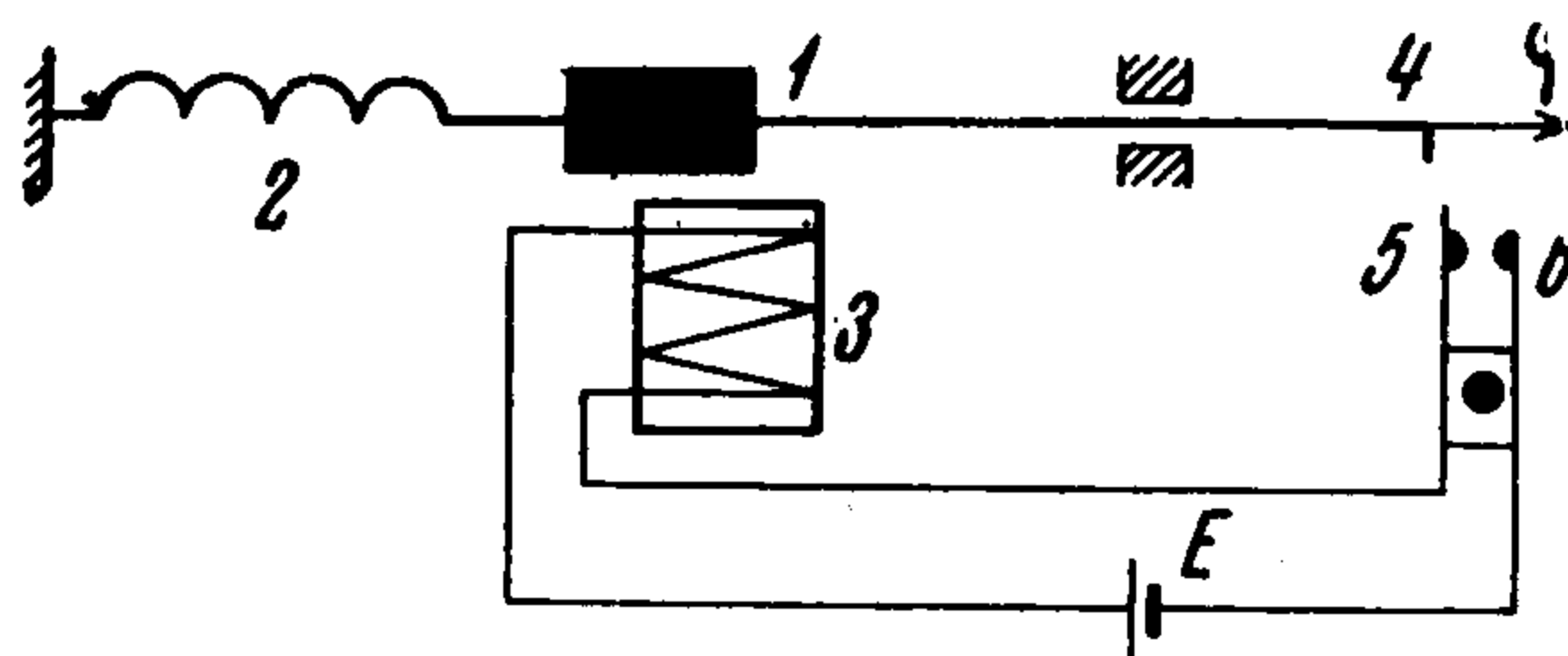


ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СПУСКОВОГО РЕГУЛЯТОРА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПРИВОДОМ

Л. А. Комраз (Горький)

Рассматриваются особенности динамики спускового регулятора с электромагнитным приводом с одним импульсом за период для модели с полутора степенями свободы. Методом точечных преобразований находится разбиение пространства параметров на области, в каждой из которых исследуемая система имеет одну и ту же качественную структуру разбиения фазового пространства на траектории. Выделены области значений параметров, при которых в системе существуют сложные периодические движения.

1. Динамическая модель. Уравнения движения. Для описания движения электро-механических спусковых регуляторов с электромагнитным приводом [1,2] рассмотрим следующую модель. Осциллятор 1 из магнитомягкого материала (фиг. 1) совершает колебательные движения при воздействии линейной восстанавливающей силы, создаваемой пружиной 2, и импульсов, возникающих при взаимодействии осциллятора с импульсной катушкой 3. При движении осциллятора слева направо штифт 4 вблизи от положения статического равновесия входит в соприкосновение с контактной пружиной 5 и, изгибая ее, замыкает электрическую цепь через контакт 6. При взаимодействии магнитного поля импульсной катушки 3 с осциллятором 1 (находящимся в этот момент вблизи импульсной катушки) последний получает механический импульс. При дальнейшем движении осциллятора контактная пружина 5 освобождается из-под штифта 4, электрическая цепь разрывается, и импульс прекращается. При обратном движении осциллятора замыкания электрической цепи не происходит.



Фиг. 1

Введем упрощающие предположения.

1. При разрыве электрической цепи искра отсутствует и сопротивление цепи, равное конечной величине при замкнутой цепи, становится сразу же бесконечным, как только цепь разрывается [3].

2. Диссипация энергии происходит из-за наличия сухого трения (сопротивление контактной пружины не учитывается).

3. Импульс пропорционален квадрату силы тока в электрической цепи [1].

Уравнения движения рассматриваемой динамической системы будут при замкнутой электрической цепи

$$m\ddot{\varphi} + k\varphi = -Q + My_1^2, \quad Ly_1' + Ry_1 = E \quad (1.1)$$

при разомкнутой цепи

$$m\ddot{\varphi} + k\varphi = -Q \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}, \quad y_1 = 0 \quad (1.2)$$

Здесь φ — координата осциллятора, отсчитанная от положения статического равновесия, m — масса осциллятора, k — коэффициент упругости пружины осциллятора, Q — коэффициент сухого трения, My_1^2 — величина импульса, y_1 — сила тока, L — самоиндукция катушки, R — сопротивление цепи, E — электродвижущая сила.

Электрическая цепь замыкается при $\varphi = -\varphi_1$, $\dot{\varphi} \geq 0$, а размыкается при $\varphi = -\varphi_2$, $\dot{\varphi} > 0$ ($\varphi_1 > \varphi_2 > 0$).

Введем новые переменные и параметры (t' — первоначальное время)

$$t = t' \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2}, \quad x = \frac{kR^2}{ME^2} \varphi, \quad y = \frac{R}{E} y_1$$

$$a = \frac{R}{L} \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{kR^2}{ME^2} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad d = \frac{kR^2}{ME^2} \varphi_2, \quad r = \frac{QR^2}{ME^2}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) приведем соответственно к виду

$$x'' + x = -r + y^2, \quad y' + ay = a \quad \text{при } x' \geq 0, \quad |x + b + d| < b \quad (1.3)$$

$$x'' + x = -r \frac{x'}{|x'|}, \quad y = 0 \quad \text{при } \begin{cases} x' \geq 0, & |x + b + d| > b \\ \text{или } x' < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Переход от (1.4) к (1.3) происходит при $x = -2b - d, x' > 0$, а от (1.3) к (1.4) при $x = -d, x' > 0$.

Систему характеризуют четыре существенных параметра a, b, d, r , которые, согласно физическому смыслу входящих в них величин, могут быть лишь неотрицательными. Положим $x = z$ и будем считать x, y, z декартовыми координатами фазового пространства рассматриваемой динамической системы.

2. Сведение задачи к точечным преобразованиям. Фазовое пространство рассматриваемой динамической системы состоит из части плоскости и подшитой к ней трехмерной области. Перемещаясь по плоскости $y = 0$, согласно уравнениям (1.4), изображающая точка в некоторый момент времени приходит на полупрямую $\Gamma_1 (x = -2b - d, y = 0, z > 0)$, имея координату $z = u$. Далее она переходит из этой точки в трехмерную область фазового пространства между плоскостями $x = -2b - d$ и $x = -d$ и движется по траекториям системы (1.3).

Траектории системы (1.3) расположены на изогнутых трубках, сечения которых плоскостями $y = \text{const}$ будут окружности радиуса C_1 . Уравнения трубок имеют вид

$$\left[x - 1 + r + \frac{2(1-y)}{1+a^2} - \frac{(1-y)^2}{1+4a^2} \right]^2 + \left[z - \frac{2a(1-y)}{1+a^2} + \frac{2a(1-y)^2}{1+4a^2} \right]^2 = C_1^2 \quad (2.1)$$

Если изображающая точка, двигаясь по одной из поверхностей (2.1), приходит по траекториям верхнего полупространства на полуплоскость $x = -d, z > 0$ в некоторую точку $x = -d, y > 0, z = v$ (только этот случай рассматривается), то движение изображающей точки доопределяется согласно принятой идеализации: после прихода на плоскость $x = -d$ изображающая точка мгновенно перескакивает вдоль прямой, параллельной оси y , на полупрямую $\Gamma_2 (x = -d, y = 0; z > 0)$. Далее изображающая точка продолжает свое движение из точки с координатой $z = v$ по плоскости $y = 0$, согласно уравнениям (1.4). При этом, если $z = v \geq v_0$, то изображающая точка попадет на полупрямую Γ_1 , если же $z = v < v_0$, то она попадет на отрезок покоя $-r < x < r, y = 0, z = 0$ по траекториям в плоскости $y = 0$ (здесь v_0 — координата точки на прямой Γ_2 , через которую проходит траектория, касающаяся полупрямой Γ_1).

Исследование разбиения фазового пространства на траектории сводится к исследованию точечного преобразования полупрямой Γ_2 самой в себя.

Назовем преобразованием S_1 переход точки полупрямой Γ_1 с координатой $z = u$ по траекториям верхнего полупространства на плоскость $x = -d$ в точку с координатой $z = v$. Преобразованием S_2 назовем мгновенный скачок вдоль плоскости $x = -d$ на Γ_2 . Вводя в качестве параметра время перехода τ , получаем для преобразования $S_1 S_2$ такие выражения:

$$u = \frac{1}{\sin \tau} [2b \cos \tau + (r - d - 1)(1 - \cos \tau) + 2F(a, \tau) - F(2a, \tau)]$$

$$v = \frac{1}{\sin \tau} [2b - (r - d - 1)(1 - \cos \tau) - 2\Phi(a, \tau) + \Phi(2a, \tau)] \quad (2.2)$$

$$F(a, \tau) = \frac{1}{1+a^2} (e^{-a\tau} - \cos \tau + a \sin \tau), \quad \Phi(a, \tau) = \frac{1 - e^{-a\tau} (\cos \tau + a \sin \tau)}{1+a^2}$$

Плоскость

$$r = 2b + d \quad \text{при } b \leq b_0 \equiv 1 - \frac{1 + e^{-a\pi}}{1 + a^2} + \frac{1 + e^{-2a\pi}}{2(1 + 4a^2)}$$

и поверхность

$$r = 1 + b + d - \frac{1 + e^{-a\pi}}{1 + a^2} + \frac{1 + e^{-2a\pi}}{2(1 + 4a^2)} \quad \text{при } b \geq b_0 \quad (2.3)$$

(которые в дальнейшем в совокупности будем называть поверхностью $\{\alpha_1\}$) выделяют в пространстве параметров a, b, d, r рассматриваемую область, для точек которой вся полупрямая Γ_1 преобразуется на плоскость $x = -d$ по траекториям верхнего полупространства (в выражениях (2.2) параметр τ изменяется в пределах $0 < \tau \leq \tau_0 \leq \pi$).

Назовем преобразованием S_3 переход точки полупрямой Γ_2 с координатой $z = v_1$ в точку полупрямой Γ_1 с координатой $z = u$ по траектории системы (1.4). Величины v_1 и u связаны уравнением

$$[v_1^2 + (r - d)^2]^{1/2} - [u^2 + (r - 2b - d)^2]^{1/2} = 4r \quad (2.4)$$

Преобразование S_3 осуществляется в рассматриваемой области при

$$v_1 \geq v_0 \equiv 2[(2r + b)(r + b + d)]^{1/2}$$

Преобразование $T = S_1 S_2 S_3$ осуществляет в указанной области пространства параметров отображение полупрямой Γ_2 самой в себя (переводит v_1 в v). Следуя [4], можно показать, что существуют такие значения параметров, при которых траектории, осуществляющие преобразование T , расположены на листе Мебиуса.

Уравнения (2.2) и (2.4) могут быть записаны в виде

$$v_1 = \varphi(\tau), \quad v = \psi(\tau) \quad (2.5)$$

В окрестности неподвижной точки, определяемой условием $\varphi(\tau^*) = \psi(\tau^*) \equiv v^0$, преобразования T и T^2 могут быть представлены в виде рядов

$$(T) \quad z' = w(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (\lambda \equiv a_1) \quad (2.6)$$

$$(T^2) \quad z'' = w(z') = \lambda^2 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots \quad (2.7)$$

$$z = v_1 - v^0, \quad z' = v - v^0, \quad a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n v}{dv_1^n} \right)_{\tau^*} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Здесь b_n — некоторые многочлены от коэффициентов разложения (2.6).

При переходе в пространстве параметров через поверхность $\{\alpha_2\}$ (определяемую условием $\lambda + 1 = 0$) неподвижная точка преобразования T меняет устойчивость, при этом в зависимости от знака величины $g_0 \neq 0$ (g_0 — коэффициент b_3 , вычисленный при условии $\lambda + 1 = 0$)

$$g_0 = -2(a_3 + a_2^2) \quad (2.8)$$

из нее рождаются или в нее влипают две устойчивые или неустойчивые неподвижные точки преобразования T^2 (см., например, [5]).

3. Особенности фазового пространства. Пространство параметров. Рассмотрим пространство параметров a, b, r ($d = \text{const} > 0$). Поверхности $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$, $\{\alpha_3\}$ и $\{\alpha_4\}$ разбивают пространство параметров на области, в каждой из которых система, описываемая уравнениями (1.3) и (1.4), имеет одну и ту же качественную структуру разбиения фазового пространства на траектории.

Поверхность $\{\alpha_2\}$ задана уравнениями

$$[v^2 + (r - d)^2]^{1/2} - [u^2 + (r - 2b - d)^2]^{1/2} = 4r$$

$$u - 2a [\Phi(a, \tau) - \Phi(2a, \tau)] + \frac{u \{4r + [u^2 + (r - 2b - d)^2]^{1/2}\}}{[u^2 + (r - 2b - d)^2]^{1/2}} = 0 \quad (3.1)$$

где u и v из (2.2)

Поверхность $\{\alpha_3\}$ (определяемая условием прохождения двухоборотного предельного цикла через точку $z = v_0$ полупрямой Γ_2) задана уравнением

$$[v^2(\tau_1) + (r - d)^2]^{1/2} - [u^2(\tau_2) + (r - d - 2b)^2]^{1/2} = 4r \quad (3.2)$$

Здесь

$$u(\tau_2) = \frac{1}{\sin \tau_2} [2b \cos \tau_2 + (r - d - 1)(1 - \cos \tau_2) + 2F(a, \tau_2) - F(2a, \tau_2)]$$

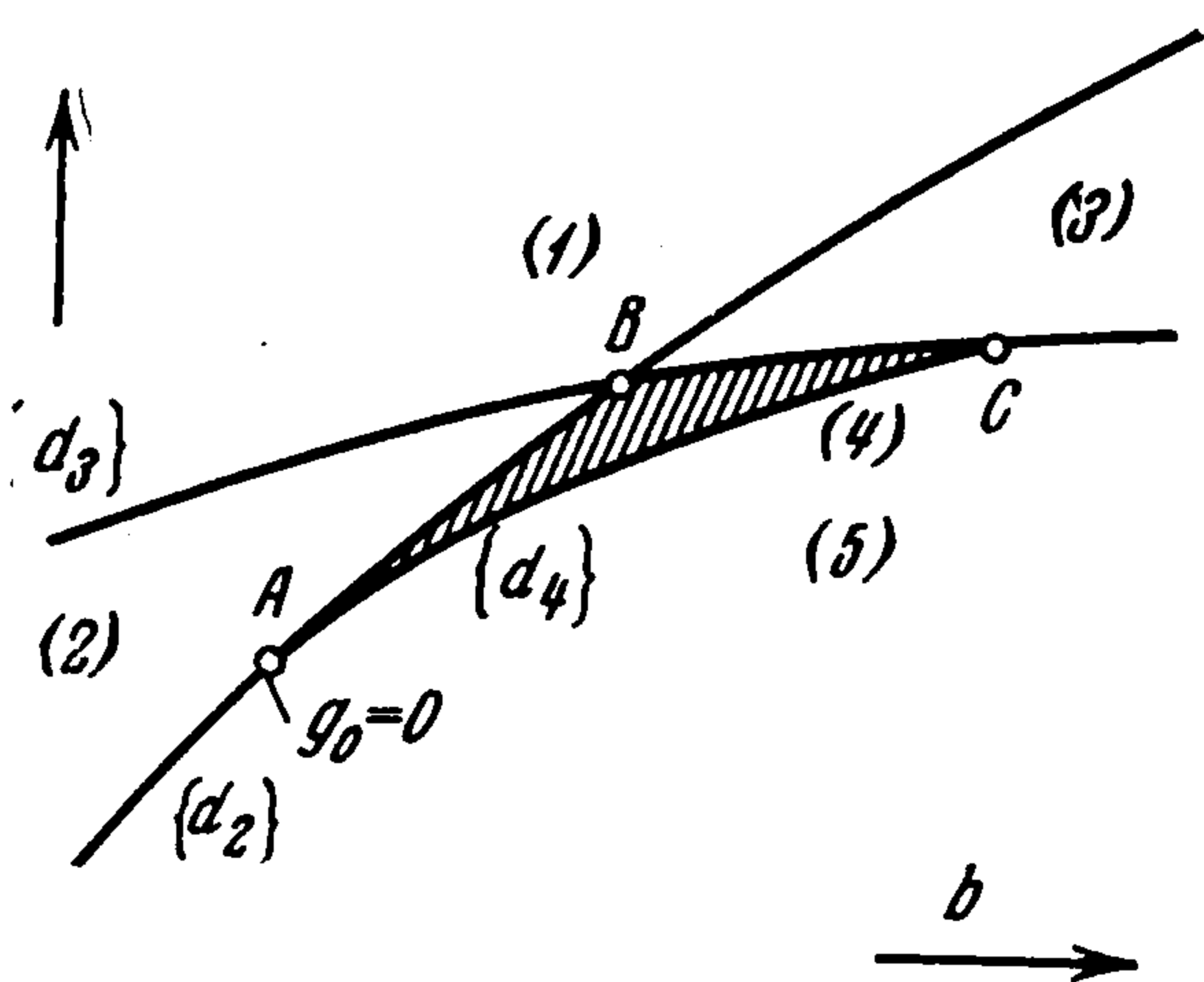
$$v(\tau_1) = \frac{1}{\sin \tau_1} [2b - (r - d - 1)(1 - \cos \tau_1) - 2\Phi(a, \tau_1) + \Phi(2a, \tau_1)]$$

а τ_1 и τ_2 — соответственно корни уравнений

$$2b \cos \tau_1 + (r - d - 1)(1 - \cos \tau_1) + 2F(a, \tau_1) - F(2a, \tau_1) = 0$$

$$2b - (r - d - 1)(1 - \cos \tau_2) - 2\Phi(a, \tau_2) + \Phi(2a, \tau_2) = v_0 \sin \tau_2$$

Как показывают вычисления, на поверхности $\{\alpha_2\}$ существует кривая, в точках которой величина g_0 обращается в нуль. Особенности поведения системы вблизи указанной кривой существенно зависят от знака величины h_0 (h_0 — коэффициент b_5 в (2.7), вычисленный при условиях $\lambda + 1 = 0$, $g_0 = 0$). В зависимости от знака величин g_0 и h_0 в окрестности простой неподвижной точки преобразования T могут существовать одна или две пары неподвижных точек преобразования T^2 (устойчивых или неустойчивых двухоборотных предельных циклов в фазовом пространстве). Существует бифуркационная поверхность (обозначим ее $\{\alpha_4\}$), на которой две пары неподвижных точек преобразования T^2 сливаются и исчезают [6]. Поверхность $\{\alpha_4\}$ выходит из кривой, определяемой условиями $\lambda + 1 = 0$ и $g_0 = 0$.



Фиг. 2

но построить из условия слияния двух двухоборотных предельных циклов. Для значений параметров $a = 2$, $d = 0.2$ эта поверхность просчитана на машине БЭСМ-3М. На фиг. 2 представлена качественная картина расположения сечений бифуркационных поверхностей $\{\alpha_2\}$, $\{\alpha_3\}$, $\{\alpha_4\}$, выделяющих заштрихованную область (4). Здесь в таблице приведены координаты точек пересечения указанных бифуркационных поверхностей

	A	B	C
b	0.16445	0.16512	0.16572
r	0.058694	0.058860	0.059010

Приводим также ширину Δr этой области 4 для различных значений b

$b =$	0.16445	0.16465	0.16485	0.16505	0.16525	0.16545	0.16565
$\Delta r =$	0	$9.7 \cdot 10^{-8}$	$33.5 \cdot 10^{-8}$	$73.7 \cdot 10^{-8}$	$64.8 \cdot 10^{-8}$	$27.2 \cdot 10^{-8}$	$6.8 \cdot 10^{-8}$

Тонкая область (4), примыкающая к точке B (к точке пересечения бифуркационных поверхностей $\{\alpha_2\}$ и $\{\alpha_3\}$), может отсутствовать лишь в случае, если для значений параметров, соответствующих точке B, в выражении (2.7) будет $b_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots$). В зависимости от знака величины h_0 область (4) располагается [6] «ниже» или «выше» точки B. Для значений параметров $a = 2$, $d = 0.2$ осуществляется бифуркация, соответствующая случаю $h_0 < 0$.

Области (4) соответствует фазовое пространство с тремя предельными циклами: устойчивым однооборотным, устойчивым двухоборотным и неустойчивым двухоборотным, расположенными на листе Мебиуса. На фиг. 3 изображены проекции циклов на плоскость xz . Перекручивание листа Мебиуса происходит в зоне импульса

$$-2b - d \leq x < -d, 0 \leq y < 1, z > 0.$$

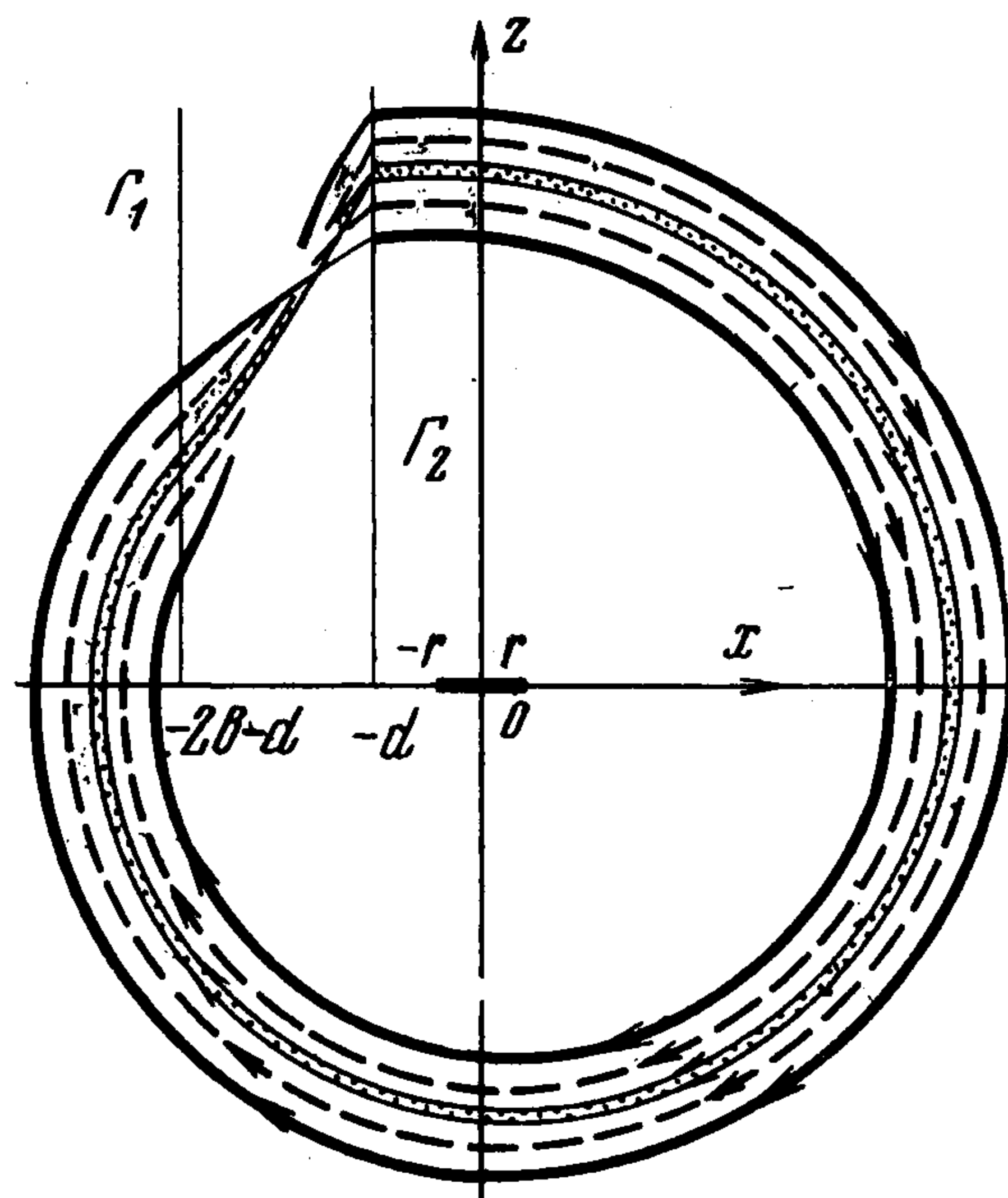
Пунктиром изображен неустойчивый двухоборотный предельный цикл.

Область, расположенную ниже поверхности $\{\alpha_1\}$ и выше поверхностей $\{\alpha_2\}$ и $\{\alpha_3\}$, назовем областью (1); область, расположенную выше поверхности $\{\alpha_2\}$ и ниже поверхности $\{\alpha_3\}$, назовем областью (2); область, расположенную ниже поверхности $\{\alpha_2\}$ и выше поверхности $\{\alpha_3\}$, назовем областью (3); область, расположенную ниже поверхностей $\{\alpha_2\}$, $\{\alpha_3\}$ и $\{\alpha_4\}$, назовем областью (5).

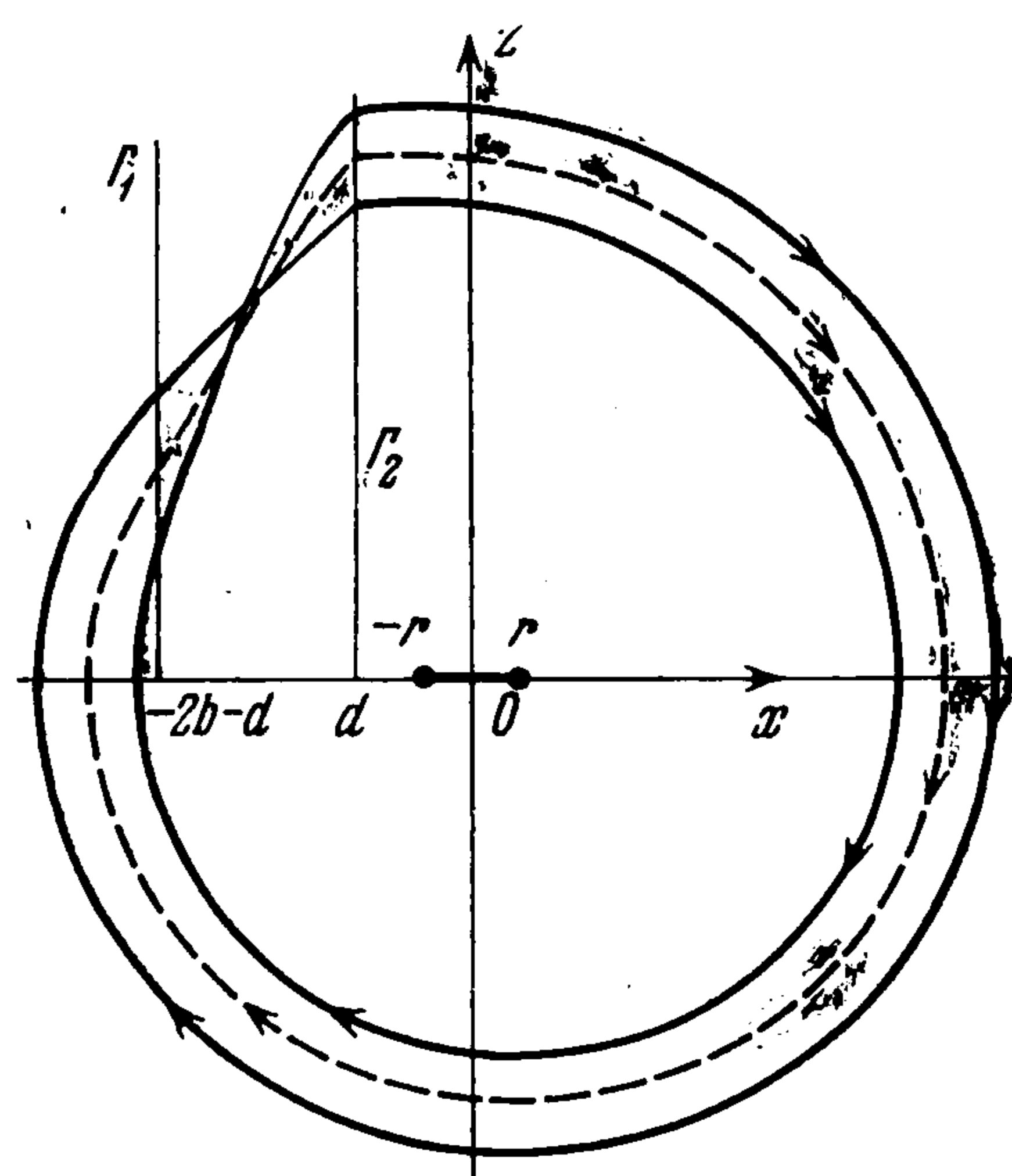
Области (5) соответствует фазовое пространство, в котором существует устойчивый однооборотный предельный цикл.

При переходе в пространстве параметров через поверхность $\{\alpha_2\}$ в область (2) в фазовом пространстве однооборотный предельный цикл меняет устойчивость; при этом при переходе из области (5) в область (2) из него рождается двухоборотный устойчивый предельный цикл, а при переходе из области (4) в область (2) в него влипают неустойчивый двухоборотный предельный цикл. Для области (2) в фазовом пространстве существует устойчивый двухоборотный и неустойчивый однооборотный предельные циклы (фиг. 4).

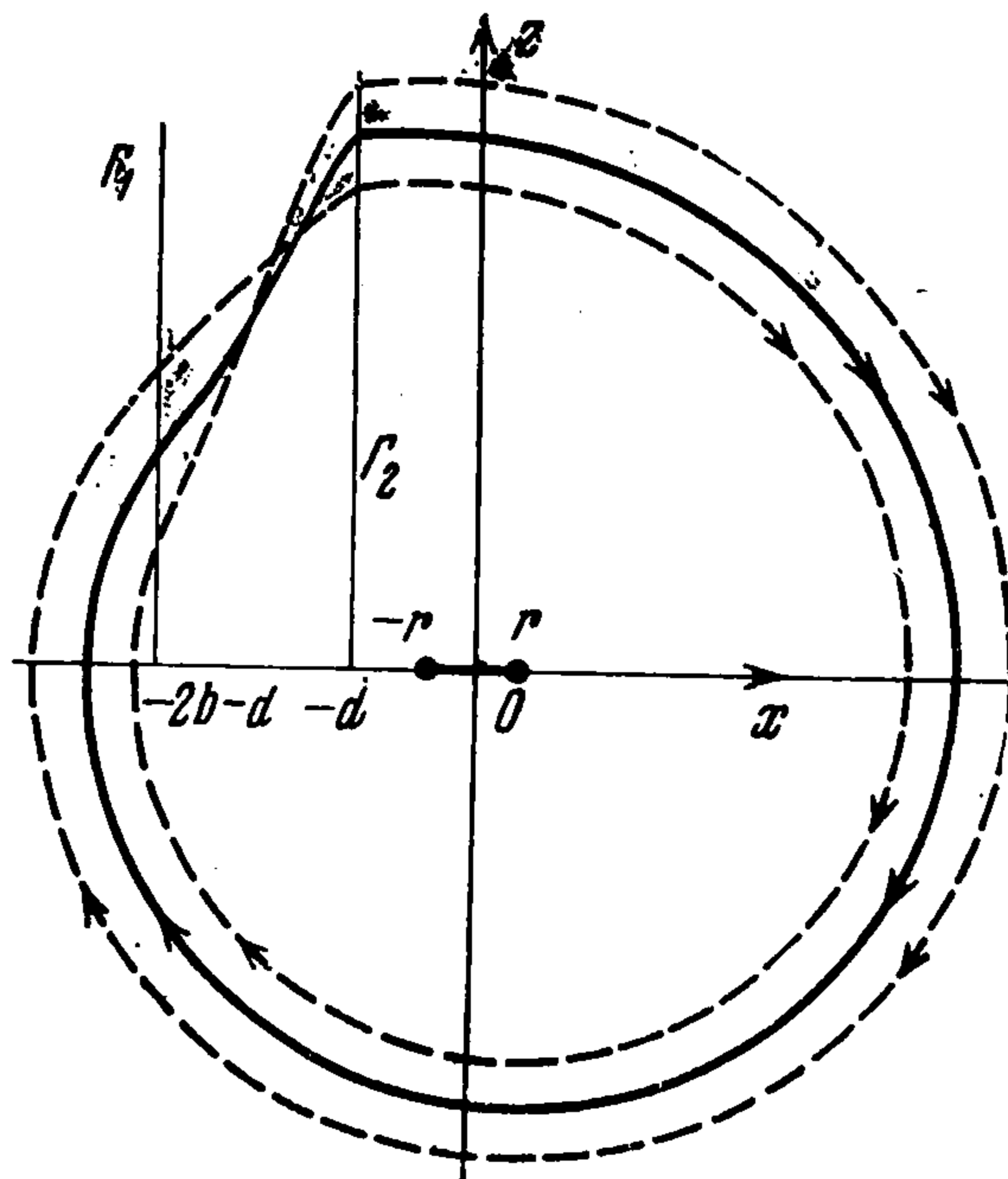
При переходе в пространстве параметров через поверхность $\{\alpha_3\}$ из области (4) в область (3) в фазовом пространстве исчезает двухоборотный устойчивый предельный цикл. При переходе из области (5) в область (3) в фазовом пространстве из этой границы рождается двухоборотный неустойчивый предельный цикл. Для области (3) в фазовом пространстве существует неустойчивый двухоборотный и устойчивый однооборотный предельные циклы (фиг. 5).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

При переходе в пространстве параметров из области (2) в область (1) на поверхности $\{\alpha_3\}$ исчезает (влипают в границу области притяжения отрезка покоя) двухоборотный устойчивый предельный цикл, а при переходе из области (3) в область (1) на поверхности $\{\alpha_2\}$ неустойчивый двухоборотный предельный цикл сливается с однооборотным устойчивым предельным циклом. В области (1) вблизи поверхностей $\{\alpha_2\}$ и $\{\alpha_3\}$ в фазовом пространстве существует неустойчивый однооборотный предельный цикл, который

исчезает при дальнейшем увеличении параметра r . Неустойчивый однооборотный предельный цикл расположен на листе Мебиуса и поэтому не разделяет фазовое пространство на части, из которых изображающие точки идут к различным элементам притяжения. Область (1) соответствует фазовое пространство, в котором все траектории скручиваются к отрезку покоя.

Приводим значения r , соответствующие сечениям поверхностей $\{\alpha_2\}$ и $\{\alpha_3\}$ плоскостями $a = 2$ и $d = 0.2$, просчитанные соответственно по уравнениям (3.1) и (3.2) для некоторых значений b

$b = 0.05$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.60	
$r = 0.0203$	0.0398	0.0669	0.0847	0.0972	0.1138	$\{\alpha_2\}$
$r = 0.0211$	0.0402	0.0668	0.0843	0.0967	0.1134	$\{\alpha_3\}$

В заключение автор благодарит Н. Н. Баутина за многочисленные советы и обсуждения.

Поступила 20 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш полянский В. А., Курецкий А. М. Спусковые регуляторы приборов времени. М., Машгиз, 1963.
2. Ш полянский В. А., Чернягин Б. М. Электрические приборы времени. М., «Машиностроение», 1964.
3. Фуфаев Н. А. Теория электромагнитного прерывателя. Сб. «Памяти А. А. Андропова», М., Изд-во АН СССР, 1955.
4. Комраз Л. А. Динамическая модель спускового регулятора с магнито-электрическим приводом. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
5. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. вузов, Радиофизика, 1958, т. 1, № 2.
6. Комраз Л. А. О бифуркациях неподвижных точек точечного преобразования, при которых корень характеристического полинома переходит через значение $\lambda = -1$. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.

ВОЗМУЩЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ВВЕДЕНИИ ДЕМПФИРОВАНИЯ

А. Г. Рамм

(Ленинград)

Известно, что при введении демпфирования комплексные собственные частоты $p_n = i\omega_n$ колебательной системы принимают вид $p_n' = -\alpha_n + i\omega_n'$, $\alpha_n \geq 0$. Можно показать, что при этом мнимая часть комплексной частоты при некотором условии изменяется так:

$$\omega_N' \leq \omega_N \text{ при } \omega_N > 0, \quad \omega_N' \geq \omega_N \text{ при } \omega_N < 0$$

$$|\omega_N| = \max_n |\omega_n| \tag{1}$$

Доказательство неравенств (1) следует из леммы.

Лемма. Пусть $A > 0$, $B \geq 0$, $R \geq 0$ — самосопряженные матрицы размером $n \times n$, причем выполнено условие

$$(Rx, x)^2 \leq 4(Ax, x)(Bx, x)$$

(слабое демпфирование). Обозначим через $p_n = i\omega_n$ корни уравнения

$$\det(p^2 A + B) = 0 \tag{2}$$