

## КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Б. Н. СкрЯбин (Горький)

Методом точечных преобразований проводится исследование на цилиндрическом фазовом пространстве кусочно-линейной динамической системы второго порядка со скачками изображающей точки по линиям сшивания.

Уравнение

$$\varphi'' + h [1 + bF'(\varphi)] \varphi' + F(\varphi) = \Omega \quad (b > 0, h > 0, 0 \leq \Omega < 1) \quad (1)$$

где  $F(\varphi)$  — функция периода  $2\pi$  такая, что

$$F(\varphi) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < \varphi < 0 \\ 1 & \text{при } 0 < \varphi < \pi \end{cases} \quad (2)$$

описывает динамику системы фазовой автоподстройки частоты с пропорционально-интегрирующим фильтром [1,2] и прямоугольной характеристикой фазового детектора [3]. При исследовании уравнения необходимо учитывать, что оно теряет смысл в точках разрыва характеристики  $F(\varphi)$ .

Фазовым пространством системы

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \Omega - h [1 + bF'(\varphi)] y - F(\varphi) \quad (3)$$

соответствующей уравнению (1) будет цилиндр. Вводя новые переменные  $t^\circ$  и  $y^\circ$ , которые в дальнейшем обозначаем по-прежнему через  $t$  и  $y$ .

$$t^\circ = ht, \quad y^\circ = y/h \quad (4)$$

приведем систему к виду

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = [\Omega - F(\varphi)/h^2 - [1 + bF'(\varphi)] y] \quad (5)$$

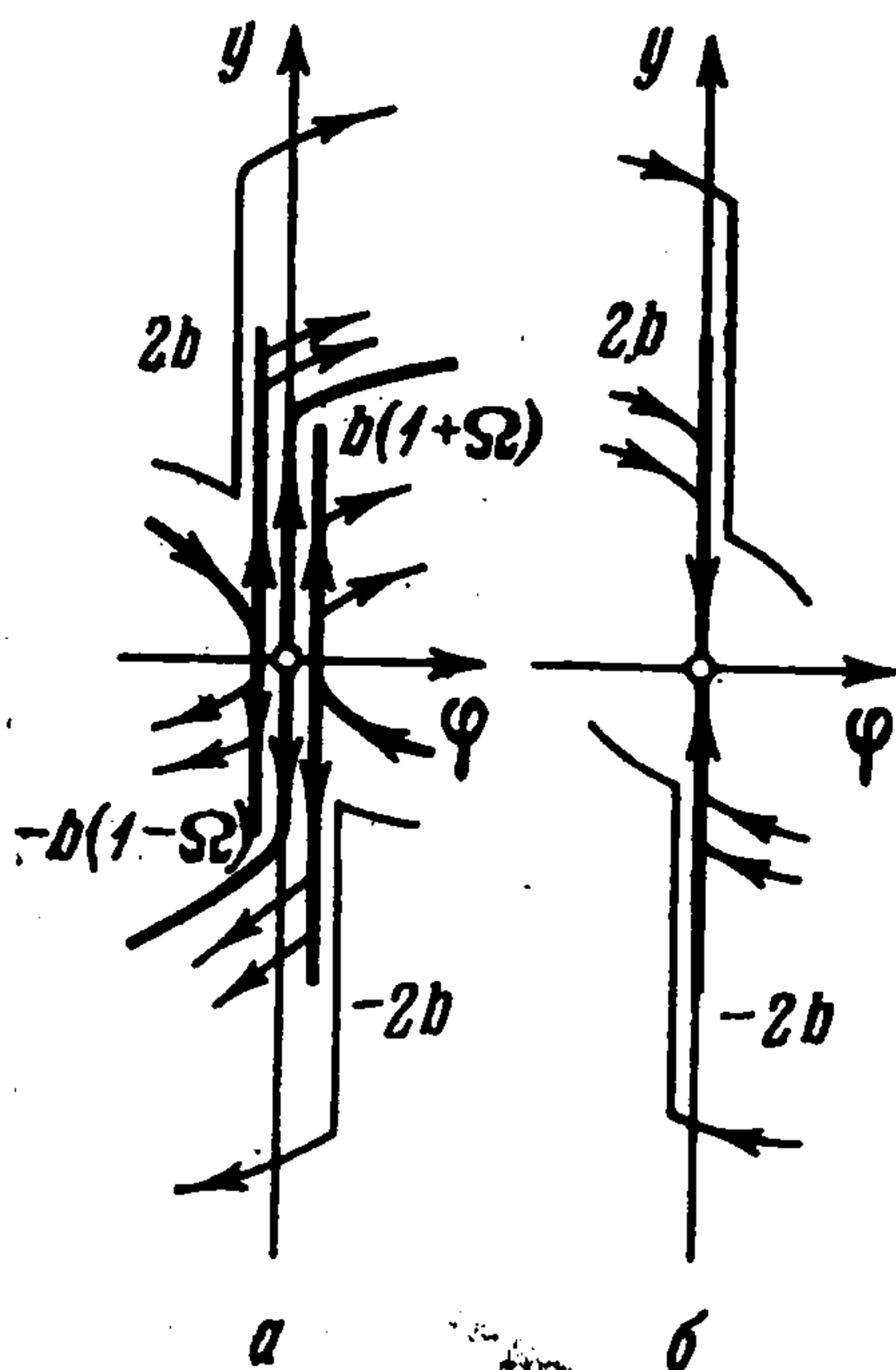
Введем обозначение

$$a = (1 + \Omega)/h^2\pi, \quad c = (1 - \Omega)/h^2\pi \leq a \quad (6)$$

Тогда система (5) принимает вид

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = a\pi - y \quad (-\pi < \varphi < 0) \quad (7)$$

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = -c\pi - y \quad (0 < \varphi < \pi) \quad (8)$$



Фиг. 1

Системы (7) и (8) позволяют проследить движение изображающей точки до того момента, когда она попадет на одну из прямых  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$ , на которых система (5) не определена.

Дальнейшее движение изображающей точки нуждается в доопределении. Именно, нужно указать, сколько времени она находится на прямой, как движется по ней, в какой точке ее покидает и какой из систем (7) или (8) описывается ее дальнейшее движение. Воспользуемся доопределением, построенным в работе [4]. (При применении формул<sup>1</sup> работы [4] нужно учитывать определяемое равенствами (4) изменение масштабов по  $t$  и  $y$ ).

Схема доопределенных движений по прямой  $\varphi = \pi$  приведена на фиг. 1,а. Здесь для наглядности налегающие одна на другую траектории раздвинуты в направлении оси  $\varphi$ . Изображающая точка системы (5), попавшая в точку  $(\pi, y)$ , где  $y > 0$ , совершает мгновенный скачок величины  $2b$  вверх по прямой  $\varphi = \pi$ , после чего продолжает движение при  $\varphi > \pi$  в соответствии с системой (7). Если изображающая точка попадает в точку  $(\pi, 0)$  из области  $y > 0$ , то ее дальнейшее движение не определяется однозначно. Она находится некоторое время в этой точке, а затем либо перескакивает в одну из точек отрезка  $\varphi = \pi$ ,  $b(1 + \Omega) < y \leq 2b$  и продолжает движение при  $\varphi > \pi$  в соот-

<sup>1</sup> В работе [4] на стр. 729, строка 18 сверху напечатано:  $r = 2b, h > 0$ . Следует читать:  $r = 2bh > 0$

ветствии с системой (7), либо перескакивает в одну из точек отрезка  $\varphi = \pi, -b(1 - \Omega) < y \leq 0$  и продолжает движение при  $\varphi < \pi$  в соответствии с системой (8).

Поведение изображающей точки, двигавшейся в нижнем полуцилиндре и попавшей на прямую  $\varphi = \pi$  аналогично (фиг. 1, а). Точка  $(\pi, 0)$  будет состоянием равновесия, аналогичным седлу, а траектории, проходящие через точки  $[\pi, b(1 + \Omega)]$  и  $[\pi, -b(1 - \Omega)]$ , — его сепаратрисами. Роль двух других сепаратрис выполняют траектории, входящие в точку  $(\pi, 0)$ .

Схема доопределенных движений по прямой  $\varphi = 0$  приведена на фиг. 1, б. Изображающая точка, попавшая в точку  $(0, y)$ , где  $y > 2b$ , совершает мгновенный скачок величины  $2b$  вниз по оси  $y$ , после чего продолжает движение при  $\varphi > 0$  в соответствии с системой (8). Если изображающая точка попадет в точку  $(0, y)$ , где  $0 < y \leq 2b$ , то она перескакивает в точку  $(0, 0)$ , где остается неограниченно долго.

Поведение изображающей точки, двигавшейся в нижнем полуцилиндре и попавшей на прямую  $\varphi = 0$ , аналогично (фиг. 1, б). Точка  $(0, 0)$  будет состоянием равновесия, аналогичным устойчивому узлу.

В дальнейшем под системой (5) будем понимать доопределенную систему.

Системы (7) и (8) не имеют состояний равновесия, поэтому доопределенная система (5) не имеет состояний равновесия, кроме  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$ .

Можно показать, что система (5) не имеет предельных циклов, охватывающих нижний полуцилиндр ( $y < 0$ ) и предельных циклов, не охватывающих цилиндр.

Установим существование и определим число и устойчивость предельных циклов, охватывающих верхний полуцилиндр. Для этого выделим на прямой  $\varphi = -\pi$  полупрямую  $Z: \varphi = -\pi, y = z \geq 0$  и рассмотрим траекторию, выходящую из некоторой точки  $z$  этой полупрямой. Если  $z$  достаточно велико, то эта полутраектория, обойдя вокруг цилиндра, вновь выйдет на полупрямую  $Z$  в некоторой точке  $z_1$ . Тем самым совокупность подобных траекторий осуществляет точечное преобразование полупрямой  $Z$  самой в себя (назовем его преобразованием  $S$ ), ставя в соответствие точки  $z$  и  $z_1$  этой полупрямой. Преобразование  $S$  есть результат последовательного применения двух преобразований  $T$  и  $T_1$ . Под  $T$  будем понимать переход изображающей точки с полупрямой  $Z$  на полупрямую  $V: \varphi = 0, y = v > 0$  с последующим скачком вдоль нее (имеются в виду скачки, не заканчивающиеся в состоянии равновесия). Под  $T_1$  будем понимать переход изображающей точки с полупрямой  $V$  на полупрямую  $Z$  с последующим доопределенным движением по ней. Проинтегрировав системы (7) и (8), найдем параметрические уравнения функций соответствия преобразований  $T$  и  $T_1$ . Для  $T$  это будут

$$\frac{z}{\pi} = a + \frac{1 - a\tau}{1 - e^{-\tau}}, \quad \frac{v}{\pi} = a + \frac{1 - a\tau}{e^{\tau} - 1} - \frac{2b}{\pi} \quad (9)$$

Здесь параметром служит  $\tau$  — время перехода изображающей точки с полупрямой  $Z$  на полупрямую  $V$ . Его нужно менять от нуля до такого значения, при котором  $z$  или  $v$  обратятся в нуль. Производные функции (9) имеют вид

$$\frac{dz}{dv} = \frac{e^{\tau}(v + 2b)}{z} > 0, \quad (10)$$

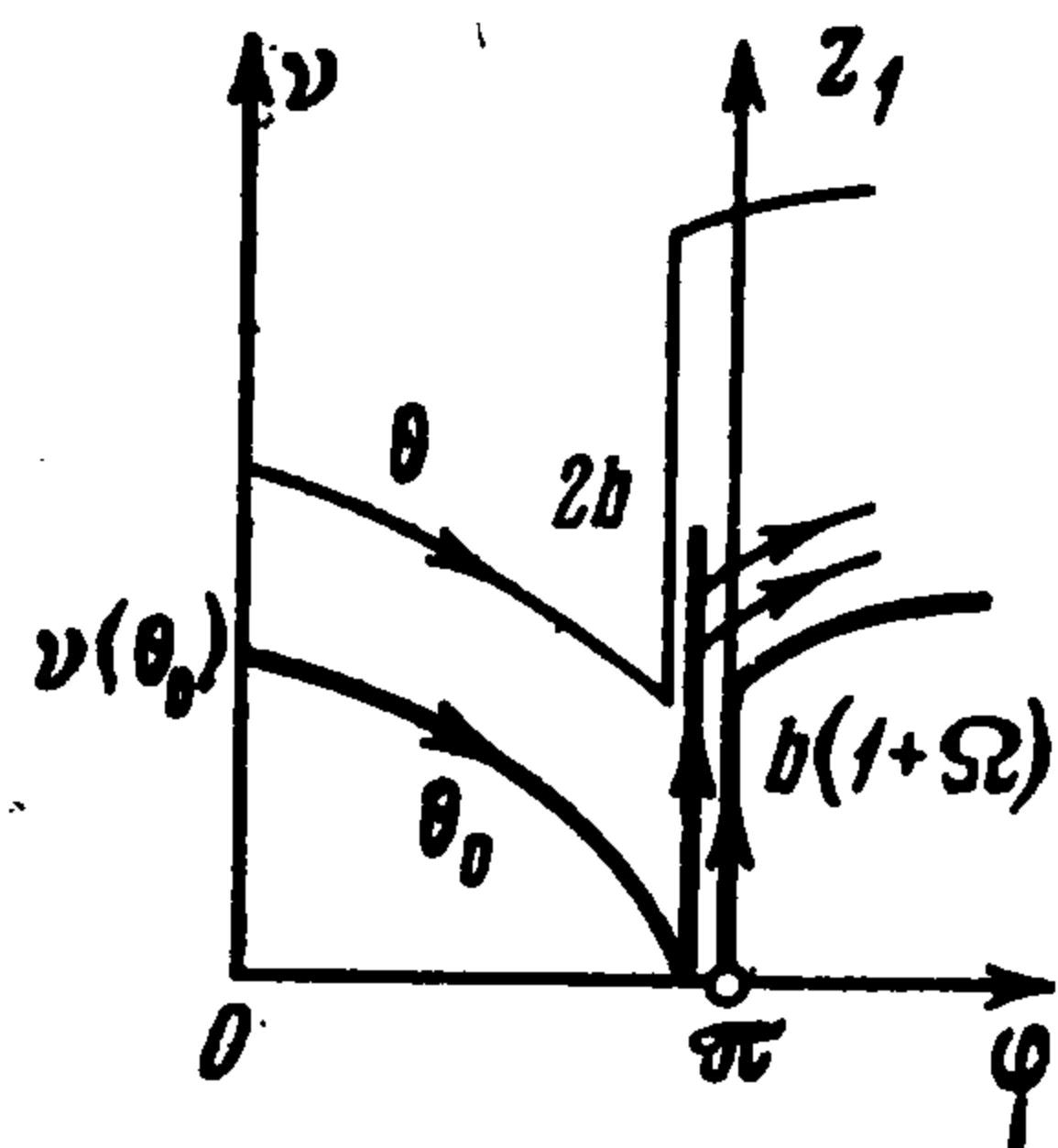
$$\frac{d^2z}{dv^2} = -a\pi e^{\tau}(e^{\tau} - 1) \frac{z + v + 2b}{z^3} < 0$$

Функция (9) имеет асимптоту

$$z = v + 2b + \pi \quad (11)$$

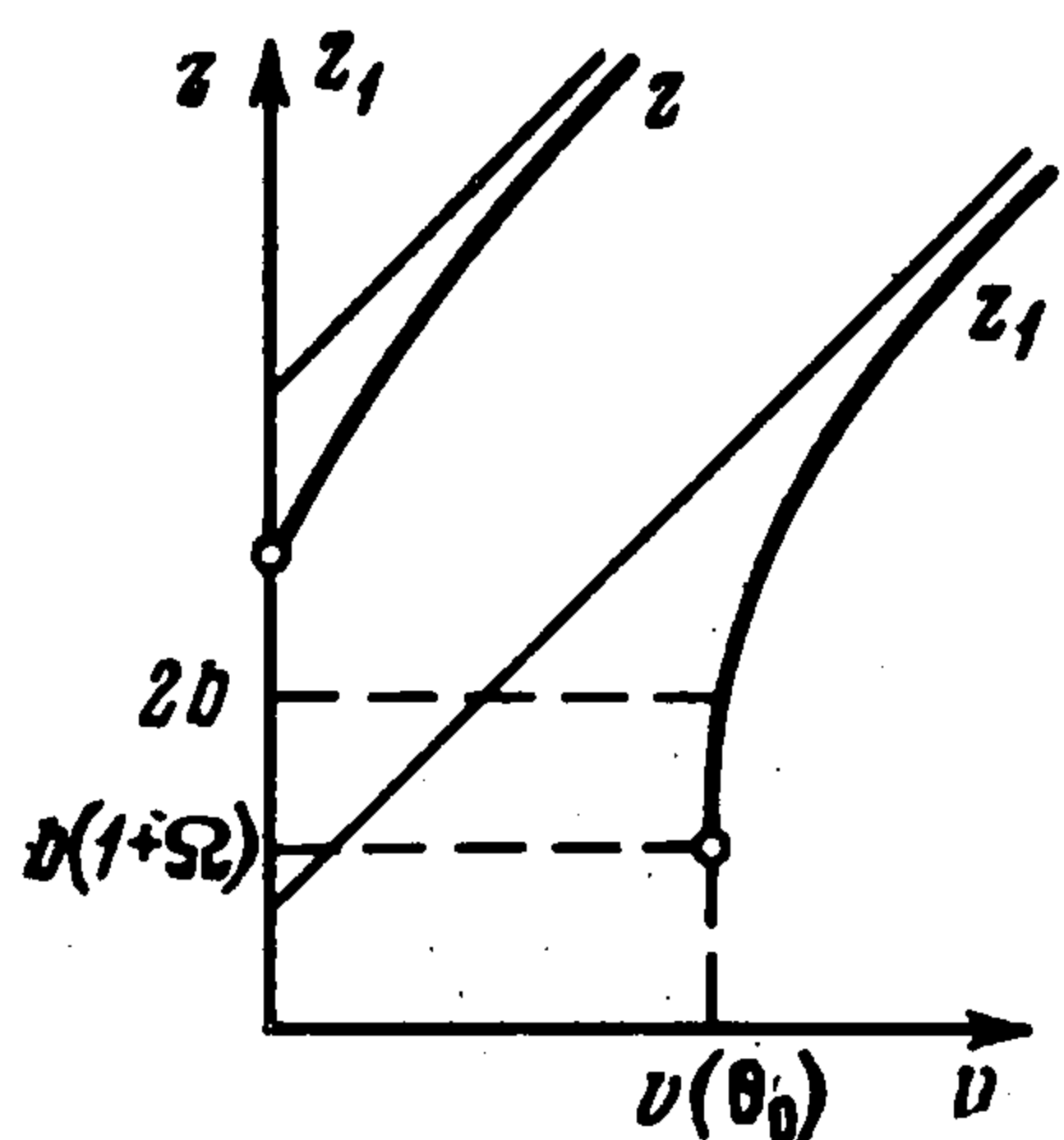
На фиг. 2 изображены траектории, осуществляющие преобразование  $T_1$ . Если точки  $v$  находятся на полупрямой  $V$  выше траектории системы (8), проходящей через точку  $(\pi, 0)$ , то его функция соответствия имеет уравнения

$$\frac{z_1}{\pi} = -c + \frac{1 + c\theta}{e^{\theta} - 1} + \frac{2b}{\pi}, \quad \frac{v}{\pi} = -c + \frac{1 + c\theta}{1 - e^{-\theta}} \quad (12)$$



Фиг. 2

Здесь параметром служит  $\theta$  — время перехода изображающей точки с полупрямой  $V$  на полупрямую  $Z$ . Его нужно менять от нуля до такого значения  $\theta_0$ , при котором  $z_1 = 2b$ . Производные функции (12) имеют вид



Фиг. 3

$$\frac{dz_1}{dv} = \frac{ve^{-\theta}}{z_1 - 2b} > 0 \quad (13)$$

$$\frac{d^2z_1}{dv^2} = -c\pi e^{-\theta} (1 - e^{-\theta}) \frac{(z_1 + v - 2b)}{(z_1 - 2b)^3} < 0$$

Функция (12) имеет асимптоту

$$z_1 = v + 2b - \pi \quad (14)$$

Точке  $v(\theta_0)$  преобразование  $T_1$  ставит в соответствие отрезок  $b(1 + \Omega) < z_1 \leq 2b$ . Поэтому функция соответствия для этих  $v$  и  $z_1$  изображается на плоскости  $vz$  отрезком

$$v = v(\theta_0), \quad b(1 + \Omega) < z_1 \leq 2b \quad (15)$$

Для отыскания неподвижных точек преобразования  $S$  нужно найти общие точки кривых  $z = z(v)$  (9) и  $z_1 = z_1(v)$  (12), (15). Если  $b$  достаточно велико, то точка пересечения кривой  $z = z(v)$  с осью  $z$  лежит выше точки пересечения с осью  $z$  асимптоты кривой  $z_1 = z_1(v)$ , и кривые не имеют общих точек (фиг. 3, кривые  $z = z(v)$  и  $z_1 = z_1(v)$  отмечены соответственно значками  $z$  и  $z_1$ ). Будем уменьшать  $b$ , не меняя других параметров. При этом для  $v = \text{const}$  будет

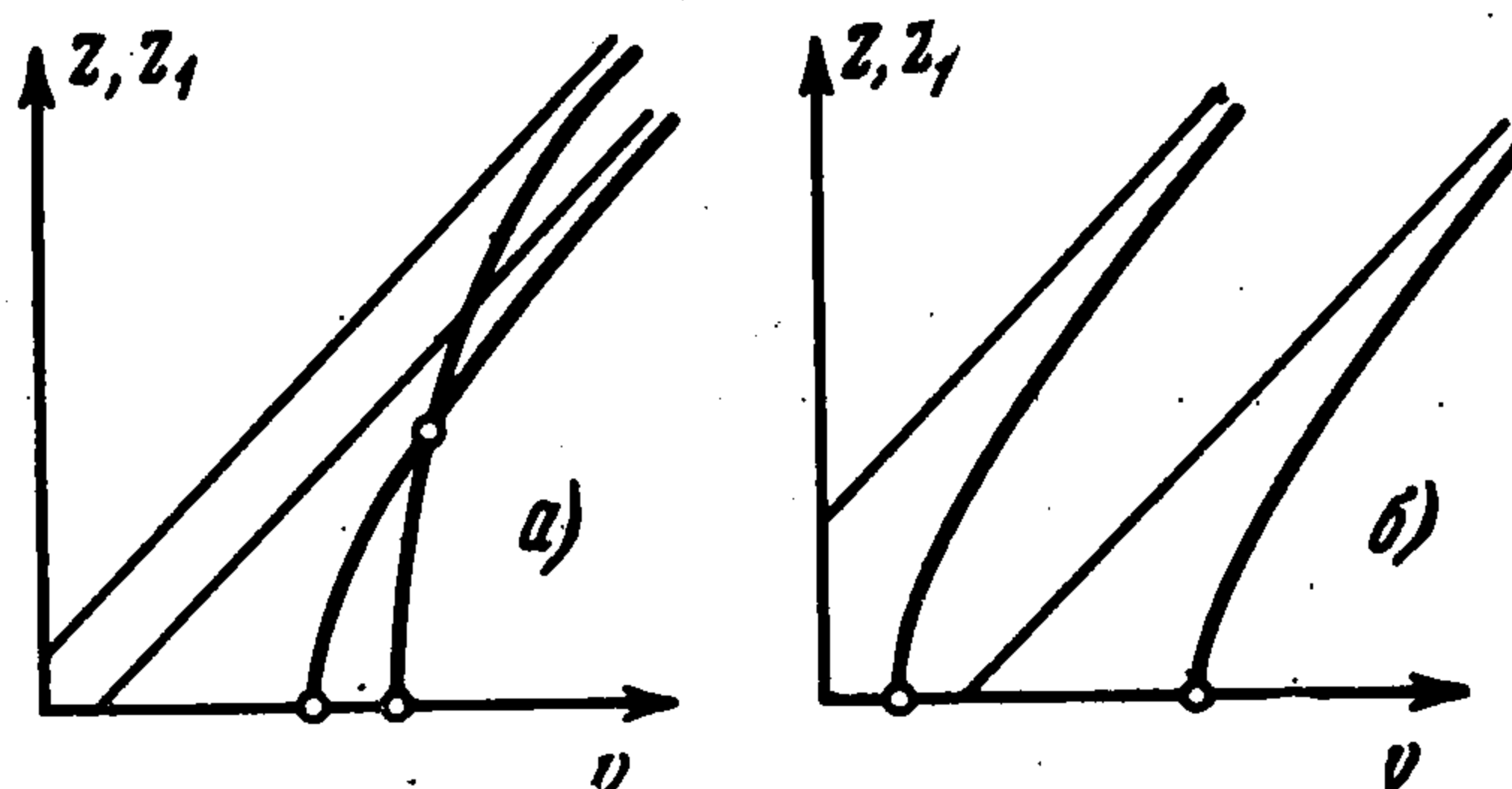
$$d(z - z_1) / db = 2(dz / dv - 1) > 0 \quad (16)$$

(так как в силу равенств (10), (11)  $dz / dv > 1$ ). Следовательно, кривые сближаются, и либо при достаточном уменьшении  $b$  будут иметь общие точки, либо при уменьшении  $b$  до нуля общие точки так и не появятся. Для того чтобы узнать, при каких значениях  $a$  и  $c$  осуществляется та или другая ситуация, рассмотрим кривые  $z$  и  $z_1$  при  $b = 0$  (фиг. 4). Если значения  $a$  и  $c$  соответствуют фиг. 4,а, то имеем первую ситуацию, если фиг. 4,б — вторую. Кривая, разделяющая на плоскости  $ac$  эти случаи, определяется условиями

$$z(\tau) = 0, \quad z_1(\theta) = 0, \quad v(\tau) = v(\theta) \quad (17)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} c^{-1} &= \exp \theta - \theta - 1 \equiv \varphi(\theta), \\ a^{-1} &= \varphi(-\tau) \quad (18) \\ \tau / \varphi(-\tau) - \theta / \varphi(\theta) &= 2 \end{aligned}$$



Фиг. 4

Кривая будет графиком возрастающей функции, расположена в области  $c < \infty$  и проходит через точку  $c = 0, a = a_*$ , где  $\exp(-2/a_*) + 1/a_* - 1 = 0$ . Область, соответствующая фиг. 4,а, расположена между кривой (18) и осью  $a$ . Если точка  $(a, c)$  лежит вне этой области, то при любых  $b$  кривые  $z$  и  $z_1$  не имеют общих точек, а система (5) предельных циклов.

Соответствующая качественная картина фазовых траекторий системы изображена на фиг. 5,а (для упрощения принят неравномерный масштаб по оси  $\varphi$  и оба состояния равновесия изображены на передней половине цилиндра; при равномерном масштабе одно из них было бы на задней половине цилиндра). Пусть теперь точка  $(a, c)$  лежит в области, ограниченной кривой (18) и осью  $a$ . Если  $b$  достаточно велико, то и в этом случае имеем картину фазовых траекторий, изображенную на фиг. 5,а.

При уменьшении  $b$  наступит момент, когда кривые коснутся в одной точке, чему соответствует появление на фазовом цилиндре полуустойчивого предельного цикла.

При дальнейшем уменьшении  $b$  точка касания распадается на две точки пересечения, а полуустойчивый предельный цикл на два грубых предельных цикла, из которых верхний устойчив, а нижний неустойчив. Соответствующая качественная картина

фазовых траекторий изображена на фиг. 5,б. Далее точка пересечения, соответствующая неустойчивому предельному циклу, переходит на вертикальный участок кривой  $z_1$ . При этом неустойчивый предельный цикл превращается в замкнутый контур  $ABCD$  (фиг. 5,в), который так же, как и неустойчивый предельный цикл, разделяет на фазовом цилиндре области притяжения устойчивого предельного цикла и устойчивого состояния равновесия.

При дальнейшем уменьшении  $b$  расстояние между рассматриваемой точкой и конечной точкой кривой  $z_1$  убывает, и наступит момент, когда она исчезнет. При этом контур  $ABCD$  влипают в сепаратрису состояния равновесия  $(\pi, 0)$ , образуя петлю. Дальнейшее уменьшение  $b$  до нуля не вызывает новых бифуркаций. Система имеет один устойчивый предельный цикл. Соответствующая качественная картина фазовых траекторий приведена на фиг. 5,г.

Приведенное описание опирается на то обстоятельство, что кривые (9) и (12) могут пересекаться не более чем в двух точках (см. дополнение.)

Поверхность в пространстве параметров, на которой происходит образование полуустойчивого цикла, определяется условиями

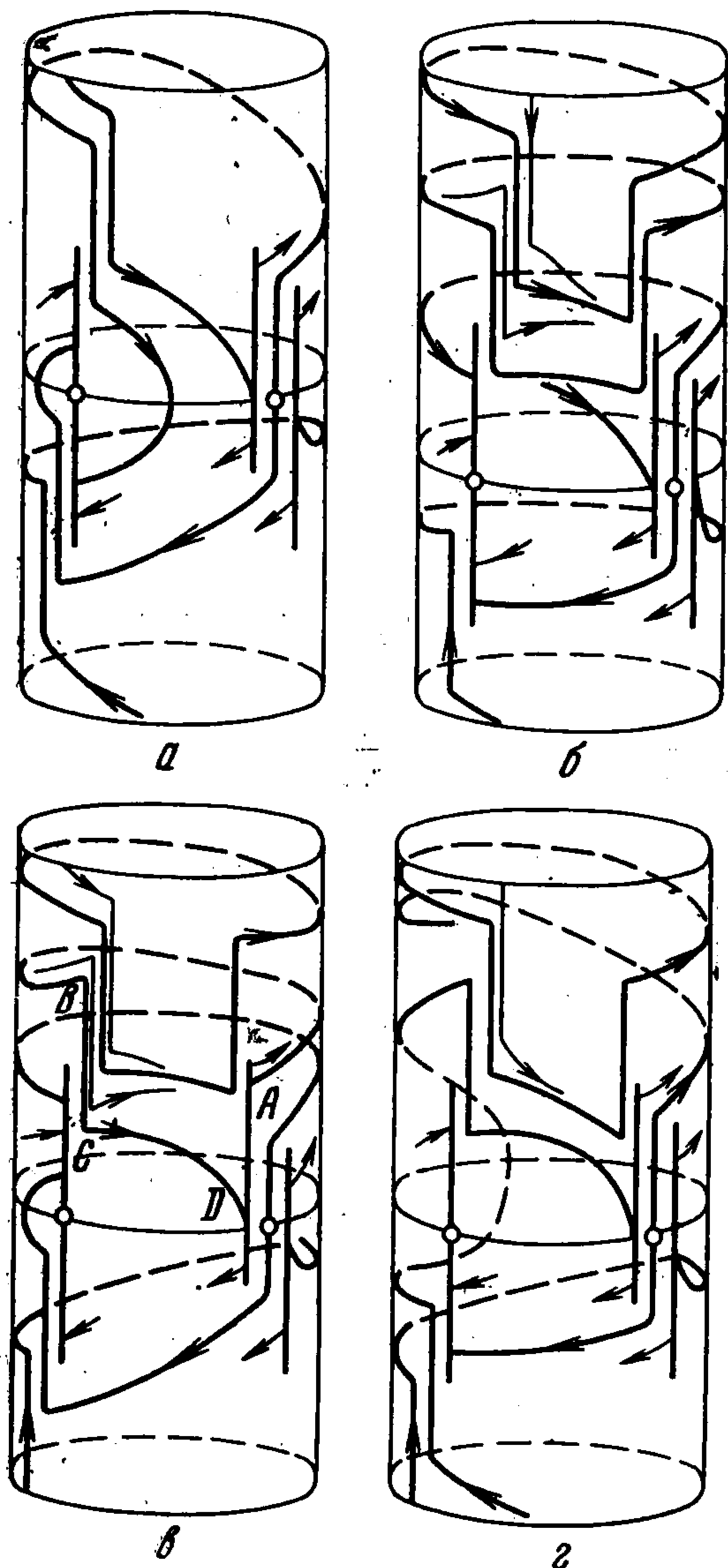
$$v(\tau) = v(\theta), \quad z(\tau) = z_1(\theta), \quad dz/dv = dz_1/dv \quad (19)$$

Перепишем эти равенства в развернутом виде и заменим первое разностью первого и второго. Тогда, если обозначить  $k = 1 - 2b/\pi(a+c) = 1 - bk^2$  (20) будем иметь

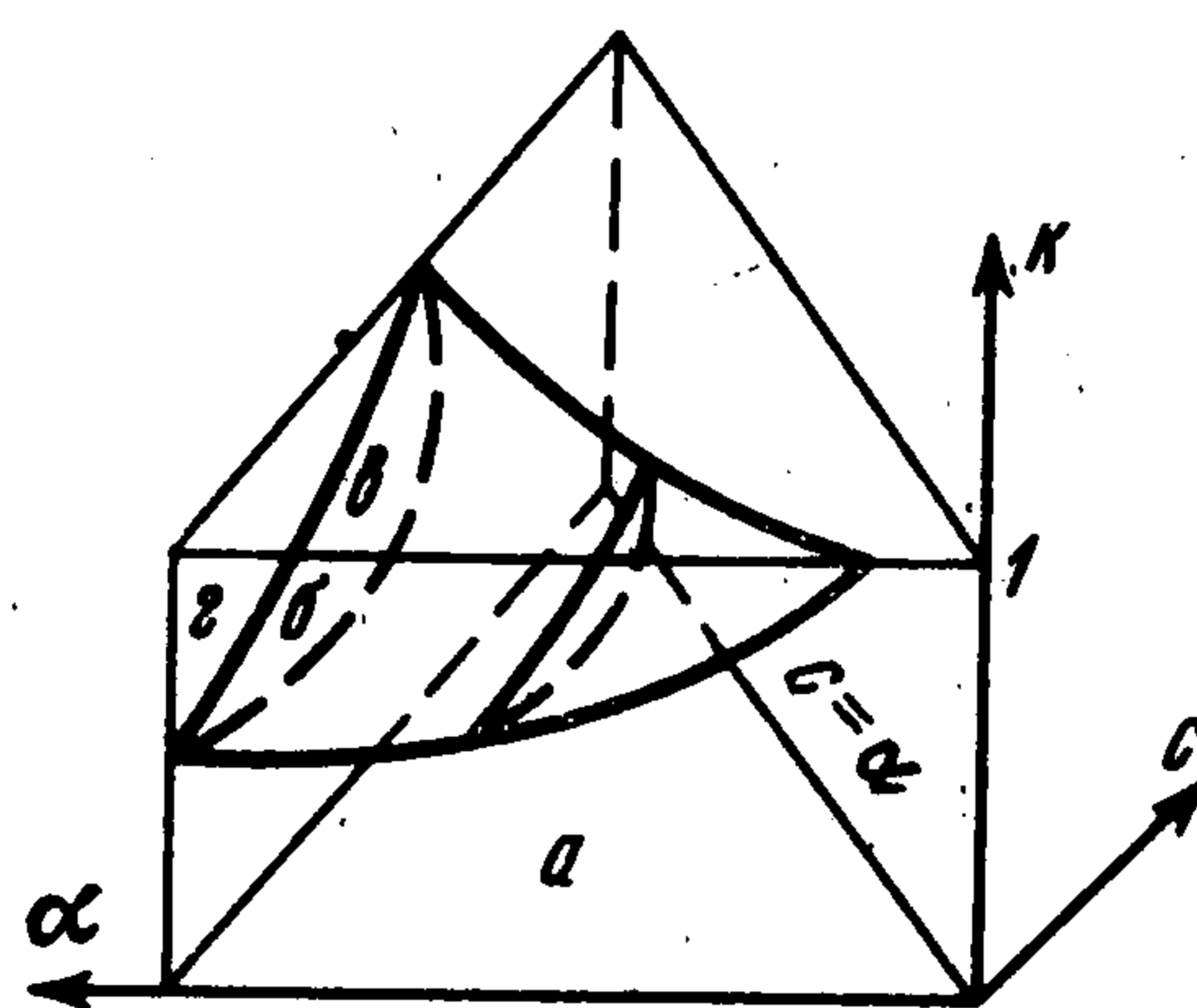
$$a\tau - c\theta = 2 \quad (21)$$

$$k(a+c) = \frac{c\theta + 1}{e^\theta - 1} + \frac{a\tau - 1}{1 - e^{-\tau}}$$

$$\frac{1 + a\varphi(\tau)}{1 - a\varphi(-\tau)} = \frac{1 + c\varphi(-\theta)}{1 - c\varphi(\theta)} > 0$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Поверхность (21) (нижняя поверхность на фиг. 6) пересекается с плоскостью  $k = 1$  ( $b = 0$ ) по кривой (18), с плоскостью  $c = 0$  — по кривой

$$ak = (1 - e^{-2/a})^{-1} \quad (22)$$

и имеет асимптотическую плоскость  $k = 1/2$ . Используя соображение о повороте векторного поля системы (8) с изменением параметра  $c$ , можно показать, что сечение поверхности плоскостью  $a = \text{const}$  будет графиком возрастающей функции<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Уравнения (21) могут быть использованы для численного построения зависимости «полосы захвата» [2] от параметров системы.

Поверхность в пространстве параметров, соответствующая образованию петли сепаратрисы, определяется условиями

$$z(\tau) = b(1 + \Omega), \quad v(\tau) = v(\theta), \quad z_1(\theta) = 2b \quad (23)$$

Представим эти равенства в следующем виде: вычтем первое из суммы двух других и полученным равенством заменим второе. Тогда будем иметь

$$a^{-1} = \tau - k(1 - e^{-\tau}), \quad a\tau - c\theta = 2 + c(1 - k), \quad c^{-1} = \varphi(\theta) \quad (24)$$

Поверхность (24) легко строится по сечениям  $c = \text{const}$ . Она пересекается с плоскостями  $k = 1$  и  $c = 0$  по тем же линиям, что и поверхность (21) и имеет асимптотический цилиндр

$$2k = 2e^\theta - \theta - \sqrt{(2e^\theta - \theta)^2 - 4e^\theta}, \quad c^{-1} = \varphi(\theta) \quad (25)$$

Сечения поверхности плоскостями  $a = \text{const}$  и  $c = \text{const}$  будут графиками монотонных функций.

На фиг. 6 приведено схематическое разбиение пространства параметров исследуемой системы на области различной качественной структуры фазовых траекторий. Буквы  $a, b, в, г$ , которыми на фиг. 6 помечены области, означают, что данной области соответствует структура, изображенная на фиг. 5 с такой же буквой.

*Замечание.* При работе устройства, динамика которого описывается системой (3), процессы установления начинаются на некоторой окружности, охватывающей фазовый цилиндр ([5], стр. 183). Поэтому работу устройства можно обеспечить не только тогда, когда параметры таковы, что система не имеет предельных циклов, но и тогда, когда система имеет два предельных цикла, если окружность начальных значений лежит ниже неустойчивого предельного цикла.

*Дополнение.* Покажем, что кривые (9) и (12) не могут иметь более двух точек пересечения. Для этого в точках пересечения найдем разность производных

$$\frac{dz}{dv} - \frac{dz_1}{dv} = \frac{v + 2b}{z} \frac{z - a\pi}{v + 2b - a\pi} - \frac{v}{z - 2b} \frac{z - 2b + c\pi}{v + c\pi} \equiv f(v, z)$$

(величины  $\tau$  и  $\theta$  исключаются при помощи равенств (9) и (12)). Функция  $f(v, z)$  меняет знак на прямых  $z = 2b$ ,  $v = a\pi - 2b$ ,  $z = v + 2b$  и гиперболы

$$(a + c)zv + 2bcz - 2bav - 2\pi bac = 0$$

Рассмотрение фазовой картины показывает, что для предельных циклов  $v < a\pi - 2b$  и  $z > 2b$ . В области, определяемой этими неравенствами, на кривой (9) функция  $f(v, z)$  меняет знак в единственной точке — точке пересечения кривой (9) и гиперболы. (Прямая  $z = v + 2b$  в рассматриваемой области с кривой (9) не пересекается). Если бы кривые (9) и (12) имели более двух точек пересечения, функция  $f(v, z)$  меняла бы знак на кривой (9) более одного раза.

Автор благодарен Н. Н. Баутину, сделавшему ряд полезных замечаний.

Поступила 15 VII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капранов М. В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты. Радиотехника, 1956, т. 2, № 12.
2. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Фазовая автоподстройка частоты М., «Связь», 1966.
3. Капранов М. В. Полоса захвата автоподстройки частоты с прямоугольной характеристикой фазового детектора. Изв. вузов, Радиотехника, 1958, № 4.
4. Скрябин Б. Н. Об одной динамической системе с разрывной характеристикой. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. Капланов М. Р., Левин В. А. Автоматическая подстройка частоты. Изд. 3. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.