НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ОТ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СФЕРЫ В СРЕДЕ С МОЛЕКУЛЯРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

О. В. Воинов, А. М. Головин, А. Г. Петров

(Москва)

Рассматривается задача о распределении температуры вокруг излучающей сферы в однородной газовой среде с учетом молекулярного переноса тепла. Предполагается, что имеет место локальное термодинамическое равновесие. Температура определяется из уравнения, полученного при допущении, что длина пробега фотонов $1 / \alpha$ значительно превышает радиус сферы a.

Приведено общее решение линеаризованного уравнения переноса энергии. Исследуется поведение функции Грина на малых и больших временах.

Для частного случая при выполнении условий $\varkappa \ll \varkappa_r$, $\sqrt{\varkappa/\varkappa_r} \gg \alpha a$ ($\varkappa$, $\varkappa_r$ — коэффициенты молекулярной и лучистой теплопроводности) рассчитано распределение температуры в области $\alpha r \lesssim \sqrt{\varkappa/\varkappa_r}$. Определено характерное время релаксации температуры.

1. Основные уравнения. Распространение энергии от излучающей сферы приводит к неоднородному нагреву газовой среды и к появлению радиального движения газа. При достаточно малом перепаде температуры между поверхностью сферы T_a и температурой вдали от сферы T_∞ следует ожидать, что скорости движения газа v будут пренебрежимо малы по сравнению со скоростью звука, так что давление успевает выровняться и можно считать, что нагревание газа происходит при постоянном давлении.

Уравнение переноса энергии в газе, как известно [1], имеет вид

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T\right) + \operatorname{div}(\mathbf{S}_r - \varkappa\nabla T) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность газовой среды, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, t — время, S_r — плотность потока лучистой энергии, $\varkappa$ — коэффициент молекулярной теплопроводности.

В уравнении (1.1) опущен поток энергии, связанный с процессами внутреннего трения, квадратичный по скорости, а следовательно, являющийся малой более высокого порядка малости по перепаду температуры.

Далее следует воспользоваться уравнениями непрерывности [2] для плотности газа ρ и плотности энергии излучения U

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{S}_r = \alpha c (U - U_p)\left(U_p = \frac{4\sigma}{c} T^4\right) \tag{1.2}$$

Здесь c — скорость света, U_p — плотность энергии равновесного излучения, σ — постоянная Стефана-Больцмана.

Газовая среда описывается уравнением состояния идеального газа, которое совместно с условием постоянства давления в процессе нагревания газа означает, что $\rho T = \rho_\infty T_\infty$ (ρ_∞ — плотность газа вдали от капли).

Предполагается, что длина пробега излучения $1 / \alpha$ существенно превышает радиус сферы a. Пренебрегая зависимостью α от температуры и плотности, аналогично тому, как это сделано в работе [3], можно получить следующее уравнение, описывающее распределение температуры вокруг сферы:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T\right) - \varkappa\nabla T - 4\alpha\sigma T^4 + 2\frac{\alpha\sigma}{r}\int\limits_a^\infty r' T^4(r') \int\limits_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\,dr' +$$
$$+ 2\alpha\varepsilon\sigma\left[T_a^4 - \alpha\int\limits_a^\infty T^4(r)\, e^{-\alpha r} dr\right]\left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}\right] e^{-\alpha r} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь ε — эффективная степень черноты в сфере в газе, r — расстояние от центра сферы.

Введем новую функцию φ

$$T^4 = T_\infty{}^4(1+\varphi), \qquad T_a{}^4 = T_\infty{}^4(1+\varphi_a) \tag{1.4}$$

Полагая $|\varphi| \ll 1$, можно линеаризовать уравнение (1.3)

$$\mu^2 \frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial r\varphi}{\partial \tau} = r\varphi - \frac{\alpha}{2}\int_a^\infty r'\varphi(r',\tau)\int_{|r-r'|}^{r+r} e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\,dr' - A\left(r - \sqrt{r^2-a^2}\right)e^{-\alpha r}\eta(r-a) \tag{1.5}$$

Здесь

$$\mu^2 = \frac{\varkappa}{16\alpha\sigma T_\infty{}^3}, \qquad \tau = \frac{\chi t}{\mu^2}, \qquad \chi = \frac{\varkappa}{\rho c_p}$$

$$A = \frac{\varepsilon}{2}\left(\varphi_a - \alpha\int_a^\infty \varphi e^{-\alpha r}dr\right), \qquad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

В уравнении (1.5) опущен конвективный член, так как в соответствии с линеаризованным первым из уравнений (1.2) v будет величиной порядка $\partial\varphi / \partial t$, а потому $r\mathbf{v}\nabla\varphi$ будет малой величиной порядка φ^2.

2. Общий вид решения линеаризованного уравнения. Если $\varphi(r)$ доопределить для $r < 0$ четным образом $\varphi(-r) = \varphi(r)$, то пренебрегая величинами порядка αa и $\alpha a \ln \alpha a$ вместо (1.5) можно записать уравнение [3]

$$\mu^2 \frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial r\varphi}{\partial \tau} = r\varphi - \frac{\alpha}{2}\int_0^\infty r'\varphi(r',\tau)E_1(\alpha|r-r'|)\,dr' - \tag{2.1}$$

$$- Ar\left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}\right]e^{-\alpha|r|}\eta(r^2-a^2) \qquad \left(E_1(x) = \int_x^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\right)$$

с произвольным начальным и граничными условиями

$$\begin{aligned} &\varphi(r,\tau) \to \varphi_a(\tau) \text{ при } r \to a+0, \ \tau \neq 0 \\ &\varphi(r,\tau) \to 0 \text{ при } r \to \infty \\ &\varphi(r,\tau) \to \varphi_0(r) \text{ при } \tau \to 0, \ r \neq a \end{aligned} \tag{2.2}$$

Далее, удобно считать заданным граничное условие при $r = +0$. Пусть $r\varphi(r,\tau) \to aB(\tau)$ при $r \to +0$, $\tau > 0$. Если характерное время изменения граничного значения температуры $\varphi_a(\tau)$ велико по сравнению с a^2/χ — временем установления температуры в пограничном слое, обусловленном молекулярной теплопроводностью, то так же, как и при рассмотрении стационарного распределения температуры [3], при $\mu \gg a$ можно считать $B(\tau) = \varphi_a(\tau)$. Дальнейшее рассмотрение ограничивается этим случаем.

Для решения уравнения (2.1) используются преобразования Фурье и Лапласа

$$\Phi(k,p) = \int_0^\infty e^{-p\tau}d\tau \int_{-\infty}^\infty r\varphi(r,\tau)e^{-ikr}\,dr, \qquad \Phi_0(k,p) = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^\infty r\varphi_0(r)e^{-ikr}dr \tag{2.3}$$

$$A^*(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau}A(\tau)\,d\tau, \qquad B^*(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau}\varphi_a(\tau)\,d\tau$$

Образ уравнения (2.1) имеет вид

$$-\mu^2k^2\Phi - 2\mu^2ikaB^* - p(\Phi - \Phi_0) = \Phi - A^*F - \frac{\alpha}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{\alpha} \tag{2.4}$$

$$F = -ia^2 \operatorname{arc\,tg}(k/\alpha)$$

Отсюда следует, что

$$\Phi - \Phi_\infty = \frac{p(\Phi_0 - \Phi_\infty)}{1 + p + \mu^2 k^2 - (\alpha / k) \operatorname{arc\,tg} (k / \alpha)} \tag{2.5}$$

$$\Phi_\infty = \frac{A^* F - 2\mu^2 ik\alpha B^*}{1 + \mu^2 k^2 - (\alpha / k) \operatorname{arc\,tg} (k / \alpha)}$$

Если φ_a не зависит от τ, то Φ_∞ будет образом стационарного распределения температуры, полученного ранее в работе [3]. В общем случае Φ_∞ (k, p) соответствует

$$r\varphi_\infty(r, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(AF - 2\mu^2 ik\alpha\varphi_a) e^{ikr} dk}{1 + \mu^2 k^2 - (\alpha / k) \operatorname{arc\,tg} (k / \alpha)} \tag{2.6}$$

Воспользовавшись известными теоремами о свертке для преобразований Фурье и Лапласа, из (2.5) легко получить

$$r(\varphi - \varphi_\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} r' \left[\varphi_0(r') G(r - r', \tau) - \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau G(r - r', \tau - \tau') \varphi_\infty(r', \tau') d\tau'\right] dr' \tag{2.7}$$

$$G(r, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ikr - \left(1 + \mu^2 k^2 - \frac{\alpha}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{\alpha}\right)\tau\right] dk$$

3. Функция Грина. При больших временах $\tau \gg 1$ основной вклад в интеграл, определяющий функцию Грина G (r, τ), вносит область малых значений k

$$G(r, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikr - \mu_*^2 k^2 \tau)\, dk =$$

$$= \frac{1}{2\mu_* \sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\mu_*^2 \tau}\right) \qquad \left(\mu_*^2 = \mu^2 + \frac{1}{3\alpha^2}\right) \tag{3.1}$$

Этот результат совпадает с полученным ранее в работе [4], где рассматривалась аналогичная задача для плоскопараллельного случая с использованием уравнения переноса излучения в приближении Шварцшильда, т. е. с введением односторонних потоков.

Функция Грина (3.1) будет функцией Грина обычного уравнения теплопроводности с коэффициентом температуропроводности, равным сумме коэффициентов молекулярной и лучистой температуропроводности.

При малых временах $\tau \ll 1$ можно разложить $\exp\{-\tau[1 - (\alpha / k) \operatorname{arctg}(k / \alpha)]\}$ в ряд, ограничиваясь членом первого порядка малости. Функция Грина принимает вид

$$G(r, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikr - \mu^2 k^2 \tau) \left(1 - \tau + \frac{\alpha\tau}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{\alpha}\right) dk = \tag{3.2}$$

$$= \frac{1 - \tau}{2\mu \sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\mu^2\tau}\right) + \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikr - \mu^2 k^2 \tau) \frac{\alpha}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{\alpha}\, dk$$

При малом значении $\tau \ll \min(1, 1 / \mu^2\alpha^2)$ считается, что величина $\exp(-\mu^2 k^2 \tau) \approx 1$, так как в интеграл основной вклад вносит область значений $k \sim \alpha$.

Таким образом, можно получить

$$G(r, \tau) = \frac{1 - \tau}{2\mu \sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\mu^2\tau}\right) + \frac{\alpha\tau}{2} E_1(\alpha \mid r \mid) \tag{3.3}$$

Этот результат отличается от полученного ранее для плоскопараллельного случая [4] тем, что вместо экспоненты появилась интегральная экспонента.

Однако остается справедливым вывод, что влияние молекулярной теплопроводности оказывается существенным в области r порядка $\mu\sqrt{\tau}$.

Если $\mu^2\alpha^2 \gg 1$, то $\tau \ll 1 / \mu^2\alpha^2$ и рассматриваемая область соответствует $r \ll 1 / \alpha$. В случае $\mu^2\alpha^2 \ll 1$ формула (3.3) справедлива при $\tau \ll 1$, а поэтому область, где существенно влияние молекулярной теплопроводности, ограничена условием $r \ll \mu\sqrt{r}$.

4. **Частное решение.** Пусть $\varphi_0(r) \equiv 0$, $\varphi_a(\tau) = \varphi_a \eta(\tau)$. Тогда в соответствии с (2.7) и (2.6)

$$r(\varphi_\infty - \varphi) = \int_0^\infty r'\varphi_\infty(r')\left[G(r-r',\tau) - G(r+r',\tau)\right]dr' \tag{4.1}$$

Как показано в работе [3], стационарное распределение температуры в области $r \lesssim \mu$ при $\mu^2\alpha^2 \ll 1$, $\mu \gg a$ имеет вид

$$r\varphi_\infty(r) = a\varphi_a \exp(-r/\mu) \tag{4.2}$$

Таким образом, для малых времен $\tau \ll 1$ в области $r \lesssim \mu$

$$\begin{gathered} r(\varphi_\infty - \varphi) = a\varphi_a \int_0^\infty \frac{1-\tau}{2\mu\sqrt{\pi\tau}} \left\{\exp\left[-\frac{(r-r')^2}{4\mu^2\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(r+r')^2}{4\mu^2\tau}\right]\right\} \exp\left(-\frac{r'}{\mu}\right) dr' = \\ = \frac{a\varphi_a}{2}\left[\exp\left(-\frac{r}{\mu}\right)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tau} - \frac{r}{2\mu\sqrt{\tau}}\right) - \exp\left(\frac{r}{\mu}\right)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tau} + \frac{r}{2\mu\sqrt{\tau}}\right)\right] \\ \left(\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \exp(-t^2)\,dt\right) \end{gathered} \tag{4.3}$$

Для больших времен $\tau \gg 1$ в той же области

$$\begin{gathered} r(\varphi_\infty - \varphi) = \frac{a\varphi_a}{2}\left[\exp\left(\tau - \frac{r}{\mu}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\mu_*\sqrt{\tau}}{\mu} - \frac{r}{2\mu_*\sqrt{\tau}}\right) - \right. \\ \left. - \exp\left(\tau + \frac{r}{\mu}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\mu_*\sqrt{\tau}}{\mu} + \frac{r}{2\mu_*\sqrt{\tau}}\right)\right] \end{gathered} \tag{4.4}$$

Из формул (4.3) и (4.4) следует, что характерное время релаксации температуры, а следовательно, и потока тепла, переносимого молекулярной теплопроводностью, при $t \ll \mu^2 / \chi$ $(\tau \ll 1)$ составляет r^2 / χ, а при $t \gg \mu^2 / \chi$ оказывается величиной порядка $\mu^4\alpha^2 / \chi \sim \mu^2 / \chi_r$ ($\chi_r = \chi\varkappa_r/\varkappa$ — лучистая температуропроводность, $\varkappa_r$ — коэффициент лучистой теплопроводности). Условие $\chi_r \gg \chi$ означает, что в области $r \lesssim \mu$ релаксация температуры происходит за времена μ^2 / χ. Таким образом излучение не оказывает влияния на релаксацию температуры в области $\alpha r \lesssim \sqrt{\varkappa / \varkappa_r}$.

Поступила 7 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2 М., Гостехиздат, 1954.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн. Изд. 2. М., «Наука», 1966.
3. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Перенос энергии от излучающей сферы в среде с молекулярной теплопроводностью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
4. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 1.