

О КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ

И. И. Вульфсон

(Ленинград)

Для решения прикладных задач, связанных с исследованием колебательных систем, параметры которых изменяются во времени, известен ряд приближенных методов [1-4]. В предлагаемой статье для анализа подобных систем используется аналогия между параметрическими колебаниями и вынужденными колебаниями в некотором условном осцилляторе с определенным образом выбранными параметрами. Развиваемый при этом подход, близкий к идее ВКБ-метода [3-5], в известной мере расширяет возможности построения эффективных приближенных решений для задач рассматриваемого класса.

§ 1. Сначала рассматривается следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к которому сводится большое число задач прикладной динамики [1,5]:

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t)q = F(t) \quad (1.1)$$

Подстановкой Эйлера уравнение (1.1) приводится к виду

$$y'' + p^2(t)y = Q(t), \quad (p^2 = k^2 - n^2 - \dot{n}) \quad (1.2)$$

$$y = q \exp \left[\int_0^t n(t) dt \right], \quad Q = F \exp \left[\int_0^t n(t) dt \right]$$

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.2), ищется в форме

$$y^* = B(t) \cos \Phi(t) \quad (1.3)$$

При этом

$$y^{*\prime\prime} = (B'' - B\Phi') \cos \Phi - (2B'\Phi' + B\Phi'') \sin \Phi \quad (1.4)$$

Принятая форма (1.3) позволяет ввести одно дополнительное условие, которое выбирается таким образом, чтобы в выражении (1.4) коэффициент при $\sin \Phi$ обратился в нуль

$$2B'\Omega + B\Omega' = 0 \quad (\Omega = d\Phi/dt) \quad (1.5)$$

Рассматривая (1.5) как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, находим

$$B = A \sqrt{\Omega_0/\Omega} \quad (\Omega_0 = \Omega(0)) \quad (1.6)$$

Здесь A — произвольная постоянная. Отсюда

$$y^* = A \sqrt{\Omega_0/\Omega} \cos \left(\int_0^t \Omega dt + \gamma \right) \quad (1.7)$$

где γ — начальная фаза.

Подставив (1.7) в исходное однородное уравнение, получим

$$z'' - 0.5z'^2 + 2\Omega_*^2 e^{2z} = 2p^2(t) \quad (z = \ln \Omega / \Omega_*) \quad (1.8)$$

Здесь Ω_* — произвольный параметр, имеющий размерность частоты.

Это уравнение соответствует некоторому одномассовому нелинейному осциллятору со знакопеременным «демпфированием», роль внешнего возмущения в данном случае играет функция $2p^2(t)$. Переменная z здесь может рассматриваться лишь в качестве аналога некоторой упругой деформации, поэтому в дальнейшем изложении этот осциллятор будет называться условным. Если $p^2(t)$ — медленно меняющаяся функция, вынужденные колебания этого осциллятора практически совпадают со статической деформацией от приложенного возмущения; при этом $\Omega \approx p$. Представляет интерес, что в этом частном случае выражение (1.7) приобретает вид решения, полученного для дифференциального уравнения (1.2) с помощью ВКБ-приближения первого порядка [4]; такую же форму имеет основной член асимптотического представления при одном способе приведения к так называемому L -диагональному виду [6].

Частное решение неоднородного уравнения (1.2) y^{**} , полученное на базе решения (1.7) методом вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$y^{**} = \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} \int_0^t Q_1(u) \sin[\Phi(t) - \Phi(u)] du \quad \left(Q_1(u) = \frac{Q(u)}{\sqrt{\Omega(u)}} \right) \quad (1.9)$$

Используя (1.7) и (1.9), общее решение уравнения (1.1) может быть представлено следующим образом:

$$q = v \exp \left[- \int_0^t n(t) dt - 0.5(z - z_0) \right] \quad (1.10)$$

Здесь

$$v = y \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega_0}} = v_0 \cos \Phi + v_0' \sin \Phi + \int_{\Phi_0}^{\Phi} F_1(\psi) \sin(\Phi - \psi) d\psi \quad (1.11)$$

$$(v_0 \doteq v(\Phi_0) = y_0, \quad v_0' = \left(\frac{dv}{d\Phi}(\Phi_0) = \frac{y_0'}{\Omega_0} + 0.5 \frac{\Omega_0'}{\Omega_0^2} \right) \left(F_1(\psi) = \frac{Q(\psi)}{\sqrt{\Omega_0 \Omega^3(\psi)}} \right))$$

Заметим, что $v(\Phi)$ есть решение дифференциального уравнения $v'' + v = F_1(\Phi)$, в котором роль «времени» выполняет функция Φ .

§ 2. Для исследования динамических свойств условного осциллятора рассмотрим эффект от скачкообразного изменения $p^2(t)$. Пусть

$$p^2(t) = p_0^2 + [p_1^2 - p_0^2] \eta(t - t_0)$$

где $\eta(t - t_0)$ — единичная функция ($\eta = 0$ при $t < t_0$, $\eta = 1$ при $t > t_0$).

Переходя к безразмерному времени $\tau = 2\Omega_* t$, запишем уравнение (1.8) следующим образом:

$$\begin{aligned} z'' - 0.5z'^2 + 0.5e^{2z} &= 0.5v^2(\tau) \\ \left(z' = \frac{dz}{d\tau} = \frac{z'}{2\Omega_*}, \quad z'' = \frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{z''}{4\Omega_*^2}, \quad v = \frac{p}{\Omega_*} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

При $v = \text{const}$ уравнение (2.1) имеет точное решение. Принимая $(z')^2 = x$, приводим (2.1) к виду дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами

$$dx/dz - x = v^2 - e^{2z} \quad (2.2)$$

Решение этого уравнения приводится к виду

$$z' = \pm \sqrt{he^{z-z_0} - (v^2 + e^{2z})} \quad (2.3)$$

$$\tau - \tau_0 = \int_{z_0}^z \frac{dz}{z'} = \frac{1}{v} \left| \text{Arcsin} \frac{he^{z-z_0} - 2v^2}{e^z \sqrt{h^2 - 4v^2}} \right|_z \quad (2.4)$$

$$\left(h = z_0'^2 + e^{2z_0} + v^2, \quad z_0 = \ln \frac{\Omega_0}{\Omega_*}, \quad z_0' = \frac{\Omega_0'}{2\Omega_* \Omega_0} \right)$$

Можно показать, что всегда $h \geq 2v$.

В рассматриваемом случае $\Omega_0 = p_0$, $\Omega_0' = 0$, поэтому начальные условия могут быть представлены так: $z_0 = \ln v_0$, $z_0' = 0$.

Принимая $\Omega_* = p_1$ ($v_1 = 1$), по зависимости (2.3) для ряда значений v_0 построены фазовые траектории (фиг. 1), которые представляют собой замкнутые кривые, симметричные относительно оси абсцисс и пересекающие эту ось в двух равноудаленных от начала координат точках $z = \pm \ln v_0$. На фазовой плоскости нанесены также некоторые переходные кривые $N_1 N_i$ ($i = 2 \div 5$), соответствующие плавному уменьшению $v^2(\tau)$ по линейному закону от $v_0^2 = 10$ до $v^2(\tau_*) = v_1^2 = 1$.

Анализируя зависимость (1.6), можно записать максимум переменной амплитуды $B(t)$ в следующем виде:

$$B_{\max} = A \exp[-0.5(z_{\min} - z_0)] \quad (2.5)$$

На основании (2.4) легко показать, что период колебаний условного осциллятора τ_z , на котором совершается полный обход контура фазовой траектории, равен 2π ; это соответствует после перехода к переменной t — периоду $T_z = \pi/p_1$, отвечающему частоте $2p_1$.

§ 3. Сначала воспользуемся данным методом для рассмотрения нескольких типовых задач, допускающих сопоставление результатов с известными решениями. Пусть

$$p^2 = p_*^2 (1 - 2\varepsilon \cos \omega t) \quad (3.1)$$

При этом (1.2) приобретает вид уравнения Матье.

Применяя к нелинейному дифференциальному уравнению (2.1) метод гармонической линеаризации и принимая $\Omega_* = p_*$, имеем

$$z = a_0 + a \cos \omega t \quad (3.2)$$

Здесь a , a_0 определяются из следующих зависимостей:

$$a = \frac{\varepsilon \kappa^2(a)}{|\kappa^2(a) - (\omega/2p_*)^2|} \frac{a I_0(2a)}{I_1(2a)}, \quad a_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{p_*^2 + 0.125\omega^2}{p_*^2 I_0(2a)} \quad (3.3)$$

$$\left(\kappa^2(a) = \frac{I_1(2a)}{a [I_0(2a) - 0.5a I_1(2a)]}, \quad I_k(2a) = i^{-k} J_k(2ai), \quad i = \sqrt{-1} \right)$$

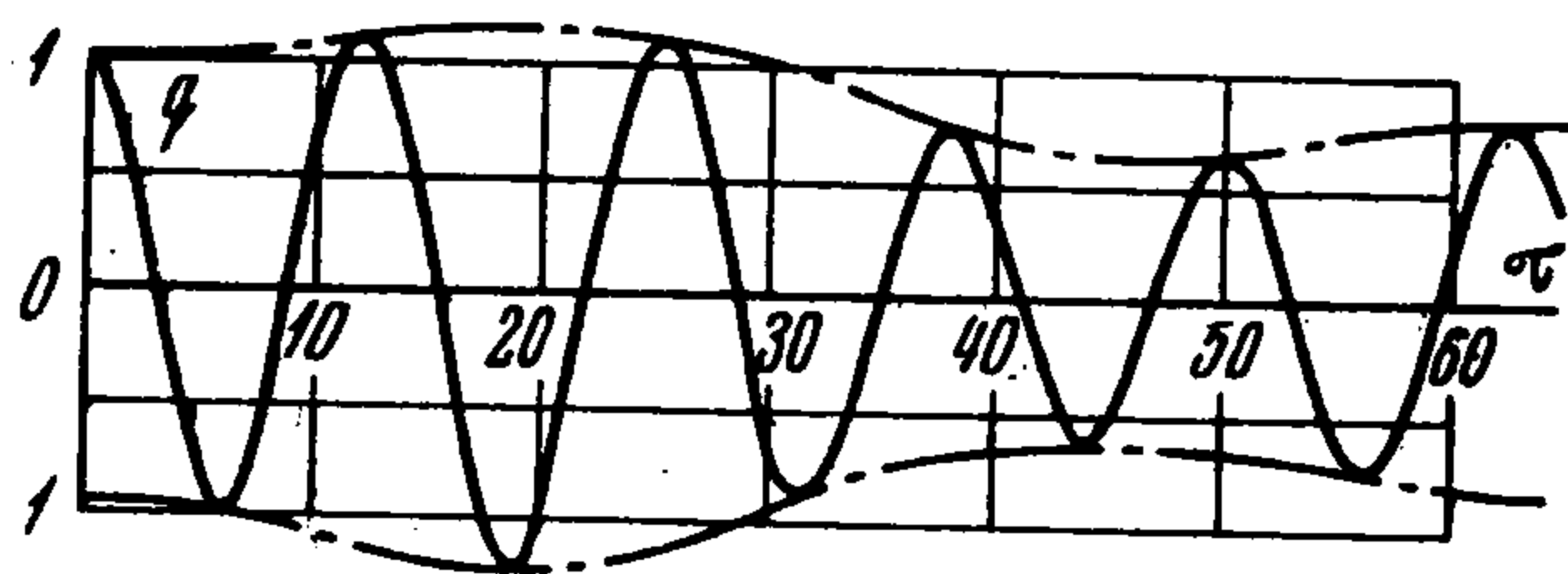
Здесь J_k — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента $2ai$ [7]. Анализ показывает, что при $a \leq 1$ основная собственная частота условного осциллятора принимает значения $1 \leq \kappa \leq 1.035$.

В качестве примера определим свободные колебания при $\varepsilon = 0.1$, $\omega = 1.71 p_*$, $n = 0.02 p_*$. Используя таблицы функций I_0 , I_1 работы [7], из (3.3) находим $a = 0.4$, $a_0 = 0.08$. Отсюда по формуле (1.10)

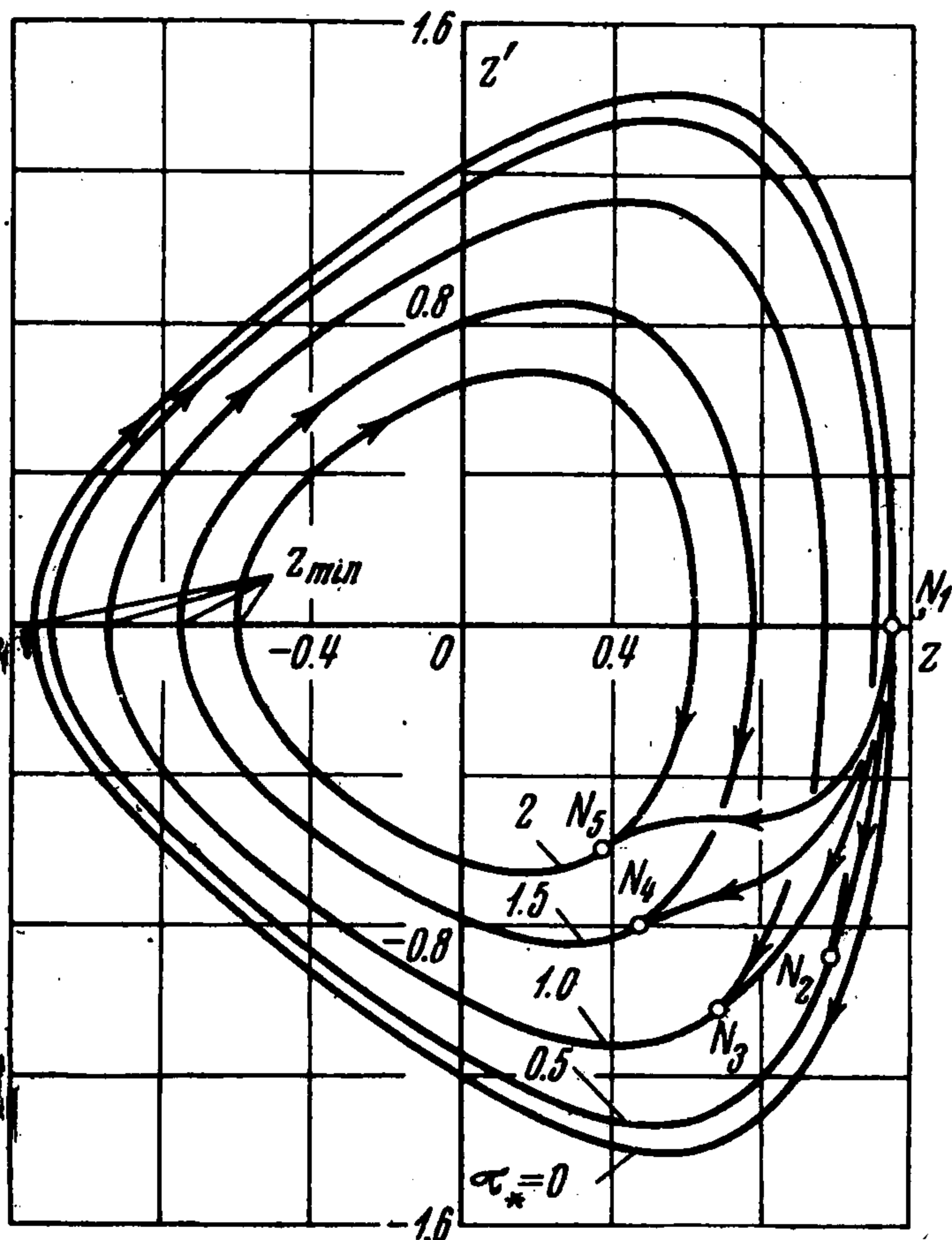
$$q = A \exp[-nt + 0.5a(1 - \cos \omega t)] \cos \left[\Omega_* e^{a_0} \int_0^t \exp(a \cos \omega t) dt + \gamma \right] \approx A \exp[-0.01 \tau + 0.2(1 - \cos 0.855 \tau)] \cos [0.54(\tau + 0.467 \sin 0.855 \tau)]$$

График $q(\tau)$ при $A = 1$ и $\gamma = 0$ приведен на фиг. 2.

На фиг. 3 проиллюстрировано развитие резонансных колебаний условного осциллятора при $\omega = 2p_*$ и $\omega = p_*$, а также



Фиг. 2



Фиг. 1

соответствующие этим режимам параметрические резонансы. Характерно, что при главном параметрическом резонансе ($\omega = 2p_*$) нарастание колебаний условного осциллятора с большой степенью приближения описывается зависимостью

$$z = \varepsilon p_* t \sin 2p_* t \quad (3.4)$$

являющейся частным решением дифференциального уравнения

$$z'' + 4p_*^2 z = -4\varepsilon p_*^2 \cos 2p_* t$$

полученного из (1.8) линеаризацией при малых z .

Из (1.10), (1.11) следует, что при $Q = 0$ функция q будет ограниченной в зонах параметрического резонанса, если

$$\int_0^T n(t) dt > 0.5 |\Delta z| \left(T = \frac{2\pi}{p_*} \right) \quad (3.5)$$

Здесь Δz — разность между минимумами функции z , разделенными периодом T . При $n = \text{const}$ с учетом (3.4) и (3.5) имеем

$$n > 0.5 \epsilon p_* \quad (3.6)$$

Это отвечает известному результату, полученному при анализе усеченного определителя Хилла [1].

Рассмотрим еще один характерный случай периодического изменения функции $p^2(t)$, представленной в виде «прямоугольного синуса» с пульсацией, равной μp_*^2 .

Поскольку $p^2(t)$ — кусочно постоянная функция, то можно воспользоваться точным решением уравнения (2.1) в форме (2.3). Пусть на интервале первой полуволны ($p^2 = p_1^2$) имеет место экстремум функции $z = z_1$. Тогда значение этого экстремума z_1 может быть определено из следующего квадратного уравнения, полученного из (2.3) при подстановке $z' = 0$

$$e^{2z_1} - (v_1^2 e^{-z_0} + e^0) e^{z_1} + v_1^2 = 0 \quad (3.7)$$

Экстремуму отвечает корень

$$e^{z_1} = v_1^2 e^{-z_0} \quad (3.8)$$

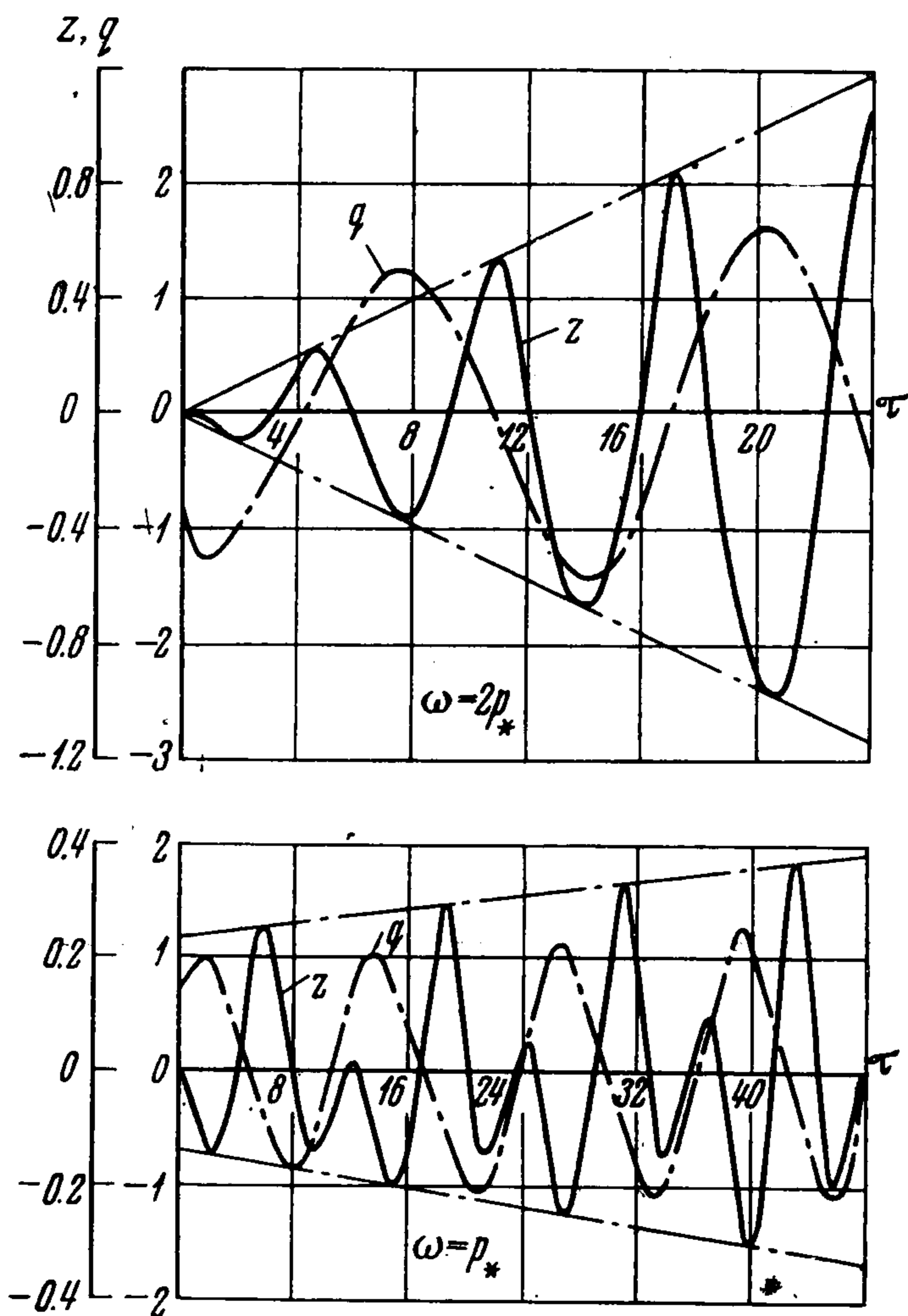
Если принять $\Omega_* = p_*$, то $v_0 = 1$ и $z_0 = 0$, причем $z_1 = \ln v_1^2 = \ln(1 - \mu)$.

Пусть в момент достижения экстремумов происходят переключения с одного участка на другой (фиг. 4). Это случай, при котором, строго говоря, длительность верхних и нижних «полувольт» несколько различается — наиболее опасен с точки зрения параметрического возбуждения. Пользуясь зависимостями вида (3.8), легко показать, что минимумы z_1, z_2, z_3 и т. д. составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна $\ln[(1 - \mu)/(1 + \mu)]$.

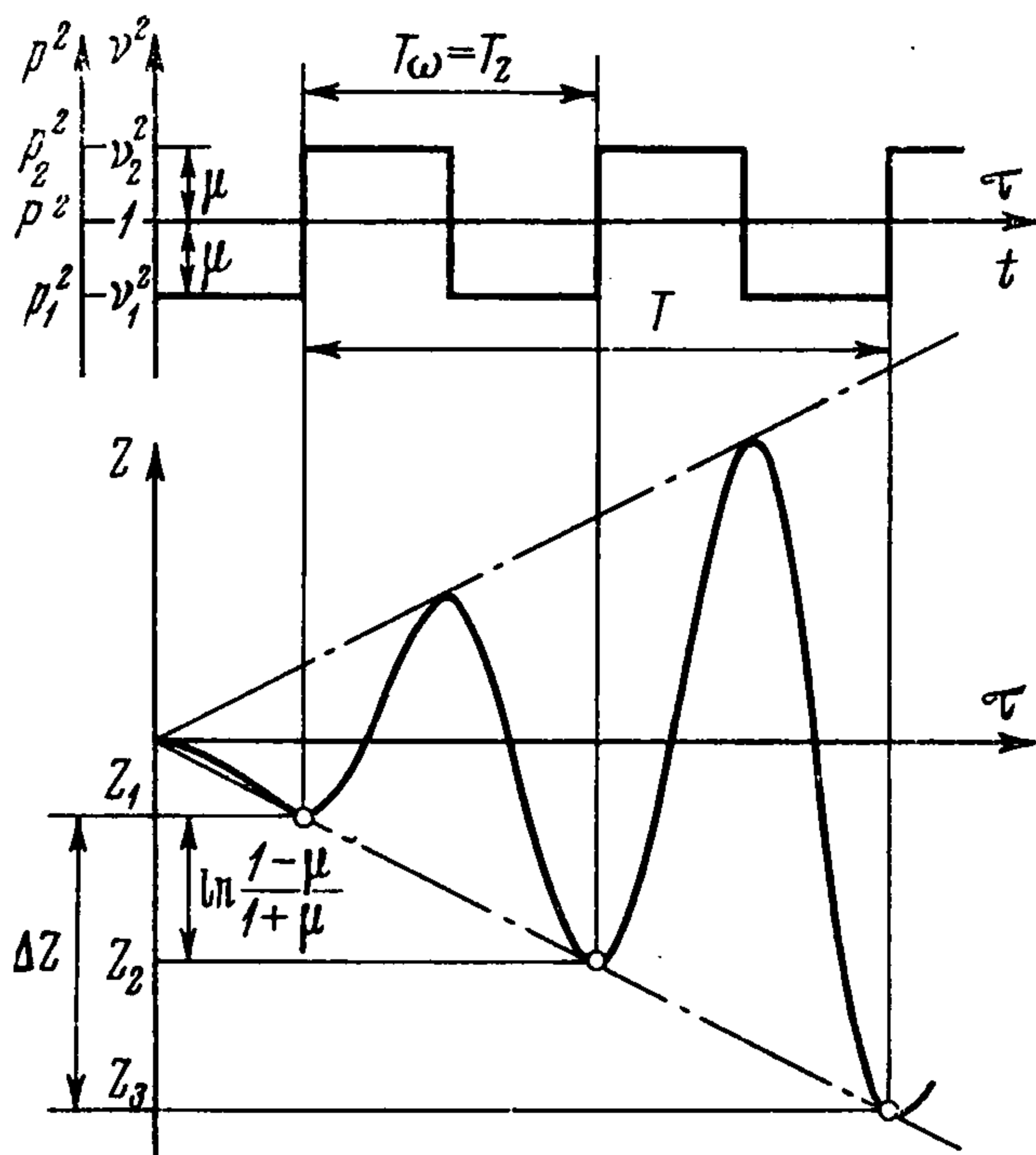
Если учесть, что в рассматриваемом

случае между усредненным периодом собственных колебаний $T = 2\pi/p_*$, периодом колебаний условного осциллятора T_z и периодом прямоугольного синуса T_ω имеет место соотношение $T = 2T_z = 2T_\omega$ (см. § 2), то $\Delta z = 2 \ln[(1 - \mu)/(1 + \mu)]$. После подстановки Δz в условие (3.5) получаем

$$\lambda = \int_0^T n(t) dt > \left| \ln \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right| \quad (3.9)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь λ — усредненное за период значение логарифмического декремента.

Можно показать, что аналогичные условия, вызывающие раскачку z , возникают не только в рассмотренном случае, но и при $T_\omega = jT_z = 0.5jT$, где $j = 1, 3, 5, \dots$. При этом условию (3.9) можно придать более общий вид

$$\lambda > \frac{1}{j} \left| \ln \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right| = \frac{2}{j} \left(\mu + \frac{\mu^3}{3} + \frac{\mu^5}{5} + \dots \right) \quad (3.10)$$

Критические частоты $\omega = 2\pi / T_\omega$, соответствующие главным параметрическим резонансам, располагаются около значений $2p_* / j$. Если при $j = 1$ ограничиться в (3.10) первым членом ряда, то полученный результат также совпадает с приближенным условием, полученным при анализе определителя Хилла [1].

§ 4. Пусть на отрезке $(0, t_*)$ имеет место монотонное изменение $p^2(t)$ (p_0^2, p_1^2). Зададим частное решение уравнения (1.8) в виде некоторого семейства функций $Z(t, \beta_1, \dots, \beta_n)$, где β_i — свободные параметры. После подстановки Z в (1.8) получаем

$$P^2(t, \beta_1, \dots, \beta_n) = 0.5(Z'' - 0.5Z^2 + 2\Omega_*^2 e^{2Z}) \quad (4.1)$$

Дифференциальное уравнение¹

$$Y'' + P^2(t, \beta_1, \dots, \beta_n) Y = Q(t) \quad (4.2)$$

имеет точное решение, определяемое из (1.10), (1.11) при подстановке $z = Z$.

Таким образом, задача сводится к выбору параметров β_i , при которых обеспечивается достаточная «близость» функций $p^2(t)$ и $P^2(t)$; при этом для определения β_i могут быть использованы некоторые дополнительные условия, например, условия на границах промежутка $(0, t_*)$, условия квадратичного приближения и т. п. В последнем случае должны удовлетворяться условия следующего вида

$$\int_0^{t_*} p^2 \frac{\partial P^2}{\partial \beta_i} dt = \int_0^{t_*} P^2 \frac{\partial P^2}{\partial \beta_i} dt \quad (i = 1, \dots, l), \quad (4.3)$$

Здесь l — число независимых параметров β_i .

Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$p^2 = p_0^2 + (p_1^2 - p_0^2) t / t_* \quad \text{при } p_0^2 = 0.5 \text{ сек}^{-2}, p_1^2 = 1 \text{ сек}^{-2}, t_* = \pi \text{ сек.}$$

Функцию Z будем искать среди следующего семейства:

$$Z = \ln(\beta_1 p_0 t + 1) + \beta_2 p_0 t + Z_0 \quad (4.4)$$

Задаваясь условиями $p(0) = P(0)$, $p(t_*) = P(t_*)$ и одним условием вида (4.3) при учете (4.1) и (4.4), находим

$$\Omega = p_0 \sigma e^{Z - Z_0} = p_0 \sigma (\beta_1 p_0 t + 1), \quad \Phi = \int_0^t \Omega dt = p_0 \sigma t (0.5 \beta_1 p_0 t + 1) \quad (4.5)$$

$$\left(\sigma = \frac{\Omega_*}{p_0} e^{Z_0} = \sqrt{1 + 0.75 \beta_1^2}, \quad \beta_1 = 0.0704, \quad \beta_2 \approx 0 \right)$$

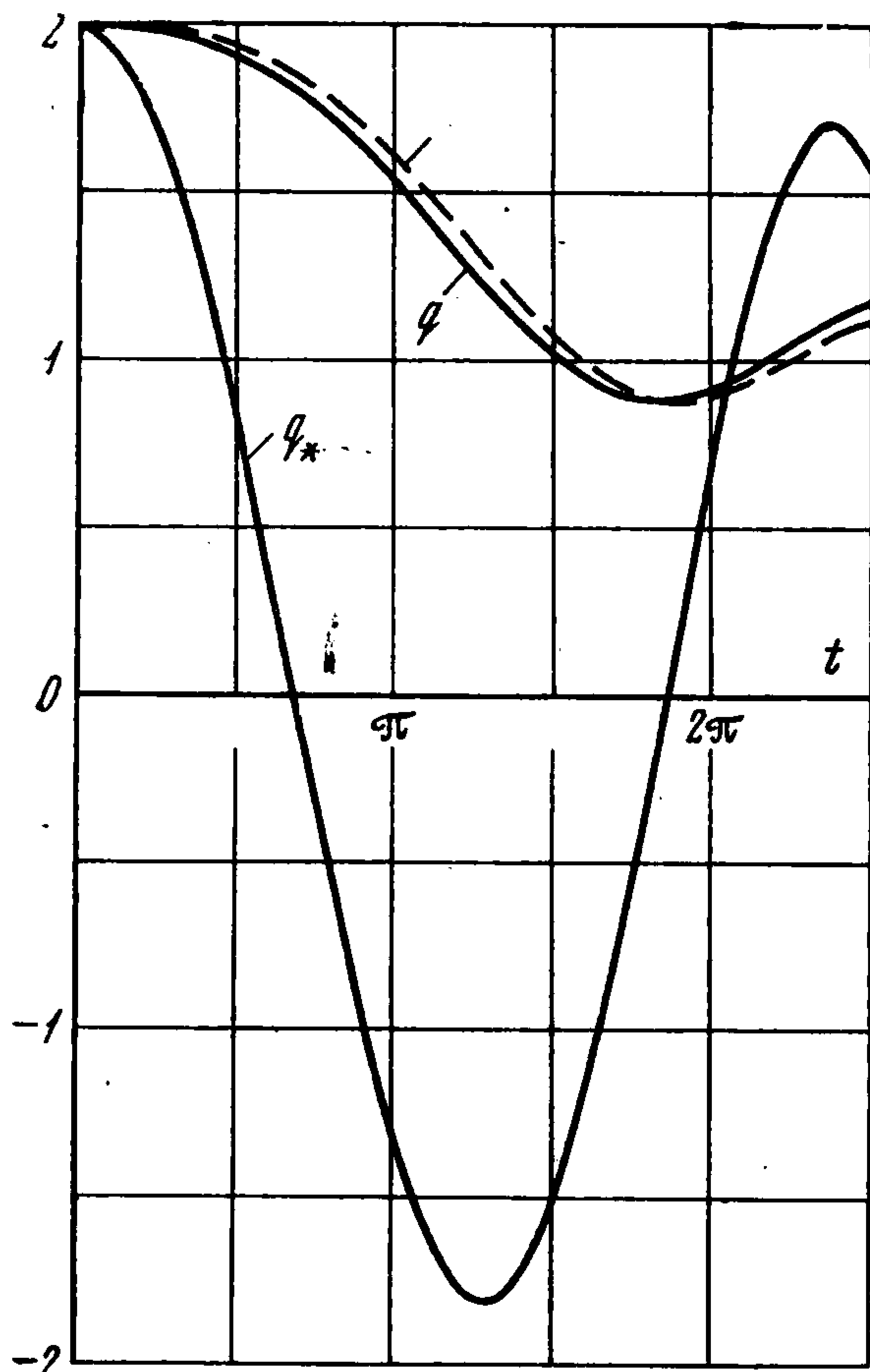
На фиг. 5 приведены графики свободных колебаний и общего решения при $q_0 = 2$, $q_0^* = 0$, $Q = 1 \text{ сек}^{-2}$, $n = 0$; на фигуре кривые q_* и q^0 совпадают; кривая q показана сплошной линией, соответствующая ей кривая q^0 показана штриховой.

Сопоставляются приближенные решения однородного и неоднородного уравнений (q_* , q^0), определяемые зависимостями (1.10), (1.11), (4.5), (2.5), с решениями, найденными методом численного интегрирования (1.1) при помощи ЭВМ (q_* , q). При этом графики свободных колебаний, полученные на базе обоих методов, практически совпадают; в вынужденных колебаниях имеют место незначительные расхождения.

¹ Заметим, что однородное уравнение, отвечающее (4.2), при учете (4.1) оказывается модификацией родственного уравнения Бесселя [8].

$$y'' + \left[\frac{1}{2} \frac{\Phi'''}{\Phi'} - \frac{3}{4} \left(\frac{\Phi''}{\Phi'} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} - m^2 \right) \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 + \Phi^2 \right] y = 0 \quad (m = 1/2)$$

Заметим, что полученное приближенное решение в случае необходимости может



Фиг. 5

уточняться известными методами, например, при помощи рекуррентных зависимостей, построенных на базе интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода [8] или используя метод малого параметра.

§ 5. Рассматриваются колебания, описываемые системой однородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\| a_{ij}(t) \| \{ y_i'' \} + \| c_{ij}(t) \| \{ y_i \} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, s) \quad (5.1)$$

где $\| a_{ij}(t) \|$, $\| c_{ij}(t) \|$ — матрицы инерционных и упругих коэффициентов, s — число степеней свободы.

Предполагается, что при любом t формальное частотное уравнение, полученное при «замороженных» коэффициентах, имеет s простых положительных корней. Решение y_i ищется как

$$y_i = \sum_{r=1}^s B_{ir}(t) \cos \Phi_r(t) \quad (5.2)$$

Удовлетворяя условиям вида (1.5), можем записать

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{r=1}^s A_{ir} \left(\frac{\Omega_r(0)}{\Omega_r(t)} \right)^{1/2} \cos \left[\int_0^t \Omega_r(t) dt + \gamma_r \right] = \\ &= A_{ii} \sum_{r=1}^s \alpha_{ir}(t) \left(\frac{\Omega_r(0)}{\Omega_r(t)} \right)^{1/2} \cos \left[\int_0^t \Omega_r(t) dt + \gamma_r \right] \quad \left(\alpha_{ir} = \frac{A_{ir}}{A_{rr}} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь функция $\alpha_{ir}(t)$ характеризует переменную форму колебаний.

Если $a_{ij}(t)$ и $c_{ij}(t)$ некоторые кусочно-постоянные функции, то, производя подстановку (5.3) в (5.1) и исключая из рассмотрения тривиальное решение $y_i \equiv 0$, после некоторых преобразований получаем

$$z_r'' - 0.5z_r'^2 + 2\Omega_{*r}^2 e^{2z_r} = 2p_r^2(t) \quad (z_r = \ln(\Omega_r/\Omega_{*r})) \quad (r = 1, \dots, s) \quad (5.4)$$

где Ω_{*r} — произвольный параметр.

Функция $p_r^2(t)$ определяется как корень уравнения

$$\det \| c_{ij}(t) - a_{ij}(t) p^2(t) p^2 \| = 0 \quad (5.5)$$

Аналогичным образом в первом приближении связаны $\Omega_r(t)$ и $p_r(t)$ и в более широком классе задач, если

$$\left| \frac{\alpha_{ir}'}{\alpha_{ir} p_r} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\alpha_{ir}''}{\alpha_{ir} p_r^2} \right| \ll 1 \quad (5.6)$$

Этот распространенный в приложениях случай имеет место, когда функции $\alpha_{ir}(t)$ будут медленно меняющимися или имеют малую глубину пульсации.

Уравнение (5.4) совпадает по форме с (1.8) и отвечает s независимым условным осцилляторам, которые различаются лишь «возмущениями». Поэтому при оговоренных ограничениях ряд результатов, приведенных в § 2, 3, могут быть использованы при анализе системы (5.1).

Поступила 3 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
2. Михайлов Ф. А. и др. Динамика нестационарных линейных систем. М., «Наука», 1967.
3. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.
4. Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ-приближение. М., «Мир», 1967.
5. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Нелинейные задачи динамики машин. Л., «Машиностроение», 1968.
6. Рапорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев, Изд-во АН УССР, 1954.
7. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. 3. М., «Наука», 1965.

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ В АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Исследуется автономная система с вращающейся фазой и отклоняющимся аргументом. Строится схема последовательных приближений для точного решения на бесконечном промежутке времени и выводятся достаточные условия существования установившегося решения. К исследованию таких систем приводят многие задачи теории нелинейных вращательно-колебательных движений в системах с мало изменяющимися параметрами.

Строятся стационарные, т. е. установившиеся решения вещественной системы вида

$$\begin{aligned} dE/dt &= \varepsilon f(E, E_\tau, \psi, \psi_\tau, \varepsilon) & (E_\tau &= E(t - \tau)) \\ d\psi/dt &= \omega(E, E_\tau) + \varepsilon F(E, E_\tau, \psi, \psi_\tau, \varepsilon) & (\psi_\tau &= \psi(t - \tau)) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $t \in (-\infty, \infty)$ — время, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, E — векторная переменная, значения которой принадлежат некоторой окрестности точки E_0^* , $\psi \in (-\infty, \infty)$ — скалярная фаза, $\tau \in (-\infty, \infty)$ — постоянная.

Для построения решения используется метод последовательных приближений [1] и тот факт, что если система (1) для всех t имеет решение $E(t)$, $\psi(t)$, то она также допускает семейство решений $E(t + \theta)$, $\psi(t + \theta)$ (θ — произвольная постоянная). Следовательно, значение фазы ψ в некоторый момент t_0 может быть зафиксировано, в частности, его можно положить для упрощения выкладок равным нулю. Во избежании вековых членов в системе (1) вводится новая независимая переменная s так, чтобы

$$t - t_0 = s(1 + \varepsilon h), \quad \tau = \varphi(1 + \varepsilon h)$$

В результате получается система

$$\begin{aligned} dE/ds &= \varepsilon(1 + \varepsilon h) f(E, E_\varphi, \psi, \psi_\varphi, \varepsilon) \\ d\psi/ds &= (1 + \varepsilon h) [\omega(E, E_\varphi) + \varepsilon F(E, E_\varphi, \psi, \psi_\varphi, \varepsilon)] \end{aligned}$$

Здесь h — некоторая неизвестная, которая выбирается таким образом, чтобы решение возмущенной системы по s имело «невозмущенный» период T_0 .

Предполагая, что функции f , ω допускают частные производные по всем аргументам, удовлетворяющие вместе с F условиям Липшица в указанной выше области, и со-