исчезает при дальнейшем увеличении параметра r. Неустойчивый однооборотный предельный цикл расположен на листе Мебиуса и поэтому не разделяет фазовое пространство на части, из которых изображающие точки идут к различным элементам притяжения. Области (*1*) соответствует фазовое пространство, в котором все траектории скручиваются к отрезку покоя.

Приводим значения r, соответствующие сечениям поверхностей $\{\alpha_2\}$ и $\{\alpha_3\}$ плоскостями $a = 2$ и $d = 0.2$, просчитанные соответственно по уравнениям (3.1) и (3.2) для некоторых значений b

$b =$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.60	
$r =$	0.0203	0.0398	0.0669	0.0847	0.0972	0.1138	$\{\alpha_2\}$
$r =$	0.0211	0.0402	0.0668	0.0843	0·0967	0.1134	$\{\alpha_3\}$

В заключение автор благодарит Н. Н. Баутина за многочисленные советы и обсуждения.

Поступила 20 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Шполянский В. А., Курицкий А. М. Спусковые регуляторы приборов времени. М., Машгиз, 1963.
2. Шполянский В. А., Чернягин Б. М. Электрические приборы времени. М., «Машиностроение», 1964.
3. Фуфаев Н. А. Теория электромагнитного прерывателя. Сб. «Памяти А. А. Андронова», М., Изд-во АН СССР, 1955.
4. Комраз Л. А. Динамическая модель спускового регулятора с магнито-электрическим приводом. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
5. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. вузов, Радиофизика, 1958, т. 1, № 2.
6. Комраз Л. А. О бифуркациях неподвижных точек точечного преобразования, при которых корень характеристического полинома переходит через значение $\lambda = -1$. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.

ВОЗМУЩЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ВВЕДЕНИИ ДЕМПФИРОВАНИЯ

А. Г. Рамм

(Ленинград)

Известно, что при введении демпфирования комплексные собственные частоты $p_n = i\omega_n$ колебательной системы принимают вид $p_n' = -\alpha_n + i\omega_n'$, $\alpha_n \geqslant 0$. Можно показать, что при этом мнимая часть комплексной частоты при некотором условии изменяется так:

$$\omega_N' \leqslant \omega_N \text{ при } \omega_N > 0, \quad \omega_N' \geqslant \omega_N \text{ при } \omega_N < 0$$
$$|\omega_N| = \max_n |\omega_n| \tag{1}$$

Доказательство неравенств (1) следует из леммы.

Лемма. Пусть $A > 0$, $B \geqslant 0$, $R \geqslant 0$ — самосопряженные матрицы размером $n \times n$, причем выполнено условие

$$(Rx, x)^2 < 4 (Ax, x) (Bx, x)$$

(слабое демпфирование). Обозначим через $p_n = i\omega_n$ корни уравнения

$$\det (p^2 A + B) = 0 \tag{2}$$

через p_n' — корни уравнения

$$\det (p^2A + pR + B) = 0 \qquad (3)$$

Пусть $|p_N| = \max_n \ |p_n|$. Тогда $p_N' = -\alpha_N' + i\omega_N'$, причем $\alpha_N' \geqslant 0$ и выполнены неравенства (1). Через p_N' здесь обозначен тот корень уравнения (3), для которого $|\omega_N'| = \max_n |\omega_N'|$.

Доказательство. Пусть x_N' — собственный вектор, отвечающий собственному числу p_n', т. е.

$$(p_N'^2A + p_N'R + B)x_{N'} = 0 \qquad (4)$$

Тогда

$$p_N'^2 (Ax_N', x_N') + p_N' (Rx_N', x_N') + (Bx_N', x_N') = 0$$

Отсюда

$$p_N' = \frac{-(Rx_N', x_N') \pm i\sqrt{4(Bx_N', x_N')(Ax_N', x_N') - (Rx_N', x_N')^2}}{2(Ax_N', x_N')} \qquad (5)$$

Так как $R \geqslant 0$, $A > 0$, то $\alpha_N' \geqslant 0$. Далее

$$\omega_N' = \left(\frac{(Bx_N', x_N')}{(Ax_N', x'_N)} - \frac{(Rx_N', x_N')^2}{4(Ax_N', x_N')^2}\right)^{1/2} \qquad (6)$$

Из минимаксимального принципа следует, что

$$\omega_N^2 = \sup_x \frac{(Bx, x)}{(Ax, x)} \geqslant \frac{(Bx_N', x_N')}{(Ax_N', x_N')} \quad (\omega_N^2 = \max_n \omega_n^2). \qquad (7)$$

Из (7) и (6) следуют неравенства (1). Из уравнения движения

$$Au'' + Ru' + Bu = 0 \qquad (8)$$

подстановкой $u = e^{pt}x$, где x не зависит от t, получается уравнение

$$p^2 Ax + pRx + Bx = 0 \qquad (9)$$

Собственные частоты этого уравнения находятся из соотношения (3), поэтому из леммы вытекают неравенства (1).

Замечание 1. Как видно из доказательства леммы, условие $R \geqslant 0$ используется лишь для доказательства неравенства $\alpha_n' \geqslant 0$. Неравенства (1) будут иметь место при любом R, удовлетворяющем условию слабого демпфирования, сохраняющем колебательный характер процесса, так как в (6) участвует лишь квадрат формы (Rx_N', x_N').

Неравенства, аналогичные (1), верны и для непрерывных систем. Рассмотрим, например, уравнение колебаний упругой струны конечной длины. В этом случае уравнение движения имеет вид

$$u_{tt} + Ru_t + Bu = 0 \qquad (10)$$

где B — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, l)$, R — линейный оператор, описывающий трение.

Например, если струна, закрепленная на концах, колеблется в вязкой среде, то R — оператор умножения на положительную, постоянную, $B = -c^2(d^2(\ldots)/dx^2)$ и как оператор в H определен граничными условиями $u(0) = u(l) = 0$.

Время рассматривается как параметр. Оператор B имеет спектр собственных частот

$$0 < \omega_1^2 \leqslant \omega_2^2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n^2 \leqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \omega_n^2 = \infty$$

Оператор B^{-1} имеет точками спектра величины $\nu_n^2 = \omega_n^{-2}$, так что $\max_n \nu_n{}^2 = \omega_1{}^{-2}$. Оператор B^{-1} будет вполне непрерывным в H, поэтому, если R — ограниченный оператор, оператор $B^{-1}R$ также вполне непрерывен. Если положить $u = e^{pt}v$, где $v \subset H$ не зависит от t, то из уравнения (10) получим

$$(p^2I + pR + B)v = 0. \tag{11}$$

Так как оператор B^{-1} существует и ограничен, то уравнение (11) эквивалентно следующему:

$$p^2B^{-1}v + pB^{-1}Rv + v = 0 \tag{12}$$

Так как операторы B^{-1} и $B^{-1}R$ вполне непрерывны, то спектр уравнения (12) дискретен ([1], стр. 39). При $R = 0$ точки спектра уравнения (12) имеют вид $p_n = i\omega_n$, где $\omega_n{}^2$ — собственные числа оператора B.

Для того чтобы нижеследующие рассуждения были аналогичны приведенным при рассмотрении конечномерного случая, будем называть величины $q = 1/p$ комплексными собственными частотами уравнения (12). Тогда частота $q_1 = (i\omega_1)^{-1} = -i\nu_1$ есть наибольшая по модулю комплексная частота уравнения (12) при $R = 0$. Покажем, что при $R \neq 0$ для возмущенной частоты $q'_1 = -\alpha_1 - i\nu_1'$ имеет место неравенство

$$\nu_1' \leqslant \nu_1 \tag{13}$$

а при $R \geqslant 0$, кроме того, будет $\alpha_1 \geqslant 0$.

Рассуждая, как при доказательстве леммы, из уравнения (11) выводим

$$q^2\,(Bv,\ v) + q\,(Rv,\ v) + (v,\ v) = 0$$

Здесь $(v,\ u)$ — скалярное произведение в H. Отсюда

$$q_1' = -\frac{(Rv,\ v)}{2\,(Bv,\ v)} - i\left(\frac{(v,\ v)}{(Bv,\ v)} - \frac{1}{4}\left|\frac{(Rv,\ v)}{(Bv,\ v)}\right|^2\right)^{1/2} \equiv -\alpha_1 - i\nu_1' \tag{14}$$

Так как

$$\nu_1{}^2 = \max_v \frac{(v,\ v)}{(Bv,\ v)}$$

то $\nu_1' \leqslant \nu_1$.

Если $R \geqslant 0$, то, учитывая, что $(Bv,\ v) > 0$, из определения α_1 получим неравенство $\alpha_1 \geqslant 0$. Предлагаемое утверждение полностью доказано. Отметим, что знак перед корнем в формуле (14) выбран так, чтобы при $R=0$ имело место равенство $q_1' = q_1 = i\nu_1$.

Замечание 2. Приведенными рассуждениями доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть B—положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, имеющий вполне непрерывный обратный оператор B^{-1}. Пусть R — линейный оператор, причем $B^{-1}R$ — вполне непрерывный оператор. Обозначим через $\nu_1{}^2 \geqslant \nu_2{}^2 \geqslant \ldots > 0$ собственные числа оператора B^{-1}. Тогда мнимая часть любого собственного числа оператора $q^2B + qR + I$ не больше ν_1, а если оператор R неотрицателен, то вещественные части собственных чисел оператора $q^2B + qR + I$ неположительны.

Поступила 1 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965.