О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГОДОГРАФА К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ПЛАЗМЕ

О. М. Сапункова

(Саратов)

В сильных электрических полях связь между плотностью тока $\mathbf{j}$ в плазме и напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ будет нелинейной. Нелинейность исходных уравнений приводит к затруднениям при расчете векторного поля плотности тока в среде. Однако эти трудности устраняются, если рассматривать уравнения электродинамики в плоскости годографа, где эти уравнения становятся линейными.

Для случая плоских стационарных полей переход с физической плоскости на плоскость годографа в уравнениях электродинамики выполнен в работе [1] для произвольной связи электропроводности σ и плотности тока. Естественным развитием этих исследований является изучение электродинамических процессов в плазме при конкретной зависимости $\sigma(j)$, обусловленной состоянием плазмы.

В предлагаемой работе записаны уравнения электродинамики в плоскости годографа для сильно ионизированной плазмы при учете упругих соударений между электронами и ионами. Метод разделения переменных дает общие решения этих уравнений, при помощи которых строится решение задачи о токе в бесконечном сосуде с непроводящими стенками, аналогичной задаче об истечении газа из бесконечного сосуда [2].

В силу практической невозможности учесть точно влияние всех факторов (ионизации, излучения, неупругих соударений и др.) на зависимость $\sigma(j)$ в сильных электрических полях предлагается представлять эту зависимость приближенно степенной (или показательной) функцией, в которой постоянные параметры определяются из эксперимента. Для степенной зависимости $\sigma(j)$ получено решение задачи о токе в сосуде с непроводящими стенками. При показательном законе зависимости $\sigma(j)$ имеется возможность постановки смешанных краевых задач для уравнений электродинамики.

1. В сильно ионизированной плазме при учете упругих столкновений между электронами и ионами имеют место следующие соотношения [1,3]

$$\sigma=\sigma_0\left(1+\frac{v^2}{v_0^2}\right)^{\gamma}, \quad v_{\max}^2=v_0^2+v^2, \quad \mathbf{j}=Nev$$
$$\left(v_{\max}^2=\frac{3kTe}{M}, \qquad v_0^2=\frac{3kT}{M}\right) \tag{1.1}$$

Здесь T, T_e — эффективные температуры соответственно тяжелых частиц и электронов, M — масса тяжелой частицы, k — постоянная Больцмана, v_0^2, $v_{\max}^2$ пропорциональны соответственно местной кинетической энергии плазмы и электронов, σ_0 — электропроводность в плазме при $T_e=T$, N — концентрация электронов, v — направленная скорость электронов, e — заряд электрона, γ — постоянная величина.

Полагая, что в данном состоянии плазмы $T=\text{const}$, $M=\text{const}$, $\sigma_0=\text{const}$, $\gamma>1/2$, $N=\text{const}$, можно записать

$$\Gamma^2=\frac{j}{\sigma}\frac{d\sigma}{dj}=\frac{2\gamma j^2}{j^2+j_0^2}\;(j_0^2=N^2e^2v_0^2=\text{const}) \tag{1.2}$$

Введем уравнения для электрического тока в плоскости годографа [1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2P}{\partial j^2}+\frac{1-\Gamma^2}{j^2}\frac{\partial^2P}{\partial\theta^2}+\frac{1+\Gamma^2}{j}\frac{\partial P}{\partial j}=0\\ \frac{\partial^2Q}{\partial j^2}+\frac{1-\Gamma^2}{j^2}\frac{\partial^2Q}{\partial\theta^2}-\frac{d}{dj}\ln\left[\frac{\sigma}{j}(1-\Gamma^2)\right]\frac{\partial Q}{\partial j}=0\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь θ — угол наклона вектора $\mathbf{j}$ к оси x; потенциальная функция тока P и силовая функция тока Q вводятся так:

$$j_x=j\cos\theta=\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad j_y=j\sin\theta=\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}\;\left(\begin{matrix}x=x(j,\theta)\\ y=y(j,\theta)\end{matrix}\right) \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) с учетом (1.2) можно представить так:

$$2\xi(1-\xi)^2\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2}+\frac{1-2\gamma\xi}{2\xi}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+2(1-\xi)(1+\gamma\xi-2\xi)\frac{\partial P}{\partial\xi}=0 \qquad (1.5)$$

$$2\xi(1-\xi)^2\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2}+\frac{1-2\gamma\xi}{2\xi}\frac{\partial^2 Q}{\partial\theta^2}+\frac{2(1-\xi)}{1-2\gamma\xi}(1-\gamma\xi-2\xi+2\gamma\xi^2+2\gamma^2\xi^2)\frac{\partial Q}{\partial\xi}=0 \qquad (1.6)$$

$$\xi=\frac{\Gamma^2}{2\gamma}=\frac{j^2}{j^2+j_0^2} \qquad (1.7)$$

Очевидно, $\xi<1$, при $\xi<{}^1/_2\gamma^{-1}<1$ уравнения (1.5) и (1.6) эллиптического типа.

2. Применение метода разделения переменных к уравнениям (1.5) и (1.6) дает следующий результат. Если функцию $P(\xi,\theta)$ представить в виде

$$P_\lambda(\xi,\theta)=f_\lambda(\xi)T_\lambda(\theta) \qquad (2.1)$$

то из уравнения (1.5) получается, что $T_\lambda(\theta)$ удовлетворяет соотношению $T''+\lambda^2T=0$ (λ — произвольный параметр, определяющийся при решении краевой задачи как собственное значение задачи Штурма — Лиувилля). Следовательно,

$$T_\lambda(\theta)=C_1e^{i\lambda\theta}+C_2e^{-i\lambda\theta} \text{ при } \lambda\neq0,\ T_0(\theta)=A+B\theta \text{ при } \lambda=0,\ (A,B,C_1,C_2=\text{const}) \qquad (2.2)$$

Функция $f_\lambda(\xi)$ при $\lambda\neq0$ удовлетворяет P-уравнению Римана [4]

$$f=P\begin{Bmatrix}0 & \infty & 1 & \\ {}^1/_2\lambda & 0 & {}^1/_2(\gamma+\gamma_\lambda) & \xi\\ -{}^1/_2\lambda & 1-\gamma & {}^1/_2(\gamma-\gamma_\lambda) & \end{Bmatrix}$$

и представляется в виде

$$\begin{aligned}f_\lambda(\xi)={}&\xi^{{}^1/_2\lambda}(\xi-1)^{{}^1/_2(\gamma+\gamma_\lambda)}\{C_3F({}^1/_2(\lambda+\gamma)+{}^1/_2\gamma_\lambda,\ 1+{}^1/_2(\lambda-\gamma)+\\&+{}^1/_2\gamma_\lambda,1+\lambda,\ \xi)+C_4\xi^{-\lambda}F({}^1/_2(\gamma-\lambda)+{}^1/_2\gamma_\lambda,\ 1-{}^1/_2(\lambda+\gamma)+\\&+{}^1/_2\gamma_\lambda,\ 1-\lambda,\ \xi)\};\quad (\gamma_\lambda=\sqrt{\gamma^2-(2\gamma-1)\lambda^2})\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Здесь C_3, C_4 — постоянные, λ — не целое, $F(a,b,c,\xi)$ — гипергеометрическая функция

$$f_0(\xi)=C_5+C_6\int\frac{(1-\xi)^{\gamma-1}}{\xi}d\xi \quad \text{при } \lambda=0 \qquad (2.4)$$

Аналогично функцию $Q(\xi,\theta)$ можно представить в виде

$$Q_\lambda(\xi,\theta)=\varphi_\lambda(\xi)\psi_\lambda(\theta) \qquad (2.5)$$

$$\psi_\lambda(\theta)=\frac{dT_\lambda(\theta)}{d\theta},\quad \varphi_\lambda(\xi)=\frac{2\xi}{\lambda^2(1-\xi)^{\gamma-1}}\frac{df_\lambda(\xi)}{d\xi} \quad \text{при } \lambda\neq0 \qquad (2.6)$$

$$\psi_0(\theta)=C_7+C_8\theta,\quad \varphi_0(\xi)=C_9+C_{10}\int\frac{1-2\gamma\xi}{\xi(1-\xi)^{\gamma+1}}d\xi \quad \text{при } \lambda=0 \qquad (2.7)$$

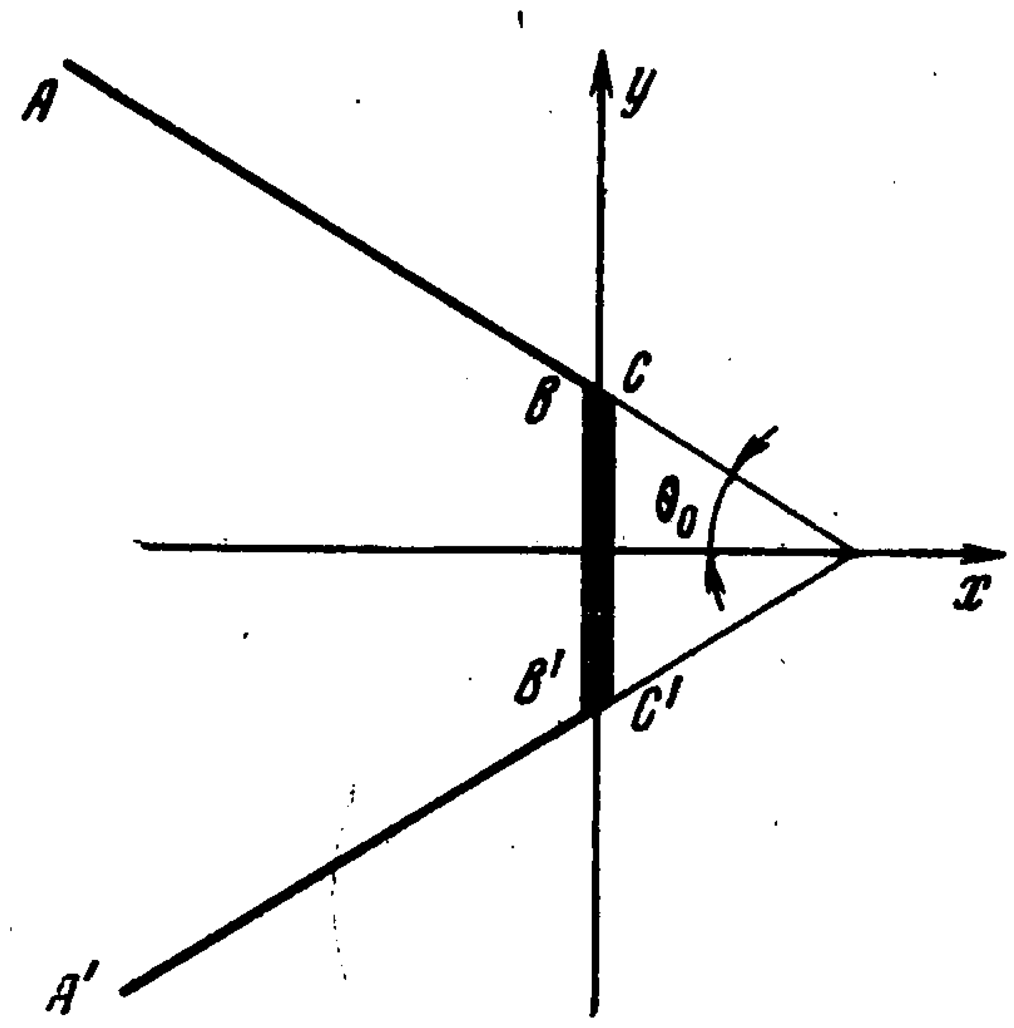
$$(C_7,\ C_8,\ C_9,\ C_{10}=\text{const})$$

3. Метод разделения переменных с успехом применяется к решению ряда краевых задач, одной из которых будет задача, аналогичная задаче об истечении газа из бесконечного сосуда [2].

Имеется бесконечный сосуд с симметричными непроводящими стенками, заполненный сильно ионизированной плазмой. В отверстие сосуда вставлен катод, ширина которого $BB'=2b$ (фиг. 1). Определить поле плотностей тока внутри сосуда, считая, что процесс — установившийся, плоский, плотность заряда на электроде во всех точках одинакова, $\xi_1<{}^1/_2\gamma^{-1}$ (ξ_1 соответствует плотности тока j_1 на выходе из сосуда), приэлектродный слой не учитывается.

На плоскости годографа ($\xi_x = \xi \cos\theta$, $\xi_y = \xi \sin\theta$) эта задача ставится так: определить функцию $Q(\xi, \theta)$ в секторе $0 < \xi < \xi_1$, $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ (фиг. 2) по граничным условиям

$$
\begin{aligned}
&Q(\xi, \theta_0) = -{}^1/_2 I \quad (0 < \xi \leqslant \xi_1)\\
&Q(\xi, -\theta_0) = {}^1/_2 I \quad (0 < \xi \leqslant \xi_1)\\
&Q(\xi_1, \theta) = -{}^1/_2 I \quad (0 < \theta \leqslant \theta_0)\\
&Q(\xi_1, \theta) = {}^1/_2 I \quad (-\theta_0 \leqslant \theta < 0)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$



Фиг. 1

где I — сила тока на выходе из сосуда

$$
I = 2j_1 b = \frac{2b\xi_1^{1/2} j_0}{(1 - \xi_1)^{1/2}}
\tag{3.2}
$$

Кроме того, в силу симметрии

$$
Q(\xi, 0) = 0 \quad (0 < \xi < \xi_1)
\tag{3.3}
$$

Метод разделения переменных определяет решение поставленной краевой задачи в форме, аналогичной известному решению соответствующей задачи Чаплыгина о струе

$$
Q(\xi, \theta) = -\frac{I\theta}{2\theta_0} - \frac{I}{\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{z_\lambda(\xi)}{z_\lambda(\xi_1)} \sin\frac{\lambda\pi\theta}{\theta_0}
\tag{3.4}
$$

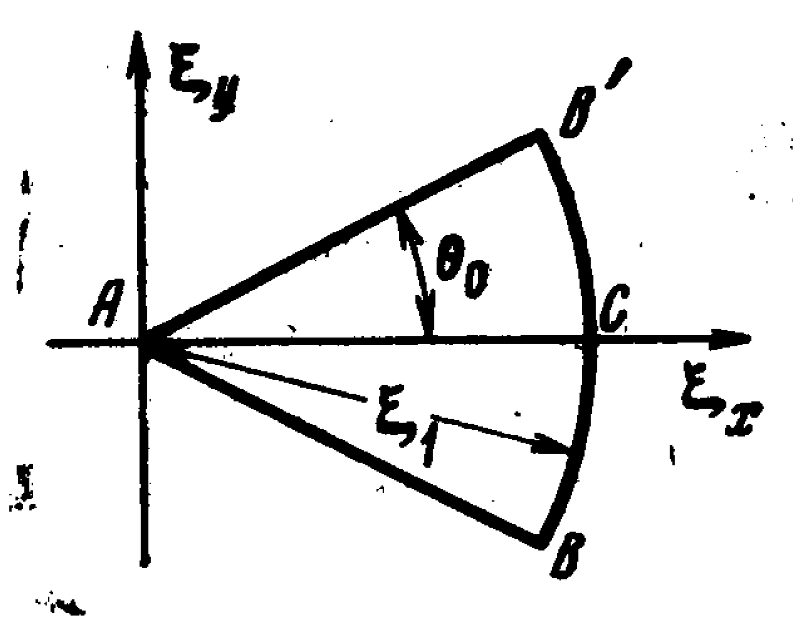
где

$$
\begin{aligned}
z_\lambda(\xi) = \xi^{\lambda+1} \operatorname{Re}\Big\{&(1-\xi)^{1-{}^1/_2\gamma+{}^1/_2\gamma_\lambda} \Big[\Big(\frac{\lambda}{\xi} + \frac{1}{2}\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - (2\gamma-1)4\lambda^2}}{1-\xi}\Big) \times\\
&\times F(\lambda + {}^1/_2\gamma + {}^1/_2\gamma_\lambda, \lambda + 1 - {}^1/_2\gamma + {}^1/_2\gamma_\lambda;\ 1 + 2\lambda;\ \xi) +\\
&+ (1+2\lambda)^{-1}(\lambda + {}^1/_2\gamma + {}^1/_2\gamma_\lambda)(\lambda + 1 - {}^1/_2\gamma + {}^1/_2\gamma_\lambda) F(1 + \lambda + {}^1/_2\gamma +\\
&+ {}^1/_2\gamma_\lambda,\ 2 + \lambda - {}^1/_2\gamma + {}^1/_2\gamma_\lambda;\ 2 + 2\lambda;\ \xi)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
\gamma_\lambda = \sqrt{\gamma^2 - (2\gamma - 1)4\lambda^2}
$$

Соотношение (3.4) дает возможность получить значение плотности тока j в любой точке внутри сосуда.

4. В плазме с любой степенью ионизации и даже в сильно ионизированной плазме точный учет всех различных факторов, влияющих на связь σ и j (междуэлектронные соударения, ионизация, излучение и др.) очень сложен и практически невозможен.



Фиг. 2

Поэтому имеет смысл представлять зависимость $\sigma(j)$ приближенно в виде некоторой кривой, например, в виде $\sigma(j) = aj^\alpha$, где параметры a, α определяются из эксперимента и постоянны в определенных интервалах изменения j. Для такого вида зависимости уравнения электродинамики в плоскости годографа (1.3) имеют вид

$$
\frac{\partial^2 P}{\partial j^2} + \frac{1-\alpha}{j^2}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2} + \frac{1+\alpha}{j}\frac{\partial P}{\partial j} = 0
\tag{4.1}
$$

$$
\frac{\partial^2 Q}{\partial j^2} + \frac{1-\alpha}{j^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\theta^2} + \frac{1-\alpha}{j}\frac{\partial Q}{\partial j} = 0
\tag{4.2}
$$

Методом разделения переменных решение уравнения (4.2) представляется в виде

$$
Q_\lambda(j, \theta) = \varphi_\lambda(j)\,\psi_\lambda(\theta)
$$

при $\lambda \neq 0$

$$
\varphi_\lambda(j) = j^{{}^1/_2\alpha}\,(C_1 j^{+\alpha_\lambda} + C_2 j^{-\alpha_\lambda})
$$

$$
\psi_\lambda(\theta) = C_3 e^{i\lambda\theta} + C_4 e^{-i\lambda\theta} \quad \Big(\alpha_\lambda = \sqrt{{}^1/_4\alpha^2 + \lambda^2(1-\alpha)}\Big)
\tag{4.3}
$$

при $\lambda = 0$

$$\varphi_0(j) = A + Bj^\alpha, \ \psi_0(\theta) = C + D\theta \quad (C_1, C_2, C_3, C_4, A, B, C, D = \mathrm{const})$$

Параметр λ определяется как собственное значение задачи Штурма — Лиувилля. Решение задачи п. 3 в этом случае имеет вид

$$Q(j, \theta) = -\frac{I}{2\theta_0}\theta - \frac{I}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{j}{j_1}\right)^{{}^1/_2\alpha+\alpha_\lambda}\sin\frac{\pi\lambda\theta}{\theta_0} \tag{4.4}$$

где j_1 — плотность тока на выходе из сосуда, $\alpha < 1$. Если зависимость $\sigma(j)$ записывать как $\sigma = be^{j\beta}$, где b, β — параметры, определяющиеся из эксперимента и постоянные в определенных интервалах изменения j, то уравнения (1.3) имеют вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial j^2} + \frac{1 - j\beta}{j^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{1 + j\beta}{j}\frac{\partial P}{\partial j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial j^2} + \frac{1 - j\beta}{j^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \frac{1 - j\beta + j^2\beta^2}{j(1 - j\beta)}\frac{\partial Q}{\partial j} = 0 \tag{4.5}$$

В отличие от соотношений (4.1) и (4.2) уравнения (4.5) допускают непрерывный переход процесса из области эллиптичности в область гиперболичности при постоянном α, что приводит к возможности постановки смешанных краевых задач для уравнений электродинамики в плоскости годографа. Однако А. Г. Куликовский и С. А. Регирер (ПММ, 32, вып. 4, 1968) показали невозможность постановки краевых задач в чисто гиперболических областях.

Автор благодарит С. В. Фальковича за полезные обсуждения.

Поступила 3 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Емец Ю. П. Метод годографа в электродинамике сплошных нелинейно проводящих сред. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
2. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Сочинения, т. II. М., Гостехиздат, 1948.
3. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Изд. 2. М., «Наука», 1967.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Изд. 2. М., Физматгиз, 1963.

К ЗАДАЧЕ О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ НА ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ЗАПОЛНЕННОГО СОВЕРШЕННЫМ ГАЗОМ

Л. В. Шуршалов

(Москва)

Рассматривается осесимметричная задача о сильном точечном взрыве [1] на границе полупространства, занятого невесомым совершенным газом с показателем адиабаты γ. В начальный момент времени $t = 0$ в некоторой точке на этой границе выделяется конечная энергия E_0, т. е. происходит точечный взрыв. Эта задача может представлять интерес в связи с проблемой исследования движения, вызванного сильным ударом по поверхности среды в случае, если кинетическая энергия ударяющего тела достаточно велика. Эта проблема рассматривалась рядом авторов. В работах [2-4] содержится подход к этой задаче с точки зрения приложения ее к вопросам кратерообразования при ударе тела, летящего с большой космической скоростью, по плоской границе твердого тела. При этом считается, что ударная волна распространяется так же, как при взрыве в неограниченной среде. В [5] среда рассматривается как несжимаемая жидкость и считается, что импульс вещества, охваченного движением, постоянен во времени и равен импульсу ударяющего тела. В [6] получены некоторые приближенные характеристики на основе построенного точного частного решения дифференциальных уравнений, описывающих течение. В [7,8] приближенно исследовано распределение энергии между двумя средами в случае сильного точечного взрыва на поверхности раздела этих сред. В [9] получено численное решение задачи о взрыве на поверхности медной пластинки при использовании для меди моделей упруго-пластической среды и идеальной жидко-