ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
2. Михайлов Ф. А. и др. Динамика нестационарных линейных систем. М., «Наука», 1967.
3. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.
4. Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ-приближение. М., «Мир», 1967.
5. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Нелинейные задачи динамики машин. Л., «Машиностроение», 1968.
6. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев, Изд-во АН УССР, 1954.
7. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. 3. М., «Наука», 1965.

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ В АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Исследуется автономная система с вращающейся фазой и отклоняющимся аргументом. Строится схема последовательных приближений для точного решения на бесконечном промежутке времени и выводятся достаточные условия существования установившегося решения. К исследованию таких систем приводят многие задачи теории нелинейных вращательно-колебательных движений в системах с мало изменяющимися параметрами.

Строятся стационарные, т. е. установившиеся решения вещественной системы вида

$$dE / dt = \varepsilon f (E, E_\tau, \psi, \psi_\tau, \varepsilon) \qquad (E_\tau = E (t - \tau))$$
$$d\psi / dt = \omega (E, E_\tau) + \varepsilon F (E, E_\tau, \psi, \psi_\tau, \varepsilon) \qquad (\psi_\tau = \psi (t - \tau)) \qquad (1)$$

Здесь $t \in (-\infty, \infty)$ — время, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, E — векторная переменная, значения которой принадлежат некоторой окрестности точки E_0^*, $\psi \in (-\infty, \infty)$ — скалярная фаза, $\tau \in (-\infty, \infty)$ — постоянная.

Для построения решения используется метод последовательных приближений [1] и тот факт, что если система (1) для всех t имеет решение $E (t)$, $\psi (t)$, то она также допускает семейство решений $E (t + \theta)$, $\psi (t + \theta)$ (θ — произвольная постоянная), Следовательно, значение фазы ψ в некоторый момент t_0 может быть зафиксировано, в частности, его можно положить для упрощения выкладок равным нулю. Во избежание вековых членов в системе (1) вводится новая независимая переменная s так, чтобы

$$t - t_0 = s (1 + \varepsilon h), \qquad \tau = \varphi (1 + \varepsilon h)$$

В результате получается система

$$dE / ds = \varepsilon (1 + \varepsilon h) f (E, E_\varphi, \psi, \psi_\varphi, \varepsilon)$$
$$d\psi / ds = (1 + \varepsilon h) [\omega (E, E_\varphi) + \varepsilon F (E, E_\varphi, \psi, \psi_\varphi, \varepsilon)]$$

Здесь h — некоторая неизвестная, которая выбирается таким образом, чтобы решение возмущенной системы по s имело «невозмущенный» период T_0.

Предполагая, что функции f, ω допускают частные производные по всем аргументам, удовлетворяющие вместе с F условиям Липшица в указанной выше области, и совершая замену

$$E = E_0 + \varepsilon x, \quad \psi = \omega_0 s + \theta + \varepsilon y \qquad (E_0, \theta = \text{const})$$ можно получить систему

$$\frac{dx}{ds} = f(E_0, E_0, \omega_0 s, \omega_0 (s-\varphi), 0) + \varepsilon \left[h f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)_0 y + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_\varphi}\right)_0 y_\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 + f^*(s, \varphi, h, x, x_\varphi, y, y_\varphi, \varepsilon)\right] \tag{2}$$

$$\frac{dy}{ds} = h\omega(E_0, E_0) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_\varphi + F_0 + F^*(s, \varphi, h, x, x_\varphi, y, y_\varphi, \varepsilon)$$

$$T_0 = 2\pi / \omega(E_0, E_0)$$

Здесь x, y — неизвестные периодические функции s периода T_0, а f^*, F^* — известные функции, обращающиеся в нуль тождественно при $\varepsilon = 0$. Нулевые приближения функций x, y определяются из системы (2), в которой $\varepsilon = 0$ и так, чтобы $y = 0$ при $s = 0$. В результате

$$x_0(s) = a_0 + \int_0^s f_0\, ds_1 \equiv a_0 + x_0^*(s) \qquad (a_0 = \text{const})$$

$$y_0(s) = \left[h_0\omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E}\right)_0 a_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E_\varphi}\right)_0 a_0\right] s + \int_0^s \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial E}\right)_0 x_0^*(s_1) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_0^*(s_1 - \varphi) + F_0\right] ds_1$$

Вектор-функция x_0 будет периодической при условии

$$R(E_0, \varphi) = \int_0^{T_0} f(E_0, E_0, \omega_0 s, \omega_0 (s - \varphi), 0)\, ds \equiv T_0 \langle f_0 \rangle = 0 \tag{3}$$

а полученная нелинейная система уравнений будет определяющей для вектора E_0. Итак, пусть $E_0^* = E_0(\varphi)$ — корень этой системы (3), принадлежащий допустимой области. Аналогично функция y_0 будет периодической, если положить

$$h_0 = -\frac{1}{\omega_0}\left\langle \left(\frac{\partial \omega}{\partial E}\right)_0 x_0^* + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_{0\varphi}^* + F_0 \right\rangle - \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial E}\right)_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E_\varphi}\right)_0\right] \frac{a_0}{\omega_0}$$

В результате периодическая функция y_0 определена полностью, а x_0 лишь с точностью о постоянного вектора a_0.

Системой первого приближения будут уравнения (2), в которых функции f^* и F^* положены равными нулю. После подстановки нулевого приближения в уравнения для x_1 можно получить

$$x_1(s) = a_1 + x_0^*(s) + \varepsilon\left[h_0 x_0^* + \int_0^s \left(\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial E_\varphi}\right)_0\right) a_0\, ds_1 + \int_0^s f_1(s_1, \varphi)\, ds_1\right]$$

$$\left(f_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 x_0^* + \left(\frac{\partial f}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_{0\varphi}^* + \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)_0 y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_\varphi}\right)_0 y_{0\varphi} + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0\right) \tag{4}$$

Отсюда следует, что

$$(\partial R / \partial E_0^*)\, a_0 = -T_0 \langle f_1 \rangle$$

Эту систему линейных уравнений относительно вектора a_0 можно разрешить и притом однозначно, если $\det(\partial R / \partial E_0^*) \neq 0$, что и предполагается. Далее, из выражения

$$y_1(s) = \left[h_1\omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E}\right)_0 a_1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E_\varphi}\right)_0 a_1\right] s +$$

$$+ \int_0^s \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial E}\right)_0 x_1^* + \left(\frac{\partial \omega}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_{1\varphi}^* + F_0 + F^*(s_1, \varphi, h_0, x_0, x_{0\varphi}, y_0, y_{0\varphi}, \varepsilon)\right] ds_1$$

вытекает, что

$$h_1 = -\frac{1}{\omega_0}\langle F_1\rangle - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial E}\right)_0 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial E_\varphi}\right)_0\right]\frac{a_1}{\omega_0}$$

$$\left(F_1(s, \varphi, h_0, \varepsilon) = \left(\frac{\partial\omega}{\partial E}\right)_0 x_1^* + \left(\frac{\partial\omega}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_{1\varphi}^* + F_0 + F_0^*\right)$$

Последующие приближения определяются по общей схеме

$$\frac{dx_l}{ds} = f_0 + \varepsilon\left[h_{l-1}f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 x_{l-1} + \left(\frac{\partial f}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_{l-1,\,\varphi} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial f}{\partial\psi}\right)_0 y_{l-1} + \left(\frac{\partial f}{\partial\psi_\varphi}\right)_0 y_{l-1,\,\varphi} + \left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right)_0 + f_{l-1}^*\right] \tag{5}$$

$$\frac{dy_l}{ds} = h_l\omega_0 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial E}\right)_0 x_l + \left(\frac{\partial\omega}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_{l\varphi} + F_0 + F_{l-1}^* \qquad (l \geqslant 2)$$

Подстановка функций x_1 и y_1 в векторное уравнение для x_2 позволяет получить формулу, аналогичную (4)

$$x_2(s) = a_2 + x_0^*(s) + \varepsilon\left[h_1 x_0^* + \int_0^s\left(\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 a_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial E_\varphi}\right)_0 a_1 + f_2\right)ds_1\right]$$

$$\left(f_2(s, \varphi, a_1, \varepsilon) = \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 x_1^* + \left(\frac{\partial f}{\partial E_\varphi}\right)_0 x_{1\varphi}^* + \left(\frac{\partial f}{\partial\psi}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial\psi_\varphi}\right)_0 y_{1\varphi} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right)_0 + f^*(s, \varphi, h_1, x_1, x_{1\varphi}, y_1, y_{1\varphi}, \varepsilon) \qquad (f_2|_{\varepsilon=0} = f_1)\right)$$

Таким образом, векторное уравнение относительно a_1, получаемое из условия периодичности x_2, допускает вещественный корень $a_1(\varphi, \varepsilon)$ при достаточно малых значениях ε. В результате из системы второго приближения полностью находится первое приближение вектор-функции x и второе для y. Методом индукции на основе теорем о неявных функциях можно показать, что схема (5) позволяет найти любое приближение по степеням ε периодических относительно s, φ функций x, y, h, где $h = H(\varphi, \varepsilon)$. Разрешая следующее уравнение относительно h

$$h = H(\tau(1 + \varepsilon h), \varepsilon) \qquad (h = h(\tau, \varepsilon)) \tag{6}$$

можно получить явные выражения для искомых неизвестных

$$E(t, \tau, \varepsilon) = E_0(\varphi) + \varepsilon x(s, \varphi, \varepsilon), \qquad \psi(t, \tau, \varepsilon) = \omega(E_0(\varphi), E_0(\varphi))s + \varepsilon y(s, \varphi, \varepsilon)$$

$$(s = (t - t_0)[1 + \varepsilon h(\tau, \varepsilon)]^{-1}, \quad \varphi = \tau[1 + \varepsilon h(\tau, \varepsilon)])$$

Решение уравнения (6) можно построить при помощи последовательных приближений по схеме

$$h_j = H(\tau(1 + \varepsilon h_{j-1}), \varepsilon) \qquad (j \geqslant 1,\ h_0 = H(\tau, 0))$$

В заключение следует отметить, что к исследованию систем типа (1) приводятся многие автономные задачи теории нелинейных вращательно-колебательных движений. Это, в частности, системы с одной степенью свободы и мало изменяющимися параметрами, автономный аналог системы, исследованной в [2], и др. Развитый здесь метод малого параметра [1] применительно к системам с отклоняющимся аргументом обладает большой наглядностью и имеет некоторые преимущества перед схемами усреднения [3], где $t \sim 1/\varepsilon$.

Поступила 20 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Акуленко Л. Д. Установившиеся периодические и вращательные движения в возмущенных существенно нелинейных системах с одной степенью свободы, близких к консервативным, в случае произвольного постоянного отклонения аргумента. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1, стр. 124—131.
3. Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. Применение метода усреднения к расчету некоторых систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Вестн. Моск. ун-та, сер. физ., астрон., 1965, № 4, стр. 89—91.