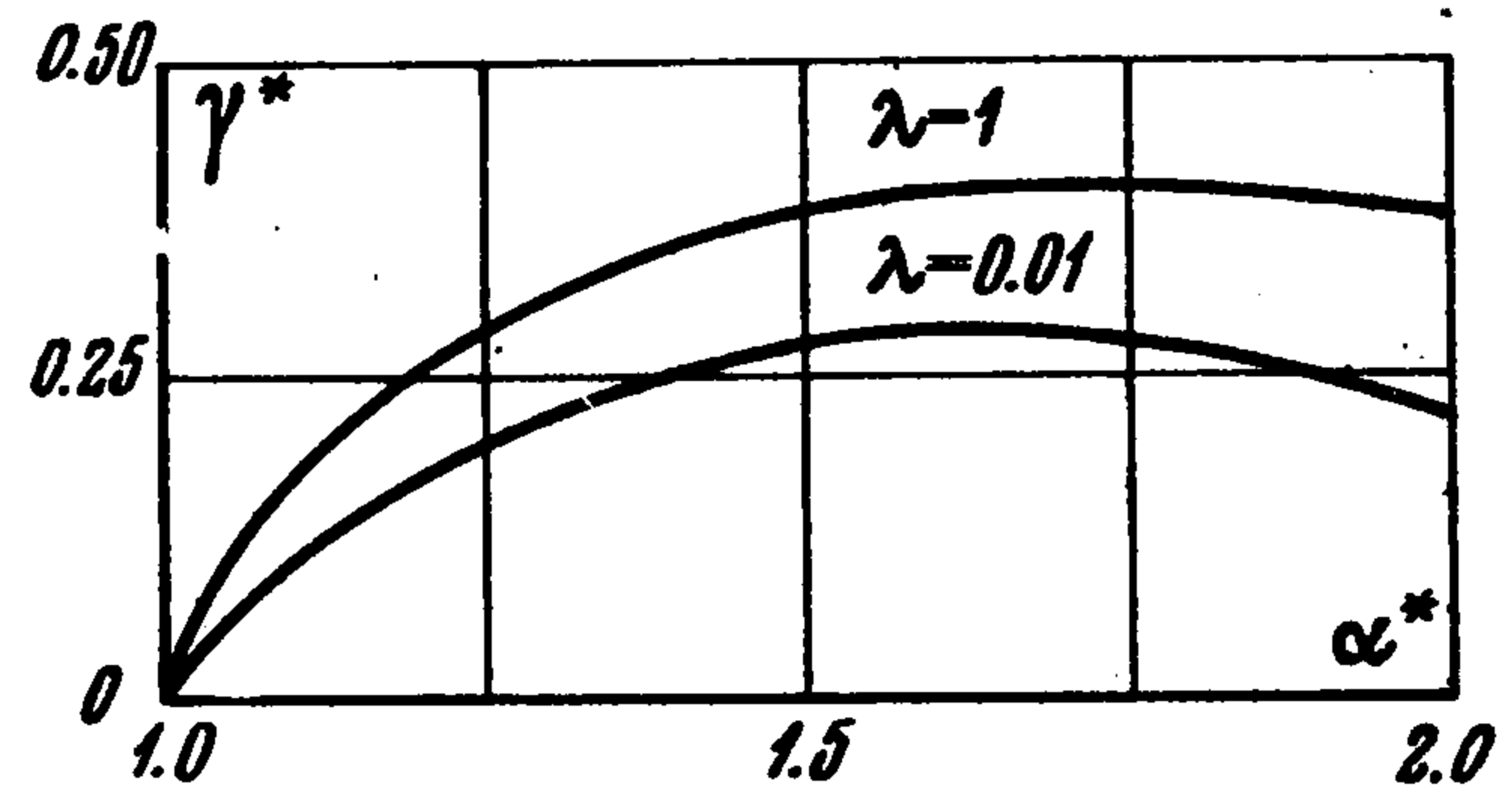


Фиг. 3

Другая особенность решений состоит в том, что при стремлении  $\mu_1$  к  $1/2$  при любом  $\lambda$  зона короткой волны стягивается в точку на поверхности стенки, из которой перпендикулярно к стенке выходит фронт отраженной волны, являющейся в этом случае звуковой линией. Картина течения такого типа получается и в случае течения идеального газа ( $\alpha^* \leq 1$ ) при  $\alpha^* \rightarrow 1$  (см. например, [16]). Это дает основание считать, что



Фиг. 4



Фиг. 5

в данном случае при  $\alpha^* \rightarrow 1$  течение принимает характер, свойственный течению невязкого газа.

Используя решение (6.1) и выражения (6.3), (6.8), можно найти угол  $\gamma^*$  наклона волны Маха. На фиг. 5 приведены кривые зависимости угла  $\gamma^*$  от  $\alpha^*$  при различных  $\lambda$ , показывающие, что при  $\lambda \neq 0$  и  $\alpha^* > 1$  угол  $\gamma$  имеет хотя и малые (6.4), но отличные от нуля значения.

При  $\lambda \rightarrow 0$  для всех  $\delta$  отличных от  $1/2$  (фиг. 3,4) решение уравнения (6.1) стремится к предельному виду  $Z = -\delta + \mu_1$ . Интегралы (6.8) при этом вычисляются, что приводит к зависимостям

$$\beta^* = \sqrt{2/\mu_1} \sqrt{\delta^* - \mu_1} \quad (7.1)$$

$$\gamma^* = \sqrt{1/\mu_1} (\sqrt{1 - \mu_1} - \sqrt{2\delta^* - \mu_1})$$

Подставляя результаты (7.1) в выражения (6.3) и исключая  $\alpha^*$ , получим, что  $\delta^* = 1/2$  и  $\gamma^* = 0$ . Таким образом, в предельном случае  $\lambda \rightarrow 0$  угол  $\gamma \rightarrow 0$ , и, согласно второму выражению (6.3), максимальное относительное избыточное давление у стенки определяется формулой

$$M_0 / M_1 = 1 / \mu_1 = 1 + \alpha^{*2} \quad (7.2)$$



Фиг. 6

Значение  $M_0 / M_1$  по формуле (7.2) будет наибольшим для всевозможных значений  $\lambda$  при фиксированном  $\alpha^*$ .

Данные расчета  $\gamma^* = \gamma^*(\alpha^*)$  фиг. 5 могут быть использованы для установления зависимости  $\gamma = \gamma(\alpha)$  при заданной интенсивности  $M_1$ ; кривая  $\gamma^* = \gamma^*(\alpha^*)$  при  $\lambda=0$  совпадает с осью  $\alpha^*$ . Удобно при этом, задавая значения  $\alpha$ ,  $\mu_1$ , находить по формулам (6.3), (6.4), (2.1), (2.2) значения  $\gamma$  и  $\lambda$ .

Наконец, решение  $\mu = \delta + Z(\delta)$  позволяет, используя условие безвихренности потока (2.3)  $\mu \gamma = \nu_\delta$ , найти поперечную компоненту скорости  $\nu$ , удовлетворяющую условиям (5.8) сохранения касательных составляющих скорости при переходе через фронта волн

$$\nu = - \frac{\mu_1(\alpha^\circ + \beta^\circ)}{\beta^\circ + \gamma^\circ} (\gamma + \gamma^\circ) \quad (7.3)$$

На фиг. 6 (в подвижной системе координат  $X, Y$ ) изображено распределение линий равных скоростей (давлений) в области течения за ударными фронтами при  $\lambda = 1$ ,  $\mu_1 = 1/3$ . Ударные фронта  $RS$  и  $MS$  при этом выстраивались из точек  $R$  и  $M$  до смыкания в точке  $S$  по результатам численного интегрирования уравнений (6.7) при условиях (5.6), (5.7), (6.2).

Отметим, что поскольку рассмотренная модель течения в силу (6.5) реализуется при всех  $\alpha^* \geq 1$ , возрастание относительного избыточного давления у стенки  $M_0 / M_1$  согласно (6.3) при возрастании  $\alpha^*$  должно привести в конечном счете к качественному изменению структуры потока (переходу к регулярному типу отражения, который в случае идеального газа возможен [10] при  $\alpha^* \geq 2$ ).

Автор приносит благодарность С. В. Фальковичу за советы при обсуждении работы.

Поступила 12 VII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Neumann J. Oblique reflection of shock. Bourd, U. S. Navy Department, Explosive Res. Rep. 1943, No. 12.
2. Smith L. G. Photographic investigations of the reflection of plane shock in air. Off. Sci. Res. and Develop, 1945, No. 6271.
3. Bleakney W., Taub A. H. Interaction of shock waves. Rev. Mod. Phys. 1949, vol. 21, No4, p. 584.
4. Kawamura R., Saito H. Reflection of Shock waves — 1. Pseudo—Stationary case. J. Phys. Soc. Japan, 1956, vol. 11, No 5, p. 584.
5. Fletcher C. H., Taub A. H., Bleakney W. The mach reflection of shock waves at nearly glancing incidence. Rev. Mod. Phys., 1951, vol. 23, No3, p. 271.
6. Pask D. C. The reflection and diffraction of shock waves. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, No. 4, p. 549.
7. Sternberg J. Triple — shock waves intersection. Phys. of Fluids, 1959, vol. 2, No. 2, p. 179.
8. Sakurai A. On the problem of weak mach reflection. J. Phys. Soc. Japan, 1964, vol. 19, No. 8, p. 1440.
9. Shao T. S. Numerical solution of plane viscous shock reflections. J. of Comput. Phys., 1967, vol. 1, No. 3, p. 367.
10. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
11. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
12. Sichel M., The effect of longitudinal viscosity on the flow at a nozzle throat. J. Fluid. Mech., 1966, vol. 25, No 4, p. 769.
13. Рыжов О. С. О некоторых свойствах трансзвуковых течений реального газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 2.
14. Tomotika S., Tamada K. Studies on two — dimensional transonic flow of compressible fluids. Part. 1. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, No. 4, p. 381.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.
16. Шиндяпин Г. П. О нерегулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. ПМТФ, 1964, № 2.