ОПТИМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Нгуен Тхань Банг

(Ханой)

Для линейных с фиксированным временем движения систем ставится задача о выборе закона изменения во времени ограниченных по модулю управляющих воздействий, при которых мера отклонения в конце траектории и мера управления будут минимальны. Установлено, что для такой оптимальной задачи терминального управления существуют единственные оптимальные траектория и управление. Показательна возможность применения принципа максимума Понтрягина для решения поставленной задачи и одновременно с этим проиллюстрированы те трудности, которые встречаются при практической реализации этого пути. Приводится приближенный метод решения полученной в результате применения принципа максимума двухточечной краевой задачи, который позволяет обходить сказанные выше трудности. Указана процедура практической реализации данного метода при помощи вычислительных устройств.

§ 1. **Постановка задачи.** Пусть движение некоторой системы описывается следующими дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \sum_{\rho=1}^{m} b_{\nu\rho}(t)\, u_\rho(t) + f_\nu(t), \qquad x_\nu(t_0) = z_\nu^\circ \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь x_ν — фазовые координаты рассматриваемой системы, $a_{\nu\mu}(t)$ и $b_{\nu\rho}(t)$ — непрерывно изменяемые во времени параметры системы, $f_\nu(t)$ — заданные внешние силы, а $u_\rho(t)$ — ограниченные по модулю управляющие воздействия, закон изменения которых подлежит определению.

Вектор-функция $\mathbf{u}(t) = \| u_p(t) \| \,(m \times 1)$, которую будем называть допустимым управлением, является измеримой функцией, и в каждый момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ принадлежит параллелепипеду m-мерного пространства переменных $u_1, \ldots, u_m$

$$\mathbf{u}(t) \in \mathbf{U} = \{ | u_\rho(t) | \leqslant U_\rho, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \quad (\rho = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

Решение дифференциальных уравнений (1.1) при некотором $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}$ будем обозначать через $x_\nu(t, u)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Поставим следующую задачу. Требуется определить из класса допустимых управлений закон изменения вектор-функций $\mathbf{u}^*(t)$, при которой выполняется условие

$$J(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) = \min J(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \min \{ R(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \} \quad (\mathbf{u} \in \mathbf{U}) \tag{1.3}$$

Здесь

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2(t_1, \mathbf{u}), \qquad E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} \Big[\sum_{\rho=1}^{m} c_\rho(t)\, u_\rho^2(t) \Big] dt \tag{1.4}$$

Время t_1 предполагается фиксированным заранее, а весовые множители $c_\rho(t)$ — известными неотрицательными функциями, причем последние могут обращаться в нуль на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ только в конечном числе точек.

Допустимое управление, дающее решение поставленной задачи, назовем оптимальным управлением, а соответствующую ему траекторию системы (1.1) — оптимальной траекторией.

Для случая, когда $c_\rho(t) \equiv 0$ $(\rho = 1, \ldots, m)$, такого рода задача изучена многими авторами [1–4]. Наличие функционала $E(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, значение которого представляет собой меру управления, требует специального исследования.

§ 2. **Вопросы существования и единственности.** Делая аналогично тому, что было сделано в работе [5], нетрудно показать, что для поставленной выше задачи существует одна и только одна оптимальная траектория и при выполнении B-условия, т. е. если $m \leqslant n$ и ранг матрицы B (t) почти всюду на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ равен m, оптимальное управление будет единственным.

§ 3. **Решение задачи.** Исходя из системы дифференциальных уравнений (1.1), нетрудно показать, что выражение для функционала R (u, u) может быть преобразовано к следующему виду:

$$R(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(t)\,x_\nu x_\mu + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{m} b_{\nu\rho}(t)\,x_\nu u_\rho + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(t)\,x_\nu\right]dt + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(z_\nu^\circ)^2 \tag{3.1}$$

1°. *Вывод принципа максимума.* Согласно результатам работы [6] и принимая во внимание выражение (3.1), можно найти закон оптимального управления из условий максимума функции

$$H^* = \sum_{\nu=1}^{n}\psi_\nu(t)\left[\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(t)\,x_\mu + \sum_{\rho=1}^{m} b_{\nu\rho}(t)\,u_\rho + f_\nu(t)\right] -$$

$$-\left[\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(t)\,x_\nu x_\mu + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{m} b_{\nu\rho}(t)\,x_\nu u_\rho + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(t)\,x_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{m} c_\rho(t)\,u_\rho^2\right] \tag{3.2}$$

по переменным $u_1, \ldots, u_m$ в области U, где ψ_ν (t) суть нетривиальное решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d(\psi_\nu - x_\nu)}{dt} = -\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}(t)(\psi_\mu - x_\mu),\quad \psi_\nu(t_1) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Поскольку функция H^* при фиксированных $\lambda_\nu = \psi_\nu - x_\nu$ и x_ν достигает максимума одновременно с выражением

$$H(\lambda(t), \mathbf{u}) = \sum_{\rho=1}^{m} S_\rho(t,\lambda)\,u_\rho - \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{m} c_\rho(t)\,u_\rho^2,\quad S_\rho(t,\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\,\lambda_\nu,\quad (\rho = 1, \ldots, m) \tag{3.4}$$

нетрудно видеть, что если управляющие воздействия изменяются по закону

$$w_\rho(t,\lambda) = \begin{cases} S_\rho(t,\lambda)/c_\rho(t) & \text{при } |S_\rho(t,\lambda)| < c_\rho(t)\,U_\rho \\ U_\rho \operatorname{sign} S_\rho(t,\lambda) & \text{при } |S_\rho(t,\lambda)| \geqslant c_\rho(t)\,U_\rho \end{cases} \quad (\rho = 1, \ldots, m) \tag{3.5}$$

где λ суть нетривиальное решение сопряженной системы

$$\frac{d\lambda_\nu}{dt} = -\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}(t)\,\lambda_\mu,\qquad \lambda_\nu(t_1) = -x_\nu(t_1, \mathbf{w}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

то функция H^* будет достигать абсолютного максимума по переменным $u_1, \ldots, u_m$ в области U.

Допустимое управление, определяемое по закону (3.5), назовем экстремальным управлением, а соответствующую ему траекторию системы (1.1) — экстремальной траекторией. Легко показать (см., например, [6], стр. 202—206), что при выполнении обобщенного условия общности положения, т. е. если в любой момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и для любого ребра u параллелепипеда U векторы

$$\mathbf{B}_1(t)\,\mathbf{u},\quad \mathbf{B}_2(t)\,\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{B}_n(t)\,\mathbf{u}$$

линейно независимым в пространстве фазовых координат, где через $\mathbf{B}_1$ (t), $\mathbf{B}_2$ (t), ..., $\mathbf{B}_n$ (t) обозначены следующие матрицы:

$$\mathbf{B}_1(t) = \mathbf{B}(t),\quad \mathbf{B}_j(t) = -\mathbf{A}(t)\,\mathbf{B}_{j-1}(t) + \frac{d\mathbf{B}_{j-1}(t)}{dt} \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

то функции S_ρ (t, λ) $(\rho = 1, \ldots, m)$ при любом нетривиальном решении $\lambda(t) = \|\lambda_\nu(t)\|$ $(n \times 1)$ сопряженной системы (3.6) могут обращаться в нуль на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ только в конечном числе точек. Это означает, что при выполнении обобщенного условия общности положения выражения (3.5) однозначно определяют экстремальное управление, которое в этом случае есть непрерывная вектор-функция времени.

Следует заметить, что для возможности определения матриц $B_1(t)$, $B_2(t), \ldots, B_n(t)$ необходимо, чтобы функции $b_{\nu\rho}(t)$ имели $n-1$ производную, а функции $a_{\nu\mu}(t)$ имели $n-2$ производных. В дальнейшем будем предполагать, что для системы (1.1) выполнено обобщенное условие общности положения.

2°. *Достаточность принципа максимума.* На основании результатов предыдущего пункта ясно, что оптимальное управление должно находиться среди экстремальных управлений. Покажем, что при выполнении обобщенного условия общности положения экстремальное управление будет оптимальным, т. е. принцип максимума для рассматриваемой здесь задачи будет не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Для этого введем в рассмотрение функционал

$$K(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2(t_1, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{\rho=1}^{m} c_\rho(t)\, u_\rho^2 - 2\frac{d\Phi^*(t)}{dt} \right] dt \tag{3.7}$$

Входящая сюда функция $\Phi^*(t)$ определяется выражением

$$\Phi^*(t) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu(t, \mathbf{u})\,[\lambda_\nu^*(t) + x_\nu(t_1, \mathbf{w}^*)] \tag{3.8}$$

где $\lambda_\nu^*(t)$ суть решение системы дифференциальных уравнений (3.6) при следующих граничных условиях:

$$\lambda_\nu^*(t_1) = -x_\nu(t_1, \mathbf{w})\,|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}(t,\, \lambda^*)=\mathbf{w}^*(t)} \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.9}$$

Элементы $w_\rho^*(t)$ вектор-функции $\mathbf{w}^*(t)$ определяются согласно закону (3.5) при $\lambda_\nu(t) = \lambda_\nu^*(t)$ $(v = 1, \ldots, n)$.

В силу граничных условий (3.9)

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi^*(t)}{dt}\, dt = -\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^\circ\,[\lambda_\nu^*(t_0) + x_\nu(t_1, \mathbf{w}^*)]$$

$$K(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = J(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^\circ\,]\lambda_\nu^*(t_0) + x_\nu(t_1, \mathbf{w}^*)] \tag{3.10}$$

Таким образом, функционалы $K(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ и $J(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, отличаясь на не зависимую от векторного элемента $\mathbf{u}$ постоянную величину, одновременно достигают минимума.

С другой стороны, из (3.8) на основании (1.1), (3.6) и (3.9) получим

$$\frac{d\Phi^*(t)}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dx_\nu(t, \mathbf{u})}{dt}\,[\lambda_\nu^*(t) + x_\nu(t_1, \mathbf{w}^*)] + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu(t, \mathbf{u}) \frac{d\lambda_\nu^*(t)}{dt} =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{m} \left[\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\, \lambda_\nu^*(t) \right] \mu_\rho + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(t)\, \lambda_\nu^*(t) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dx_\nu(t, \mathbf{u})}{dt}\, x_\nu(t_1, \mathbf{w}^*) \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) для $d\Phi^*(t)\,/\,dt$ в правую часть (3.7), получим следующее выражение:

$$K(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} [x_\nu(t_1, \mathbf{u}) - x_\nu(t_1, \mathbf{w}^*)]^2 -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{\rho=1}^{m} \left[\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\, \lambda_\nu^*(t) \right] u_\rho - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{m} c_\rho(t)\, u_\rho^2 \right\} dt + K^* \tag{3.12}$$

где через K^* обозначена следующая не зависимая от векторного элемента $\mathbf{u}$ постоянная величина

$$K^* = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^0 x_\nu (t_1, \mathbf{w}^*) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 (t_1, \mathbf{w}^*) - \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu (t) \lambda_\nu^* (t) \right] dt. \tag{3.13}$$

Выражение (3.12) показывает, что минимум функционала $K(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, а следовательно, и минимум функционала $J(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, достигается тогда и только тогда, если $u_\rho = u_\rho^*(t)$ для всех ($\rho = 1, \ldots, m$), т. е. экстремальное управление оптимально, что требовалось доказать.

3°. *Обсуждение результатов.* Для нахождения закона оптимального управления, согласно полученным выше результатам, решим систему дифференциальных уравнений (1.1) при $u_\rho(t) = w_\rho(t, \lambda)$ $(\rho = 1, \ldots, m)$, совместно с сопряженной системой (3.5), причем функции $w_\rho(t, \lambda)$ определяются согласно закону (3.5).

С математической точки зрения, здесь имеем дело с нелинейной краевой задачей, эффективный метод для которой в настоящее время не описан. Главная трудность здесь заключается, в частности, в нахождении начальных условий для вспомогательных переменных λ_ν, обеспечивающих выполнение требуемых граничных условий в (3.6). Нахождение этих постоянных представляет собой самостоятельную задачу, которая, как показано в работе [7], может быть решена на обычных электронных моделирующих устройствах методом поиска [8]. Однако при наличии нелинейностей типа (3.5) трудно доказать сходимость указанного метода (фактически нигде не доказаны!)

В связи с этим в предлагаемой работе будет разработан другой подход к решению рассматриваемой задачи, а именно здесь вместо того, чтобы найти непосредственно закон оптимального управления, будет построена минимизирующая последовательность допустимых управлений.

Под минимизирующей будем здесь понимать такую последовательность допустимых управлений, что соответствующая ей последовательность значений функционала $J(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ будет строго убывающей и в пределе стремиться к величине

$$J(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) = \min J(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (\mathbf{u} \in \mathbf{U})$$

Следует заметить, что идея такого метода впервые предложена В. Ф. Демьяновым в работах [4,9] и нашла свое развитие в [10], но, поскольку в этих работах указанный выше метод последовательных приближений разработан лишь для минимизации по мере отклонения, то при наличии в критерии оптимальности функционала $E(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ его непосредственно применить сюда нельзя и требуется некоторое дополнительное исследование.

§ 4. Метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения для закона оптимального управления возьмем $u_\rho(t) = u_\rho^\circ(t)$ $(\rho = 1, \ldots, m)$, где $u_\rho^\circ(t)$ — произвольные измеримые функции времени, принимающие в любой момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ значения в области $\mathbf{U}$. Решение системы дифференциальных уравнений (1.1) при $u_\rho(t) = u_\rho^\circ(t)$, как уже указывалось, будем обозначать через $\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^\circ) = \|x_\nu(t, \mathbf{u}^\circ)\|$ $(n \times 1)$. Решая вспомогательную сопряженную систему

$$\frac{d\lambda_\nu^\circ}{dt} = -\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}(t) x_\mu, \qquad \lambda_\nu^\circ(t_1) = -x_\nu(t_1, \mathbf{u}^\circ) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

будем получать закон изменения функции $\lambda_\nu^\circ(t)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим теперь вектор-функцию $\mathbf{v}^\circ(t) = \|v_\rho^\circ(t)\|$ $(m \times 1)$, где элементы $v_\rho^\circ(t)$ определяются следующими формулами:

$$v_\rho^\circ(t) = U_\rho \operatorname{sign} [S_\rho(t, \lambda^\circ) - c_\rho(t) u_\rho^\circ(t)] \quad (\rho = 1, \ldots, m) \tag{4.2}$$

и вектор-функцию $\mathbf{w}^\circ(t) = \| w_\rho^\circ(t) \| \, (m \times 1)$, где $w_\rho^\circ(t)$ определяются согласно закону

$$w_\rho^\circ(t) = \begin{cases} S_\rho(t, \lambda^\circ) / c_\rho(t) & \text{при } |S_\rho(t, \lambda^\circ)| < c_\rho(t), (U)_\rho \\ U_\rho \operatorname{sign} S_\rho(t, \lambda^\circ) & \text{при } |S_\rho(t, \lambda^\circ)| \geqslant c_\rho(t) U_\rho \end{cases} \quad (\rho = 1, \ldots, m) \tag{4.3}$$

Нетрудно показать, что имеет место следующее соотношение:

$$J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ) = \min J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{u}) \leqslant J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{u}^\circ) \leqslant J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{u}^\circ) \quad (\mathbf{u} \in \mathbf{U}) \tag{4.4}$$

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из теоремы, формулировка и доказательство которой даны в приложении.

На основании соотношения (4.4) следует, что возможны два случая: либо $J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ) = J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{u}^\circ)$, либо $J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ) < J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{u}^\circ)$. В первом случае легко показать, что $\mathbf{u}^\circ(t)$ будет оптимальным управлением и процесс окончен. Во втором случае в качестве первого приближения для закона оптимального управления возьмем

$$\mathbf{u}^1(t) = \begin{cases} \mathbf{v}^\circ(t) & , \text{если } J(\mathbf{v}^\circ, \mathbf{v}^\circ) \leqslant J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ) \\ \alpha_0 \mathbf{u}^\circ(t) + (1 - \alpha_0)\mathbf{v}^\circ(t), & \text{если } J(\mathbf{v}^\circ, \mathbf{v}^\circ) > J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ) \end{cases} \tag{4.5}$$

где величина определяется формулой

$$0 < \alpha_0 = \frac{J(\mathbf{v}^\circ, \mathbf{v}^\circ) - J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ)}{J(\mathbf{v}^\circ, \mathbf{v}^\circ) - 2J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ) + J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{u}^\circ)} < 1 \tag{4.6}$$

Нетрудно показать, что при таком выборе первого приближения будем иметь

$$J(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) < J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{u}^\circ) \tag{4.7}$$

Гаким образом, если нулевое приближение не будет оптимальным, то всегда можно выбрать первое приближение так, чтобы выполнилось условие (4.7).

Допустим, что k-е приближение уже определено, т. е. уже известны вектор-функции $\mathbf{u}^k(t)$, $\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k) = \| x_\nu(t, \mathbf{u}^k) \| \, (n \times 1)$, где $x_\nu(t, \mathbf{u}^k)$ суть решение системы дифференциальных уравнений (1.1) при $u_\rho(t) = u_\rho^k(t)$ $(\rho = 1, \ldots, m)$. Решая тогда вспомогательную сопряженную систему

$$\frac{d\lambda_\nu^k}{dt} = -\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}(t)\lambda_\mu^k, \qquad \lambda_\nu^k(t_1) = -x_\nu(t_1, \mathbf{u}^k) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{4.8}$$

получим закон изменения вспомогательных функций $\lambda_\nu^k(t)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Рассмотрим теперь вектор-функцию $\mathbf{v}^k(t) = \| v_\rho^k(t) \| \, (m \times 1)$, где элементы $v_\rho^k(t)$ определяются формулами

$$v_\rho^k(t) = U_\rho \operatorname{sign} [S_\rho(t, \lambda^k) - c_\rho(t) \, u_\rho^k(t)] \quad (\rho = 1, \ldots, m) \tag{4.9}$$

и вектор-функцию $\mathbf{w}^k(t) = \| w_\rho^k(t) \| \, (m \times 1)$, где $w_\rho^k(t)$ определяется согласно закону

$$w_\rho^k(t) = \begin{cases} S_\rho(t, \lambda^k) / c_\rho(t) & \text{при } |S_\rho(t, \lambda^k)| < c_\rho(t) U_\rho \\ U_\rho \operatorname{sign} S_\rho(t, \lambda^k) & \text{при } |S_\rho(t, \lambda^k)| \geqslant c_\rho(t) U_\rho \end{cases} \quad (\rho = 1, \ldots m) \tag{4.10}$$

Точно так же, как в случае нулевого приближения, будем иметь

$$J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) = \min J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}) \leqslant J(\mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k) \leqslant J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k) \quad (\mathbf{u} \in \mathbf{U}) \tag{4.11}$$

Если $J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) = J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k)$, то $\mathbf{u}^k(t)$ будет оптимальным управлением и процесс окончен. Если $J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) < J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k)$, то в качестве последующего приближения для закона оптимального управления возьмем

$$\mathbf{u}^{k+1}(t)=\begin{cases}\mathbf{v}^k(t), & \text{если } J(\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k)\leqslant J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\\ \alpha_k\mathbf{u}^k(t)+(1-\alpha_k)\mathbf{v}^k(t), & \text{если } J(\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k)> J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\end{cases} \tag{4.12}$$

где величина α_k определяется следующим образом:

$$0<\alpha_k=\frac{J(\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k)-J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)}{J(\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k)-2J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)+J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k)}<1. \tag{4.13}$$

При таком выборе $(k+1)$-го приближения нетрудно показать, что справедливо следующее неравенство:

$$J(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1})<J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k) \tag{4.14}$$

Построенная последовательность допустимых управлений $\{u^k(t)\}$ и соответствующая ей последовательность траекторий $\{x(t, u^k)\}$ рассматриваемой системы (1.1) таковы, что

$$J(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{u}^\circ)>J(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1)>\ldots>J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k)>\ldots \tag{4.15}$$

Для доказательства того факта, что последовательности $\{\mathbf{u}^k(t)$ и $\{\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k)\}$ действительно будут минимизирующими в указанном выше смысле, надо еще показать, что предел строго убывающей последовательности (4.15) будет наименьшим из всех возможных значений функционала $J(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Последний будем обозначать через J^*. Справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{k\to\infty}[\min J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u})]=\inf[\lim_{k\to\infty} J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)]\geqslant J^* \qquad (\mathbf{u}\in \mathbf{U}) \tag{4.16}$$

Идея доказательства этого утверждения тесно связана с идеей доказательства аналогичного утверждения в задаче о приближенном осуществлении движения по заданной траектории [10], поэтому не будем его здесь приводить.

Нетрудно теперь показать, что имеет место равенство

$$J^*=\lim_{k\to\infty} J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k)=\min J(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \qquad (\mathbf{u}\in \mathbf{U}) \tag{4.17}$$

Допустим, что это не так, т. е. существует допустимое управление $\mathbf{v}(t)\in U$ такое, что

$$J(\mathbf{v}, \mathbf{v})=J^*-\varepsilon, \qquad \varepsilon>0$$

Тогда в силу неотрицательности функционала $J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k)-2J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v})+J(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ будем иметь

$$J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v})\leqslant {}^1/_2 J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k)+J(\mathbf{v}, \mathbf{v})]=J^*+{}^1/_2\varepsilon_*-{}^1/_2\varepsilon$$

Так как $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$, то при достаточно больших k имеем

$$\min J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u})\leqslant J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v})<J^* \qquad (\mathbf{u}\in \mathbf{U})$$

что противоречит неравенству (4.16). Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно. Итак, соотношение (4.17) доказано.

Используя результаты, полученные в монографии [6] (стр. 146, 147) при доказательстве теорем существования для задачи об оптимальном быстродействии, и повторяя ход рассуждений, приведенных в статье [10], нетрудно показать, что из последовательностей $\{\mathbf{u}^k(t)\}$ и $\{\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k)\}$ можно извлечь пару сходящихся последовательностей $\{\mathbf{u}^{kl}(t)\}$ и $\{x(t, \mathbf{u}^{kl})\}$, причем их пределы обладают следующими свойствами: $\mathbf{u}^*(t)\in \mathbf{U}$, а $\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^*)$ будет непрерывной вектор-функцией. Далее, делая аналогичный статье [10] ход рассуждений, легко показать, что предельная вектор-функция $\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^*)$ единственна и не зависит от выбора пары указанных выше сходящихся подпоследовательностей.

Переходя к пределу при $l \to \infty$, получим

$$J^* = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} J(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \lim_{l \to \infty} J(\mathbf{u}^{k_l}, \mathbf{u}^{k_l}) = J(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) \tag{4.18}$$

Таким образом, построенные последовательности $\{\mathbf{u}^k(t)\}$ и $\{\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k)\}$ в самом деле будут минимизирующими.

Принимая во внимание соотношения (4.11), (4.16), (4.18) и опираясь на выражение (4.10), нетрудно видеть, что для тех ρ, для которых мера множества нулей функции

$$S_\rho(t, \lambda^*) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\, \lambda_\nu^*(t) \qquad (\rho = 1, \ldots, m) \tag{4.19}$$

равна нулю, соответствующие функции $w_\rho^{k_l}(t)$ стремятся к единственным предельным функциям

$$u_\rho^*(t) = \begin{cases} S_\rho(t, \lambda^*) / c_\rho(t) & \text{при } |S_\rho(t, \lambda^*)| < c_\rho(t)\, U_\rho \\ U_\rho \operatorname{sign} S_\rho(t, \lambda^*) & \text{при } |S_\rho(t, \lambda^*)| \geqslant c_\rho(t)\, U_\rho \end{cases} \qquad (\rho = 1, \ldots, m) \tag{4.20}$$

где $\lambda_\nu^*(t)$ суть решение сопряженной системы

$$\frac{d\lambda_\nu^*}{dt} = -\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}(t)\, \lambda_\mu^*, \qquad \lambda_\nu^*(t_1) = -x_\nu(t_1, \mathbf{u}^*) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{4.21}$$

Таким образом, предельная вектор-функция $\mathbf{u}^*(t)$, являющаяся на основании соотношения (4.18) оптимальным управлением, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина.

Из доказанного непосредственно не вытекает единственность оптимального управления. Однако, как указывалось в § 2, если выполнено B-условие, то, в силу единственности оптимальной траектории, нетрудно доказать единственность закона оптимального управления. Наибольшие трудности в приближенных вычислениях закона оптимального управления описанным методом создают решения системы типа (4.8). Здесь известны лишь значения переменных λ_ν^k в момент $t = t_1$, поэтому для определения закона изменения функций $\lambda_\nu^k(t)$ при помощи вычислительных устройств надо сначала найти соответствующие начальные условия для этих переменных. Последние, как показано в работах [11–13], можно найти, интегрируя систему (4.8) «назад», т. е. вводя новую независимую переменную посредством соотношения $t = t_1 + t_0 - \sigma$. После такой замены система (4.8) преобразуется к виду

$$\frac{d\Lambda_\nu^k(\sigma)}{d\sigma} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}(t_1 + t_0 - \sigma)\, \Lambda_\mu^k(\sigma), \qquad \Lambda_\nu^k(t_0) = -x_\nu(t_1, \mathbf{u}^k) \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{4.22}$$

Поскольку $\Lambda_\nu^k(\sigma) = \lambda_\nu^k(t_1 + t_0 - \sigma)$, то нетрудно видеть, что значения функции $\Lambda_\nu^k(\sigma)$ в момент $\sigma = t_1$ будут служить начальными условиями для переменных λ_ν^k, обеспечивающими выполнение граничных условий в (4.8).

На основании изложенного можно предложить следующую вычислительную процедуру.

1° Выбирается некоторое допустимое управление $\mathbf{u}^k(t) = \|u_\rho^k(t)\|\ (n \times 1) \in U$ и решается система дифференциальных уравнений (1.1) при $u_\rho(t) = u_\rho^k(t)$. В процессе интегрирования обеспечивается получение величин $x_\nu(t, \mathbf{u}^k)$ и $J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k)$.

2°. Проинтегрируется система дифференциальных уравнений (4.22) в пределе $t_0 \leqslant \sigma \leqslant t_1$ и запоминаются при этом значения переменных Λ_ν^k в момент $\sigma = t_1$.

3°. Решается система дифференциальных уравнений (4.8) при начальных условиях $\Lambda_\nu^k(t_0) = \Lambda_\nu^k(t_1)$ и одновременно с этим определяются элементы $v_\rho^k(t)$ вектор-функции $v^k(t) = \|v_\rho^k(t)\|\ (m \times 1)$ по формуле (4.9)

4°. Интегрируется система дифференциальных уравнений (1.1) при $u_\rho(t) = v_\rho^k(t)$ и одновременно с этим вычисляются величины $J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ и $J(\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k)$.

5°. Сравнивая величину $J(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ с величиной $(J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k)$, причем процесс вычисления останавливается, как только $J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k) = J(\mathbf{u}^k, v^k)$. В противном случае вычисляется при помощи вспомогательных функциональных блоков последующее приближение по формулам (4.12) и (4.13), и процесс начинается снова.

Приложение. Для доказательства теоремы, используемой при построении минимизирующей последовательности допустимых управлений, предварительно установим справедливость следующих лемм.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{u}^j(t)$ — любая заданная измеримая вектор-функция, принимающая в любой момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ значения в области $\mathbf{U}$, а $v^j(t) = \|v_\rho^j(t)\|(m \times 1)$ — допустимое управление, определяемое согласно следующему закону:

$$v_\rho^j(t) = U_\rho \operatorname{sign}[S_\rho(t, \lambda^j) - c_\rho(t) u_\rho^j(t)], \qquad S_\rho(t, \lambda^j) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t) \lambda_\nu^j(t) \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{A.1}$$

где $\lambda_\nu^j(t)$ суть решения сопряженной системы

$$\frac{d\lambda_\nu^j}{dt} = -\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}(t) \lambda_\mu^j, \qquad \lambda_\nu^j(t_1) = -x_\nu(t_1, \mathbf{u}^j) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{A.2}$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$J(\mathbf{u}^j, \mathbf{v}^j) = \min J(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}) = \min[\mathrm{R}(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}) + E(\mathbf{u}^j, \mathbf{u})] \qquad (\mathbf{u} \in \mathbf{U}) \tag{A.3}$$

где через $R(\mathbf{u}^j, \mathbf{u})$ и $E(\mathbf{u}^j, \mathbf{u})$ обозначены следующие функционалы:

$$R(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu(t_1, \mathbf{u}^j) x_\nu(t_1, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}(t_1, \mathbf{u}^j) \cdot \mathbf{x}(t_1 \mathbf{u}) \tag{A.4}$$

$$E(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{\rho=1}^{m} c_\rho(t) u_\rho^j(t) u_\rho \right] dt \tag{A.5}$$

Доказательство. Для доказательства этой леммы сначала преобразуем функционал $R(\mathbf{u}^j, \mathbf{u})$. Как известно, решение системы дифференциальных уравнений (1.1) при некотором $\mathbf{u}(t) \in U$ может быть представлено в следующем матричном виде:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{s}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \mathbf{B}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \tag{A.6}$$

где через $s(t)$ обозначена следующая вектор-функция:

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{z}^\circ + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \mathbf{f}(\sigma) d\sigma \tag{A.7}$$

Входящая сюда матричная функция $X(t)$ будет нормированной фундаментальной матрицей системы дифференциальных уравнений (1.1) при $u_\rho(t) \equiv 0$ $(\rho = 1, \ldots, m)$, $f_\nu(t) \equiv 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, а через $\mathbf{X}^{-1}(\sigma)$ обозначена обратная по отношению к $\mathbf{X}(\sigma)$ матрица.

Подставляя выражение $(A.6)$ при $t = t_1$ в правую часть выражения (A4), получим

$$R(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}) = R^j - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{B}^\tau(t) \lambda^j(t) \cdot \mathbf{u}(t))\, dt \tag{A.8}$$

где через R^j обозначена не зависимая от u величина

$$R^j = {}^1\!/_2 (\mathbf{x}(t_1, \mathbf{u}^j) \mathbf{s}(t_1)) \tag{A.9}$$

а $\lambda^j(t)$ — следующая вектор-функция:

$$\lambda^j(t) = [X^{-1}(t)]^\tau X^\tau(t_1)\,x(t_1, u^j) \tag{A.10}$$

Нетрудно показать, что вектор-функция $\lambda^j(t)$, определяемая формулой (A.10), суть решение сопряженной системы (A.2).

В развернутом виде выражение (A.8) выглядит так:

$$R(u^j, u) = R^j - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\rho=1}^{m}\left[\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\,\lambda_\nu^j(t)\right]u_\rho\right\}dt \tag{A.11}$$

Тогда выражение для функционала $J(u^j, u)$ на основании (A.5) и (A.11) принимает следующий вид:

$$J(u^j, u) = R^j - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\rho=1}^{m}\left[\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\,\lambda_\nu^j(t) - c_\rho(t)\,u_\rho^j(t)\right]u_\rho\right\}dt \tag{A.12}$$

Последнее выражение показывает, что функционал $J(u^j, u)$ принимает наименьшее возможное значение тогда и только тогда, если u_ρ изменяются согласно закону (A.1). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $u^j(t)$ — любая заданная измеримая вектор-функция, принимающая в любой момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ значения в области U, а $w^j(t) = \| w_\rho^j(t)\|$ $(m \times 1)$ — допустимое управление, определяемое согласно закону

$$w_\rho^j(t) = \begin{cases} S_\rho(t, \lambda^j)/c_\rho(t) & \text{при } |S_\rho(t, \lambda^j)| < c_\rho(t)\,U_\rho \\ U_\rho \operatorname{sign} S_0(t, \lambda^j) & \text{при } |S_\rho(t, \lambda^j)| \geqslant c_\rho(t)\,U_\rho \end{cases} \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{A.13}$$

где $\lambda_\nu^j(t)$ суть решение сопряженной системы дифференциальных уравнений (A.2). Тогда справедливо следующее соотношение:

$$2R(u^j, w^j) + E(w^j, w^j) = \min\,[2R(u^j, u) + E(u, u)] \quad (u \in U) \tag{A.14}$$

Доказательство. Принимая во внимание выражение (A.11) для функционала $R(u^j, u)$, имеем следующее выражение для функционала: $2R(u^j, u) + E(u, u)$, а именно

$$2R(u^j, u) + E(u, u) = 2R^j - \int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\rho=1}^{m}\left[\sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu\rho}(t)\,\lambda_\nu^j(t)\right]u_\rho\right\}dt + \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left[\sum_{\rho=1}^{n} c_\rho(t)\,u_\rho^2\right]dt =$$

$$= 2R^j + \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left\{\sum_{\rho=1}^{m} c_\rho(t)\left[\left(u_\rho - \frac{1}{c_\rho(t)}\sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu\rho}(t)\,\lambda_\nu^j(t)\right)^2 - \left(\frac{1}{c_\rho(t)}\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\,\lambda_\nu^j(t)\right)^2\right]\right\}dt \tag{A.15}$$

Из последующего выражения следует, что функционал $2R(u^j, u) + E(u, u)$ достигает наименьшего из всех возможных значений, тогда и только тогда, если $u_\rho \equiv w_\rho^j(t)$, где функции $w_\rho^j(t)$ определяются согласно закону (*A*.13), что и требовалось доказать.

Лемма 3. Для любых двух допустимых управлений $u^j(t) \in U$ $w^j(t) \in U$ всегда имеет место следующее неравенство:

$$2E(u^j, w^j) \leqslant E(u^j, u^j) + E(w^j, w^j) \tag{A.16}$$

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из условия неотрицательности функционала $E^j = E(u^j, u^j) - 2E(u^j, w^j) + E(w^j, w^j)$.

Лемма 4. Пусть выполнены все условия леммы 2. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$J(\mathbf{u}^j, \mathbf{w}^j) \leqslant J(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^j) \tag{A.17}$$

Доказательство. Из соотношения (А.14) следует, что

$$2R(\mathbf{u}^j, \mathbf{w}^j) + E(\mathbf{w}^j, \mathbf{w}^j) \leqslant 2R(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^j) + E(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^j) \tag{A.18}$$

а на основании леммы 3 имеем

$$2E(\mathbf{u}^j, \mathbf{w}^j) \leqslant E(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^j) + E(\mathbf{w}^j, \mathbf{w}^j) \tag{A.19}$$

Сложив (А.18) и (А.19), получим

$$2R(\mathbf{u}^j, \mathbf{w}^j) + 2E(\mathbf{u}^j, \mathbf{w}^j) \leqslant 2R(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^j) + 2E(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^j)$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 4.

На основании доказанных выше лемм нетрудно видеть, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Для любой заданной измеримой вектор-функции $\mathbf{u}^j(t)$, принимающей в любой момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ значения в области $\mathbf{U}$, имеет место следующее соотношение:

$$J(\mathbf{u}^j, \mathbf{v}^j) = \min J(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}) \leqslant J(\mathbf{u}^j, \mathbf{w}^j) \leqslant J(\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^j) \quad (\mathbf{u} \in \mathbf{U}) \tag{A.20}$$

Здесь элементы вектор-функции

$$\mathbf{v}^j(t) = \|v_\rho{}^j(t)\| (m \times 1), \qquad \mathbf{w}^j(t) = \|w_\rho{}^j(t)\| (m \times 1)$$

определяются формулами (А.1) и (А.13) соответственно.

Поступила 19 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R. E. Adaptive Control. Princeton Univ., Press, 1962.
2. Хо Ю-ши. Метод последовательных приближений для оптимальных систем регулирования с ограничением по управляющему сигналу. Техническая механика. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1962, т. 84, № 1.
3. Кириллова Л. С. Задача об оптимизации конечного состояния регулируемой системы. Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 12.
4. Демьянов В. Ф. К построению оптимальной программы в линейной системе. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 1.
5. Нгуен Тхань Банг. Некоторые оптимальные задачи о приближенном осуществлении движения по заданной траектории. II. Автоматика и телемеханика, 1967, № 7.
6. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
7. Нгуен Тхань Банг. Оптимальная задача о «попадании» в нестационарных линейных системах. Техническая кибернетика, 1965, № 1.
8. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. М., Физматгиз, 1959.
9. Демьянов В. Ф. Построение программного управления в линейной системе, оптимального в интегральном смысле. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
10. Нгуен Тхань Банг. Некоторые оптимальные задачи о приближенном осуществлении движения по заданной траектории. I. Автоматика и телемеханика, 1967, № 6.
11. Цянь-Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
12. Савинов Г. В. Об использовании электронных моделирующих устройств в задаче о накоплении возмущений. Вестн. МГУ, Математика и механика, 1961, № 3.
13. Нгуен Тхань Банг. К решению некоторых задач теории динамического программирования при помощи электронных моделирующих устройств. Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 9.