

СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ОБОЛОЧКАХ И ПЛАСТИНАХ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПРИБЛИЖЕННЫМ ТЕОРИЯМ¹

У. К. Нигул

(Таллин)

Рассматриваются на основе линейной теории переходные процессы распространения волн деформации в упругих оболочках и пластинах, вызванные воздействием (приложением нагрузки, сообщением перемещений или скоростей), растущим до максимального значения или оказывающим влияние в интервале времени, который меньше времени пробега волнами деформации пути, равного характерному размеру срединной поверхности. Дается краткий обзор результатов, полученных в последнее время, и выявляются области обоснованной и эффективной применимости методов интегрирования уравнений линейной теории упругости, приближенных уравнений и методов интегрирования приближенных уравнений. Эти области зависят от типа воздействия и от закона изменения воздействия по времени.

1. Введение. Будем рассматривать переходные процессы деформации оболочек и пластин в рамках линейной теории упругости.

По теории упругости область приложения воздействия выступает в качестве источника первичных элементарных волн, которые, отражаясь от боковых поверхностей, приводят к появлению сложной системы элементарных волн. Полное раздельное описание быстро увеличивающегося количества элементарных волн практически невозможно. Поэтому в теоретических исследованиях нашли развитие два направления, соответствующие следующим целям: а) определению расположения и интенсивности фронтов элементарных волн, б) аппроксимации суммарного вклада элементарных волн сглаживанием всех или почти всех фронтов элементарных волн. К последнему следует отнести все методы анализа переходных процессов на базе приближенных теорий оболочек и пластин.

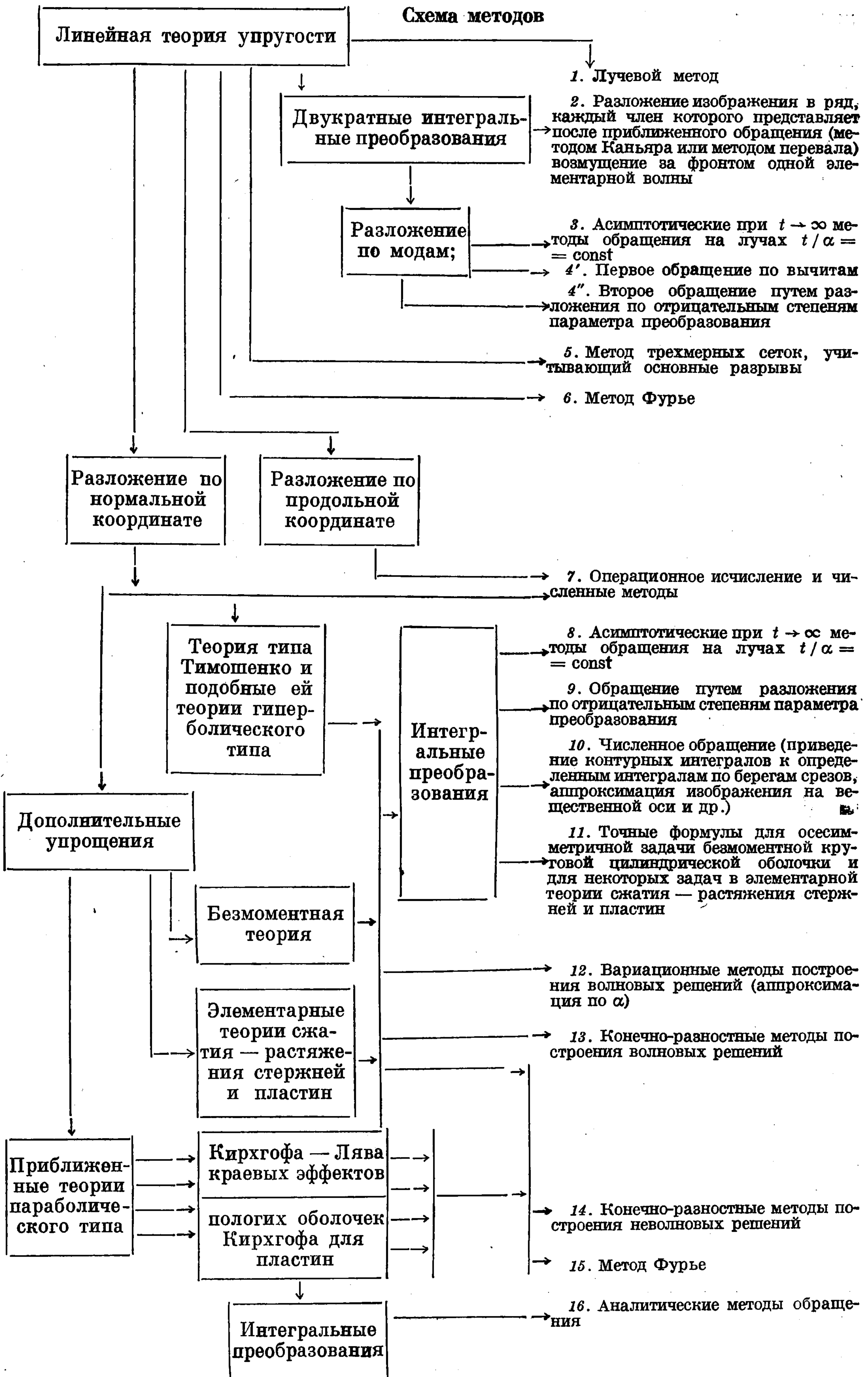
Ниже сделана попытка использовать имеющиеся результаты для выявления областей обоснованной и эффективной применимости методов интегрирования уравнений теории упругости, приближенных уравнений и методов интегрирования приближенных уравнений. При этом главное внимание уделено осесимметричным задачам деформации оболочек вращения без особых точек, а также осесимметричным и плоским задачам деформации пластин при различных локальных воздействиях. В конце статьи приведены некоторые замечания, относящиеся к другим видам воздействия.

При постановке вопроса о применимости приближенных методов необходимо условиться в том, какие величины подлежат вычислению (норма оценки точности). В данной работе предполагается, что искомыми величинами будут перемещения и их первые производные или же величины, вычисляемые через них без дифференцирования (например, напряжения).

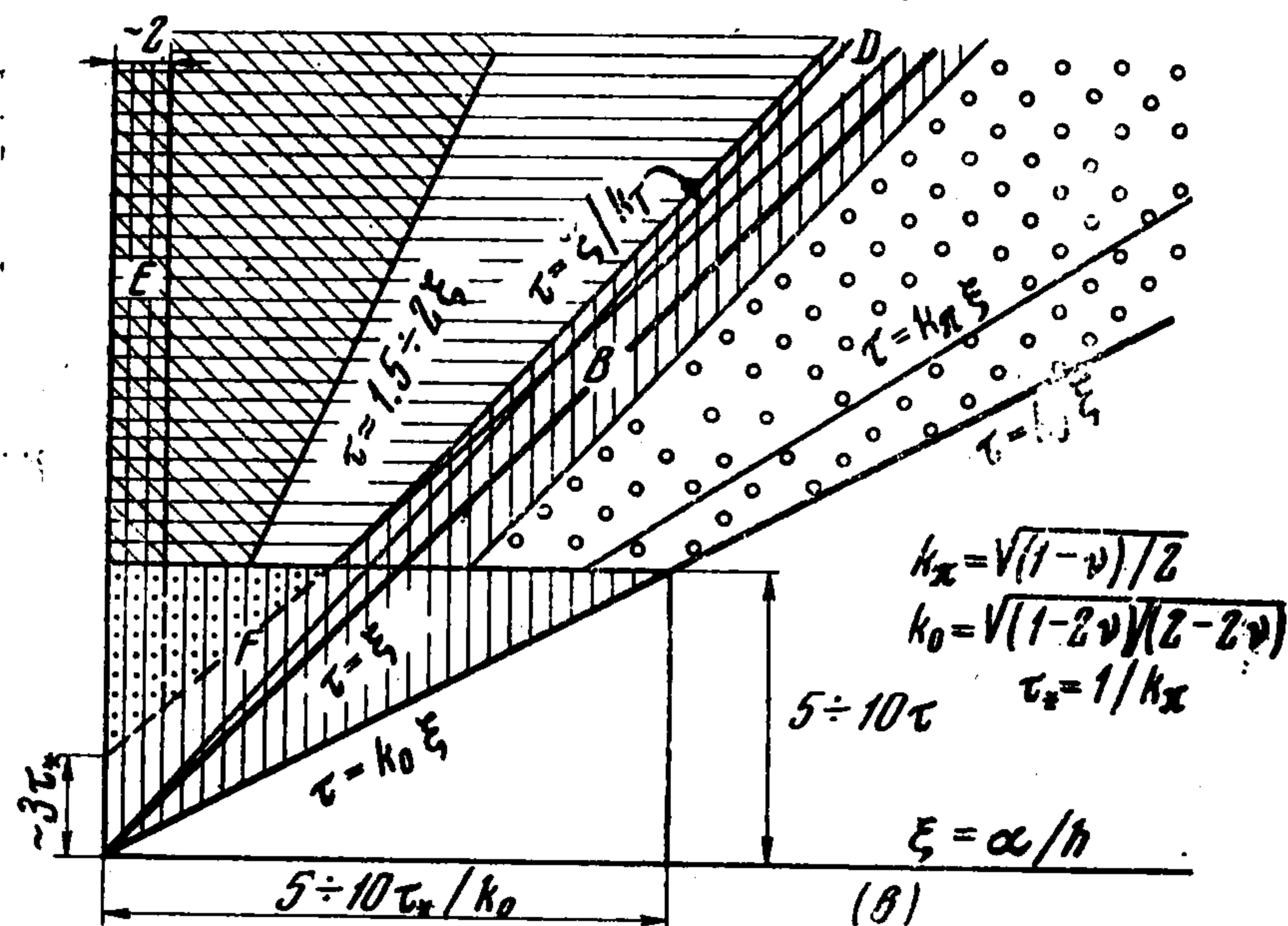
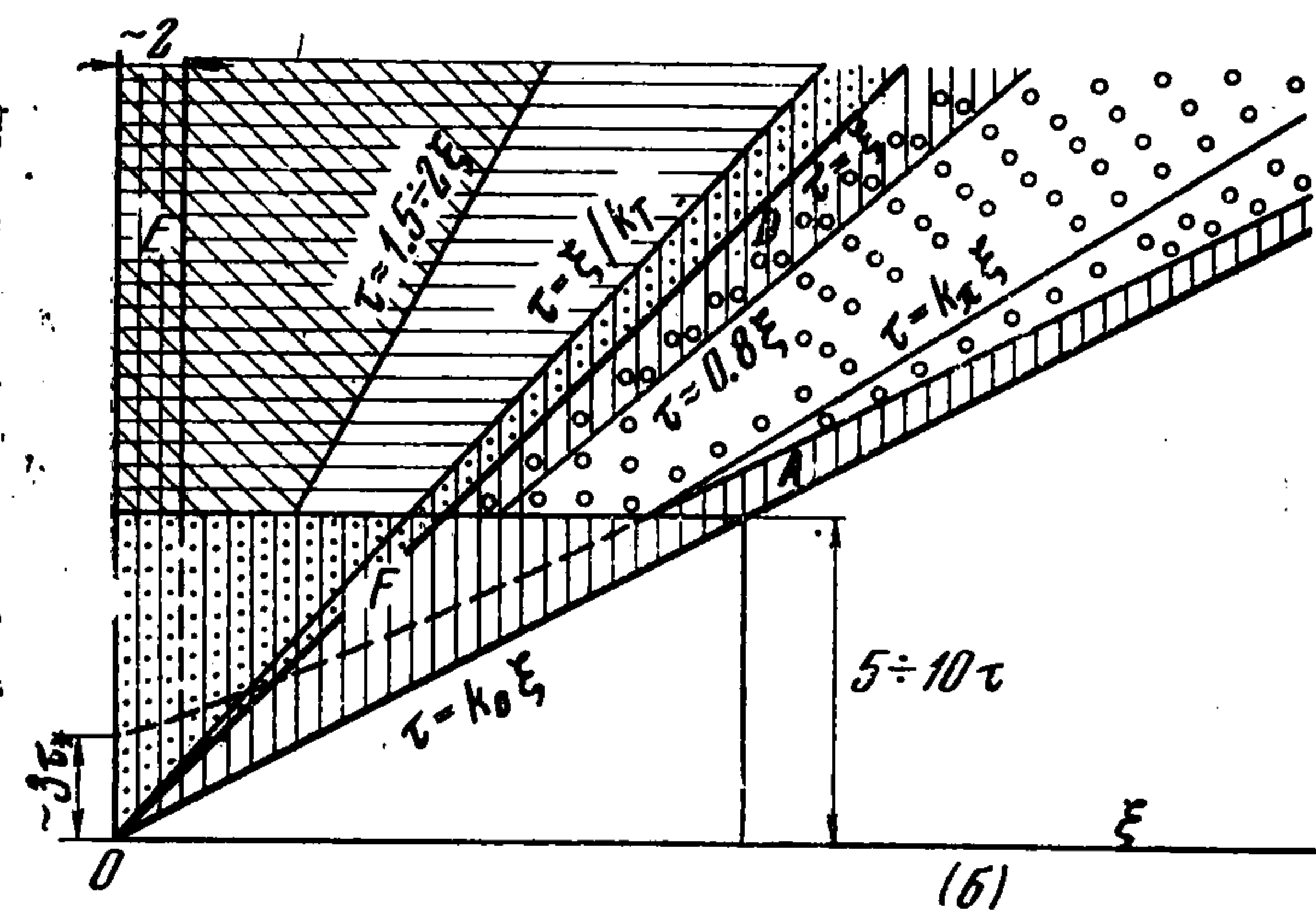
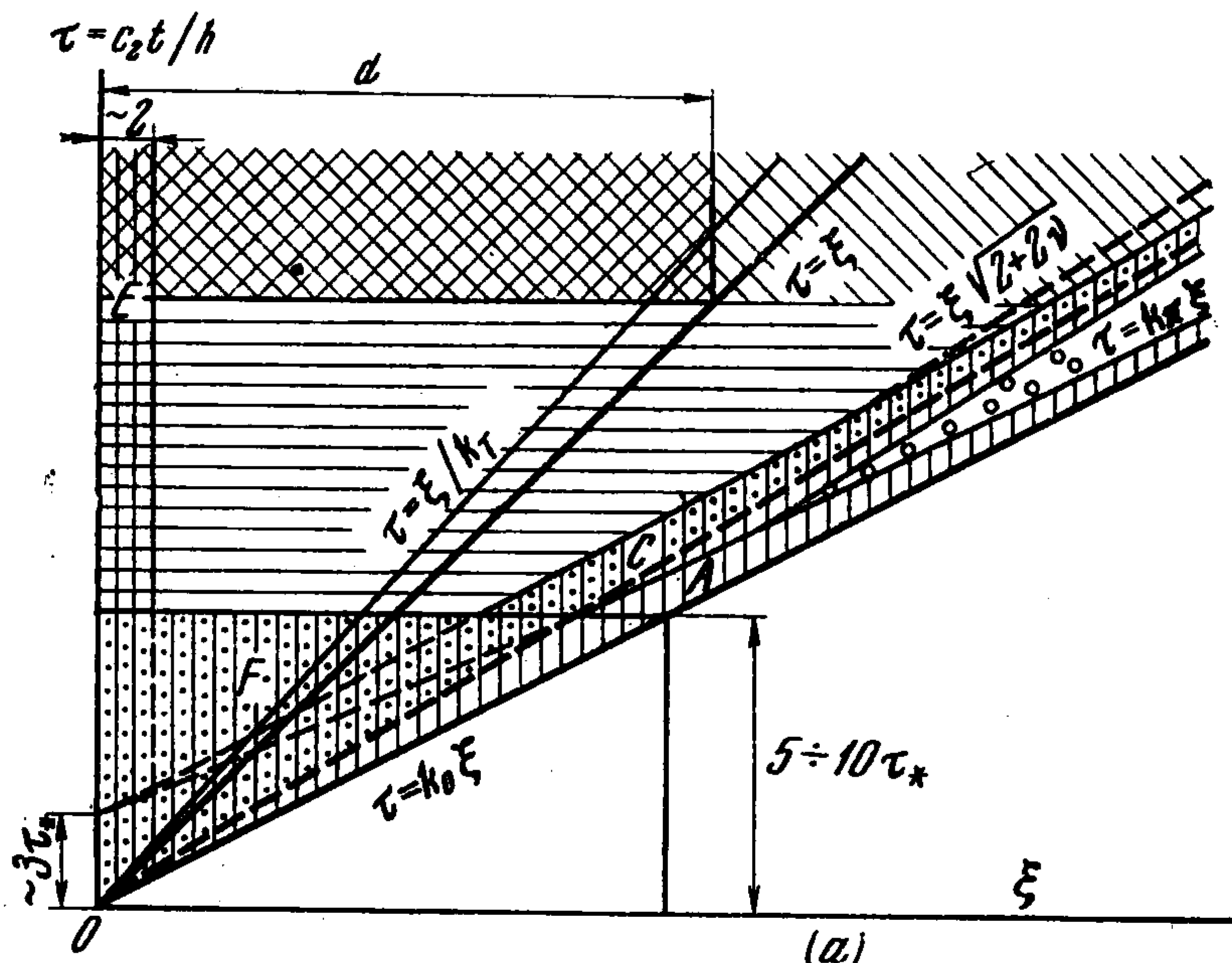
2. Методы анализа. Наличие недавно опубликованных обзорных статей [1,2] позволяет опустить подробное описание методов. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться схемой (стр. 309), ниже приводится пояснение к схеме, где перечислены все, насколько известно автору, опубликованные и применяемые методы; при этом приведем к схеме разъяснения, а также укажем некоторые последние результаты.

Заметим, что на схеме одно название фактически объединяет комплекс по идее близких методов. Имеющиеся в литературе конкретные результаты анализа переходных процессов относятся к оболочкам вращения и пластинам, что, конечно, отражает первостепенное значение этих объектов в технике. Между тем следует отметить большие математические трудности, возникающие в случае объектов более сложной конфигура-

¹ Материал статьи изложен автором в виде двух докладов на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Москва, январь—февраль, 1968), а резюме—в докладе на XII Международном съезде по прикладной механике (Станфорд, август, 1968).



ции. Главным образом исследованы осесимметричные и плоские задачи, при которых независимыми переменными будут время t , одна координата α по срединной поверхности и нормальная координата z . Кроме того, рассмотрены некоторые задачи, при которых задана синусоидальная зависимость искомых величин от другой координаты β по срединной поверхности.



стояниях в узких прифронтных зонах. Кроме того, метод 2 является довольно эффективным средством анализа динамической податливости в области приложения локального воздействия. основополагающие исследования по образованию элементарных волн в слоях были выполнены уже в тридцатых годах в работах В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [19, 20] и И. Н. Векуа [21]. Большие заслуги при разработке методов 1, 2

ности.

На основе уравнений теории упругости наиболее подробно исследованы однослойные и многослойные пластины (см. обзорные статьи [1-5], серии сборников [6,7], а также вводные части статей [8,9]). Осесимметричные задачи однослойных цилиндрических оболочек изучены на основе уравнений теории упругости в работах [10-14]. В сообщении М. В. Айзенберга [15] резонансные явления в цилиндрической оболочке при воздействии акустической волны давления, падающей под углом к ее оси, исследованы приведением проблемы к анализу циклосимметричных задач. Осесимметричная деформация двухслойных цилиндрических и сферических оболочек под воздействием плавно распределенной нагрузки рассматривалась в работе Х. А. Рахматулина и др. [16], а однослойной сферической оболочке — в работах [17, 18].

Для приближенного интегрирования уравнений теории упругости в конкретных задачах нашли применение методы 1-7 (см. схему).

Методы 1, 2 направлены к раздельному анализу элементарных волн и, главным образом, использованы в случае плоских слоев в теоретической сейсмологии. Они практически позволяют определить месторасположение и интенсивность фронтов элементарных волн, а также получить некоторую информацию о напряженных со-

имеют Г. И. Петрашень [6,7], В. М. Бабич¹. Весьма интересные результаты приведены в работе Р. Розенфельда и Ю. Микловица [8], а также в более ранних работах [22-31].

Методы 3, 4 основываются на предварительном разложении волнового процесса по модам. Поэтому при их применении используется обширная информация, накопленная в литературе по изучению дисперсионных соотношений (см. обзорные статьи [1,4,32]). Однако, как правило, применение методов 3, 4 требует дополнительного изучения мод. Метод 3 на схеме фактически объединяет комплекс асимптотических при $t \rightarrow \infty$ методов обращения контурных интегралов на лучах $t/a = \text{const}$. Эти методы использованы в задачах расчета стержней [33-38] и пластин [30-42], а в последнее время — также в некоторых задачах расчета цилиндрических оболочек, в том числе в работах М. В. Айзенберга и Л. И. Слепяна [14] и М. В. Айзенберга [15]. Метод 4 был предложен в работе [9] для пластин в целях выявления вклада отдельных мод в образование основных разрывов и для анализа напряженного состояния вблизи них при больших значениях времени. Вследствие того были установлены возможности аппроксимации разрывов при помощи приближенных теорий пластин.

Следует отметить, что применение методов 2—4 оказывается возможным в тех задачах, при которых удается подбор подходящего ядра интегрального преобразования по координате α . Ввиду этого двукратные интегральные преобразования до сих пор использованы в случае стержней, пластин, цилиндрических оболочек и сферических оболочек. До последнего времени существовала методика их применения лишь для определенного вида смешанных краевых условий. Недавно в докладе Микловица [43] была предложена методика для случаев, когда в поперечном сечении заданы либо перемещения, либо напряжения. Благодаря этому расширяется сфера применимости методов 2—4. Ввиду большой эффективности метода 3 заслужила бы внимания разработка метода непосредственного построения на лучах $t/a = \text{const}$ асимптотических при $t \rightarrow \infty$ решений, который не основывается на применении интегральных преобразований и применим для анализа осе- и циклосимметричной деформации оболочек вращения произвольной формы без особых точек. Помимо розыска таких решений ВКБ методом, здесь заслуживает внимания идея усреднения, использована, например, в работах [44,45] в случае квазилинейных уравнений второго порядка.

Методы 1, 2 практически позволяют определить лишь интенсивности фронтов отдельных элементарных волн, а методы 3, 4 эффективны при больших t , поэтому представляет большой интерес суммарная аппроксимация волнового процесса на начальном этапе движения при помощи конечно-разностных и вариационных методов интегрирования уравнений теории упругости, обеспечивающих сохранение основных разрывов решения.

Из конечно-разностных методов до настоящего времени фактически использован метод трехмерных сеток 5, учитывающий наиболее существенные разрывы решения, выявленные аналитически, и использующий рекуррентные формулы для решения систем алгебраических уравнений, возникающих из краевых условий. Этот метод был предложен для пластин в работе [9] и далее использован в случае цилиндрических оболочек в работах [10-12]. Недавно конечно-разностный метод интегрирования уравнений теории упругости был применен также в случае цилиндрического стержня конечной длины в работе [46].

Заслуживает внимания внедрение в численных расчетах методов, использующих вариационные принципы, в частности принцип, предложенный Л. Я. Айнола [47].

Метод Фурье 6 был использован в работах [17, 18], посвященных анализу отражения синусоидального сигнала — акустической волны в окружающей среде — от сферической оболочки. Однако, как будет указано в конце предлагаемой статьи, в случае длины волн сигнала, существенно превышающей толщину оболочки, практически идентичные результаты могут быть получены методом Фурье на базе приближенных теорий (методом 15).

В случае плавно распределенного воздействия в прикладных задачах достаточно

¹ Геометро-оптические методы в теории нестационарных волн и фундаментальные решения гиперболических уравнений. Докторская диссертация. Новосибирск, 1961.

учитывать распространение волн в направлении одной координаты и целесообразно использовать разложение по стоячим волнам по другой координате (метод 7 на схеме). Таким путем, например, было исследовано распространение волн по толщине двухслойных цилиндрических и сферических оболочек в работе Х. А. Рахматулина и др. [16] с применением метода характеристик для решения двумерной задачи. Аналогичная идея была использована в работе В. В. Новожилова и В. И. Утешевой [48] при изучении динамического кручения полубесконечного цилиндра при помощи разложения по радиальной координате с последующим анализом распространения волн по продольной координате методами операционного исчисления.

Важное место при анализе переходных процессов занимают приближенные теории, построенные приведением трехмерной задачи к двумерной при помощи различных методов [1, 49] представления искомых величин в виде ряда по заданным функциям от z . Цель применения приближенных теорий в конкретных задачах состоит в приближенном вычислении коэффициентов некоторого количества первых членов рядов как функции от t , α , β . Успех применения такого подхода зависит от того, как хорошо учитываемые члены рядов аппроксимируют волновой процесс в рассматриваемой области изменения t , α , β . Вполне оправданно стали весьма популярными теории типа Тимошенко и подобные ей приближенные теории, в которых заданными функциями от z будут полиномы Лежандра нулевого и первого порядка.

Основные варианты использованных приближенных теорий и методов интегрирования приближенных уравнений перечислены на схеме; обзор соответствующей литературы до 1966 г. приведен в [1, 2]. Отметим некоторые результаты последних работ.

Наблюдается некоторое развитие методов изучения волновых процессов деформации круговых цилиндрических оболочек, изменяющейся по одной координате по синусоидальному закону. В частности, в сообщении А. В. Колодяжного и А. П. Филиппова [50] исследовано влияние произвольным образом ориентированной волны давления, используя трехкратное интегральное преобразование (по t , α , β), приводящее по существу к разложению волнового процесса в ряд Фурье по продольной координате α и последующему асимптотическому обращению двукратных контурных интегралов. Конкретные результаты были получены на основе теории пологих оболочек (метод 16 на схеме). Подобная задача недавно рассматривалась также в работе [51]. К сожалению, нет возможностей констатировать развитие методов анализа волновых процессов, при которых возмущенная область расширяется по обеим координатам α , β срединной поверхности.

Главным образом в последнее время все же продолжалось рассмотрение осесимметричных и плоских задач. При этом наблюдается широкое применение конечно-разностных методов 13 в рамках теории типа Тимошенко. Метод двумерных сеток типа 13, сохраняющий разрывы, найденные методом 9, использованный ранее для расчета пластин [52], круговых цилиндрических оболочек [11] и сферических оболочек [53, 54], был в последнее время обобщен для произвольных оболочек вращения; анализ разрывов в произвольной оболочке вращения был проведен в работе [55], расчет конических и тороидальных оболочек в [55, 56]. Результаты по этому методу и методу 8 были для пластин сопоставлены в работе [57]. В случае цилиндрической оболочки в рамках теории типа Тимошенко нашел применение также метод характеристик [58].

Продолжались и исследования на базе более простых расчетных моделей. В частности, в сообщении А. П. Малышева [59] при помощи преобразования Лапласа получены замкнутые безмоментные решения (метод 11 на схеме стр. 309) для полубесконечных и конечных круговых цилиндрических оболочек, подвергнутых осесимметричному торцовому нагружению (ранее для этих задач были известны приближенные решения, построенные при помощи приближенных методов обращения). В сообщении В. В. Вardanяна и В. С. Саркисяна [60] рассмотрен удар по анизотропной пластинке и цилиндрической оболочке. Решения для этих объектов построены соответственно на базе теорий Кирхгофа и Кирхгофа — Лява методом Фурье 15 в двукратных тригонометрических рядах с вычислением коэффициентов рядов при помощи преобразования Лапласа по времени. При этом условия контакта сформулированы по теории Герца, а изображения

коэффициентов ряда Фурье найдены в виде разложения по степеням малого параметра, характеризующего анизотропию (благодаря последнему влиянию анизотропии выявлено весьма отчетливо).

Отметим также развитие и применение новых вариантов вариационных методов 12. В частности, в случае пластин нашел широкое применение метод разложения по α в расширяющемся интервале [61–63]. В работе [64] предложен новый вариационный принцип для анализа переходных процессов деформации оболочек.

С точки зрения технических приложений следует признать определенным недостатком стремление избежать в теоретических исследованиях учета влияния деформации окаймляющей оболочки конструкции. Отражение волн от контура в большинстве случаев не рассматривается; либо на контуре предписываются весьма идеализированные краевые условия, которые являются типичными также в случае применения метода Фурье 15. На таком фоне следует приветствовать сообщение Ю. Э. Сеницкого [65], посвященное осесимметричным динамическим задачам расчета сферической оболочки с упругим закреплением краев, хотя оно выполнено в неволновой постановке на основе уравнений теории пологих оболочек. На краю поперечные силы считаются пропорциональными нормальным перемещениям, а изгибающие моменты — углам поворота. При помощи преобразования Лапласа по времени и конечного преобразования Ханкеля по радиальной координате (метод 16 на схеме стр. 309) получено общее решение, на основе которого рассмотрены конкретные примеры (колебания под действием стационарной и импульсной нагрузок).

3. Области эффективной применимости методов при осесимметричной и плоской деформации, вызванной локальной нагрузкой. Рассмотрим процессы осесимметричной деформации оболочек вращения, а также процессы осесимметричной и плоской деформации пластин, зависящие от координаты α по срединной поверхности, от нормальной координаты z и от времени t . Пусть E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, c_1, c_2, c_R — скорости распространения волн сжатия — растяжения, сдвига и Рэлея, $2h$ — толщина оболочки или пластины, $\xi = \alpha/h, \zeta = z/h$ — безразмерные координаты, $A = h, B(\xi)$ — параметры Лямэ срединной поверхности, R_1, R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности, u, w — безразмерные (деленные на h) перемещения, σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — безразмерные (деленные на $E/(1+\nu)$) напряжения, $\tau = c_2 t/h$ — безразмерное время, d — ширина зоны простых краевых эффектов, подобная такой же в статике. Будем использовать также обозначения

$$k_0 = \frac{c_2}{c_1}, \quad k_R = \frac{c_R}{c_2}, \quad k_\pi = \sqrt{(1-\nu)/2}, \quad \tau_* = \frac{1}{k_\pi}, \quad \frac{\partial(\dots)}{\partial\tau} = (\dots)', \quad \frac{\partial(\dots)}{\partial\xi} = (\dots)' \quad (3.1)$$

Говоря о приближенных теориях, будем использовать понятия следующих безразмерных величин: U, W — усредненные продольные и нормальные перемещения, ψ — угол поворота нормали, T — продольное усилие, M — продольный изгибающий момент, Q — поперечная сила. В теории типа Тимошенко предполагаем, что коэффициент сдвига k_T равен k_R .

Для конкретности будем иметь в виду типы воздействия в сечении $\xi = 0$, указанные в табл. 1, где $f_0(\zeta), f_1(\zeta)$ обозначают функции, удовлетворяющие условиям

$$\int_{-1}^{+1} f_0(\zeta) d\zeta = 1, \quad \left| \frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial\zeta} \right| \ll 1, \quad \int_{-1}^{+1} f_1(\zeta) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \zeta f_1(\zeta) d\zeta = 0 \quad (3.2)$$

Зависимость воздействия от времени определена в табл. 1 через $g_0(\tau)$ или $g_1(\tau)$ для каждого типа воздействий (либо верхней либо нижней строкой). Если воздействие задано в перемещениях через $g_0(\tau)$, то обозначим

$$g_0(\tau) = g_1(\tau) \quad (3.3)$$

В соответствии с исходными предположениями линейной теории упругости потребуем непрерывность $g_0(\tau)$ и наложим на $g_1(\tau)$ условие

$$|g_1(\tau)| \ll 1 \quad (3.4)$$

В уравнениях (3.8) введены обозначения

$$H_1 = h \left(1 + \frac{\zeta h}{R_1} \right), \quad H_2 = B \left(1 + \frac{\zeta h}{R_2} \right), \quad \zeta_1 = \left(1 + \frac{\zeta h}{R_1} \right) \frac{R_1}{h}, \quad \zeta_2 = \left(1 + \frac{\zeta h}{R_2} \right) \frac{R_2}{h} \quad (3.9)$$

Говоря об интегрировании системы (3.8) имеем в виду: (а) нулевые начальные условия, (б) краевые условия при $\xi = 0$, указанные в табл. 1, (в) краевые условия $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{33} = 0$ при $\zeta = \pm 1$. В теории типа Тимошенко и в теории Кирхгофа — Лява краевые условия (б) приобретают вид, указанный в табл. 1, а краевые условия (в) превращаются в условия отсутствия распределенной нагрузки.

Отметим, что месторасположение и амплитуды фронтов, а также быстро изменяющиеся напряженные состояния вблизи них могут быть анализированы при помощи упрощенных уравнений (3.8), в которых сохранены члены, содержащие вторые и первые производные. В первом приближении такой анализ может быть проведен на основе еще более упрощенных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} k_0^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} k_0^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} (1 - k_0^2) + \\ + \frac{\partial u}{\partial \zeta} k_0^2 \left(\frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_2} \right) + \frac{\partial w}{\partial \xi} \left[\frac{(1 + k_0^2) h}{R_1} + \frac{(1 - k_0^2) h}{R_2} \right] = 0 \quad (3.10) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} k_0^2 + \frac{\partial w}{\partial \xi} k_0^2 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} k_0^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} (1 - k_0^2) + \\ + \frac{\partial u}{\partial \zeta} (1 - k_0^2) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \left(\frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_2} \right) - \frac{\partial u}{\partial \xi} (1 + k_0^2) \frac{h}{R_1} = 0 \end{aligned}$$

коэффициенты которых имеют погрешность порядка a .

В уравнениях (3.10) от R_j зависят лишь коэффициенты последних двух членов. Поэтому при воздействиях, указанных в табл. 1, амплитуды основного разрыва и напряженного состояния вблизи него почти независимы от R_j . Например, при воздействиях типа LT, LM наиболее сильным оказывается разрыв производных от u по τ и ξ , перемещающийся со скоростью c_1 . У этого разрыва u с погрешностью порядка a будет пропорциональным $\sqrt{B(0)/B(\xi)}$ и не зависимым от R_j , а другие разрывы существенно зависят от R_j . При воздействиях типа NW, NQ наиболее сильным оказывается разрыв производных от w по τ и ξ , перемещающийся со скоростью c_2 . У этого разрыва w с погрешностью порядка a будет пропорциональным $\sqrt{B(0)/B(\xi)}$ и независимым от R_j , а другие разрывы опять существенно зависят от R_j .

Теория типа Тимошенко основывается на аппроксимации

$$u(\xi, \zeta; \tau) = U(\xi, \tau) + \zeta \Psi(\xi, \tau), \quad w(\xi, \zeta; \tau) = W(\xi, \tau) \quad (3.11)$$

Ее уравнения движения построены с различной точностью в части второстепенных членов. При конкретно исследованных задачах оправдал себя следующий вариант уравнений:

$$L_{i1}U + L_{i2}\Psi + L_{i3}W = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.12)$$

$$L_{11} = P, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{Kh}{R_1} \quad \left(K = k_T^2 \frac{1-\nu}{2} \right)$$

$$L_{13} = L_{31} = \left[\frac{(1+K)h}{R_1} + \frac{\nu h}{R_2} \right] \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$L_{22} = \frac{1}{3}P - K, \quad L_{23} = -K \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad L_{32} = -K \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)$$

$$L_{33} = -K \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + h^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right)$$

$$P = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\nu}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (3.13)$$

В некоторых случаях допустимы дальнейшие упрощения

$$L_{12} = L_{21} = 0, \quad L_{32} = -K \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad P = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (3.14)$$

С точностью системы (3.12) при воздействиях типа LT, LM, NW основными будут соответственно разрывы производных от U , Ψ , W , приближенно определяемых из условий $PU=0$, $P\Psi=0$, $L_{33}W=0$. Если B изменяется достаточно медленно, то функции, найденные из этих условий, почти пропорциональны $\sqrt{B(0)/B(\xi)}$. В первых двух случаях наиболее сильный разрыв распространяется со скоростью c_2/k_π , а в третьем случае со скоростью c_2k_T .

Более подробный анализ разрывов и прифронтных полей может быть выполнен методом 9. Пусть $V_i(s, \xi)$ $i=1, 2, 3$ изображения Лапласа соответственно от $U(\tau) \cdot \Phi(\tau, \xi) \cdot W(\tau, \xi)$. Тогда при достаточно медленно изменяющихся $R_1 R_2 B'$ такой анализ сводится к построению асимптотического при $s \rightarrow \infty$ решения преобразованной по Лапласу системы (3.12) в форме

$$V_i(s, \xi) = \frac{1}{\sqrt{B(\xi)}} \sum_{j=1}^3 C_{ij}(s, \xi) e^{-\lambda_i(s)\xi}, \quad \lambda_j = k_j s + \frac{g_j}{s} + \dots$$

$$k_1 = k_2 = \sqrt{(1-\nu)/2}, \quad k_3 = 1/k_\pi, \quad g_1 \sim a^2, \quad g_2 \sim -1, \quad g_3 \sim 1, \dots$$

Здесь $C_{ij}(s, \xi)$ — отрицательные степени s , умноженные на очень медленно изменяющиеся функции от ξ . В вышеуказанной работе [55] были использованы выражения первого приближения $\lambda_j = k_j s$ в результате чего для некоторых $C_{ij}(s, \xi)$ были получены неправильные выражения.

По теории оболочек типа Тимошенко со скоростью c_2/k_π распространяются две волны, а со скоростью c_2k_T — одна волна. По безмоментной теории существует одна волна, распространяющаяся со скоростью c_2/k_π . По теории упругости со скоростью c_2/k_π распространяется квазифронт, а со скоростью c_2k_T — поверхностные волны Рэлея.

Приведем теперь выводы, полученные в результате комплексного применения и сопоставления различных методов при различных воздействиях и объектах. При этом имеем в виду вычисление следующих величин: u , \dot{u} , u' , w , \dot{w} , w' , σ_{11} , σ_{22} , σ_{13} .

В крупном плане будем различать следующие напряженные состояния:

I — быстроизменяющиеся напряженные состояния волнового типа, не описываемые при помощи приближенных теорий и охарактеризованные тем, что амплитуды u , w будут малыми, а амплитуды некоторых их первых производных — соизмеримыми со своими максимальными значениями в течение всего процесса;

II — напряженные состояния, описываемые при помощи теории типа Тимошенко или более простых приближенных теорий;

III — быстроизменяющиеся напряженные состояния, не описываемые при помощи приближенных теорий и охарактеризованные малостью амплитуд u и w , а также их первых производных и σ_{ij} по сравнению с максимальными амплитудами этих величин в течение всего процесса;

IV — квазистатические краевые эффекты Сен-Венана у места приложения воздействия.

Главный интерес представляют напряженные состояния типа I, II. Вопросы существования этих напряженных состояний и подбора эффективных методов их построения в зависимости от типа воздействия и закона его изменения по времени будем пояснять при помощи табл. 2 и сопутствующих фиг. 1, а — в.

Обратим внимание на то, что метод б не фигурирует в табл. 2; в случае локального воздействия он неэффективен.

Случай 1. Напряженные состояния I отсутствуют. При воздействиях типа LC, NC наиболее существенным будет напряженное состояние IV. При воздействиях LT, LM, NW, NQ доминирует напряженное состояние II, основные компоненты которого будут сравнительно медленно изменяющимися функциями от τ и ξ . Поэтому практически приемлемо построить неволновые решения по методам 14—16. При этом достаточно применить в случае оболочек параболическую теорию Кирхгофа — Лява или ее упрощенные варианты, а в случае пластин — теорию Кирхгофа или элементарную теорию сжатия —

Таблица 2

**Существование напряженных состояний I, II,
а также методы их построения**

Случай	Изменение воздействия по времени		Тип воздействия	
			LT, LM, NW, NQ	LC, NC
1	плавное изменение	$\lambda \ll 1$ при $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $\tau_0 \gg 1$	II; неволновые решения по методам 14 — 16	—
2	быстрое нагружение	$\lambda \ll 1$ при $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $\lambda = 0$ при $\tau > \tau_0$, $\tau_0 \gg 1$	II; волновые решения по методам 8 — 13	—
3	очень быстрое нагружение	$\lambda \gg 1$ при $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $\lambda = 0$ при $\tau > \tau_0$, $0 \leq \tau_0 \leq 1$	I и II соответственно в областях, указанных для LT на фиг. 1, а, для LM на фиг. 1, б, и для NW, NQ на фиг. 1, в; при этом I — по методам 1—5 и 7, II по методам 8—13.	I; в начале движения — методы 1, 2, 5, 7; при больших τ — методы 1, 3, 4, 7
4	очень кратковременное воздействие	$\lambda \gg 1$ при $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $g_1(\tau) = 0$ при $\tau > \tau_0$, $\tau_0 \ll 1$	I — анализ разрывов на фронтах элементарных волн и быстроизменяющихся напряженных состояний при них методами 1, 2, 3	

растяжения. При применении приближенных вариантов теории Кирхгофа — Лява следует руководствоваться теми же принципами как в соответствующих задачах статки (см. также пояснения к случаю 3 в части применимости приближенных теорий).

Случай 2. В некоторой степени этот случай является аналогичным предыдущему. Однако напряженное состояние II имеет при воздействиях типа LT, LM, NW, NQ более выраженный волновой характер и в некоторых областях изменения $\tau - \xi$ преобладают сравнительно быстро изменяющиеся напряженные состояния, требующие построения волнового решения на основе теории типа Тимошенко по методам 8—13. Возможности замены этой теории более простыми, а также области эффективной применимости методов интегрирования такие же, как в случае 3.

Случай 3. Этот случай будет наиболее сложным и его рассмотрим отдельно для различных видов воздействия. Предельный его случай $\tau_0 = 0$ следует понимать таким образом, что

$$g_1(\tau) = CH(\tau), \quad C = \text{const} \quad (3.15)$$

Указывая области существования напряженного состояния I при $\tau \gg 1$, предполагаем, что амплитуды этого напряженного состояния не становятся пренебрежимо малыми ввиду уменьшения $\sqrt{B(0)/B(\xi)}$ (в противоположном случае ситуация упрощается и становится с ростом τ подобной случаю 2).

Рассмотрим тип воздействия LT в случае оболочек вращения, используя фиг. 1, а, на которой приняты следующие обозначения: 1 — теория упругости, 2 — теория типа Тимошенко, 3 — безмоментная теория, 4 — малоамплитудные осцилляции (напряженное состояние III), 5 — теория типа Тимошенко только для вычисления U ; А — зона напряженного состояния I за основным фронтом $\tau = k_0\xi$, С — зона напряженного состояния I у основного квазифронта $\tau = k_\pi\xi$, F — зона напряженного состояния в начале движения, E — зона существования напряженного состояния IV.

По теории упругости в начале движения (в зоне F) целесообразно рассматривать решение как сумму двух компонентов, из которых первый удовлетворяет краевым условиям при $\xi = 0$ и переносит разрывы на фронтах $\tau = k_0\xi$, $\tau = \xi$, но не удовлетво-

ряет краевым условиям при $\zeta = \pm 1$, а второй, обеспечивающий удовлетворение краевых условий при $\zeta = \pm 1$, представляет собой сумму первичных элементарных волн, вытекающих из условных источников в точках $\xi = 0$, $\zeta = \pm 1$. Первый компонент, постоянный или медленно изменяющийся в толщине объекта, может быть легко построен аналитическим путем точно или с практически приемлемой погрешностью. Однако область, где он существует без второго компонента, быстро сужается с ростом τ .

Месторасположение и интенсивность фронтов элементарных волн второго компонента решения могут быть определены методами 1, 2. Для полного (за исключением некоторого сглаживания второстепенных разрывов) описания второго компонента решения из внедренных методов наиболее эффективным оказался метод 5, но, по-видимому, заслуживает внимания также применение вариационных методов и методов 7. Объем вычислений по методу 5 растет пропорционально τ^2 .

Результаты анализа конкретных задач, в том числе результаты расчета до $\tau / k_0 = 40$, опубликованные в [11,12], показывают, что в начале движения, помимо основного разрыва, появляются особенно большие амплитуды напряженного состояния I в районе точек выхода первых головных волн, находящихся примерно на расстоянии $j\tau_* / k_0$ ($j = 1, 2, 3$) по ξ за основным разрывом. Однако уже при $\tau \approx 5-10 \tau_*$ напряженное состояние I локализовано в узких зонах A и C, причем за зоной C применима теория типа Тимошенко (фиг. 1, a). Указанное подтверждается также сопоставлением результатов по методам 3 и 8. В зоне A эффективны методы 1 и 4, а в зоне C — метод 3 (при очень больших τ эти зоны становятся узкими и теряют практическое значение). В части U теория типа Тимошенко применима также в области 5.

При применении теории типа Тимошенко на начальном этапе движения вклад Ψ и W в первое уравнение системы (3.12) пренебрежимо мал и U может быть найден [11,56] из уравнения $P U = 0$. С точностью этого уравнения U независимо от R_j . Если B изменяется достаточно медленно, то

$$U \approx \sqrt{B(0)/B(\xi)} U_0 \quad (3.16)$$

где U_0 — решение уравнения

$$U_0'' - \frac{1-\nu}{2} U_0'' = 0 \quad (3.17)$$

В случае толстых оболочек аналогичная ситуация продолжает существование и при сравнительно больших τ , но тогда достаточно далеко за фронтом $\tau = \xi / \sqrt{2 + 2\nu}$ более хорошую аппроксимацию дает элементарная теория сжатия — растяжения стержней переменного поперечного сечения.

Пока W мало по сравнению с U , допустимо опустить его также в выражениях тангенциальных усилий теории типа Тимошенко. Здесь важно отметить, что в начале движения максимальные амплитуды W и ψ будут порядка относительной толщины меньше максимальных амплитуд U . Однако, рост W по сравнению с U идет с ростом τ тем быстрее, чем тоньше оболочка, и поэтому в случае тонких оболочек при $\tau \gg 1$ указанные приближенные способы дают приближенное представление лишь о перемещении U . Однако после прохода фронтом $\tau = \xi$ зоны практического затухания простых краевых эффектов, имеющей ширину d , зависящую от относительной толщины, оказывается эффективным иной прием упрощения: расчленение напряженного состояния в безмоментное состояние и простые динамические краевые эффекты (фиг. 1, a). В части U и T в областях 2, 3 превалирует безмоментное состояние. Отметим, что возможность указанного расчленения была аналитически обоснована уже в 1961 г. в работе Н. А. Алумяэ [66] и подтверждается анализом численных результатов для различных объектов.

В случае пластин воздействие типа LT вызывает деформацию, симметричную относительно срединной поверхности, и теория типа Тимошенко, а также безмоментная теория становятся эквивалентными элементарной теории сжатия — растяжения пластин, заменяющей вышеуказанные приближенные теории в областях их применимости.

Рассмотрим теперь тип воздействия LM, используя фиг. 1, б на которой приняты обозначения: 1 — теория упругости, 2 — теория типа Тимошенко, 3 — теория Кирхгофа — Лява (для оболочек) или теория Кирхгофа (для пластин), 4 — малоамплитудные осцилляции (напряженное состояние III), 5 — теория типа Тимошенко только для вычисления W ; A, D, F — зоны напряженного состояния I, E — зона существования напряженного состояния IV.

С точки зрения применимости и эффективности приближенных методов интегрирования ситуация в зонах F и A такая же, как в случае воздействия типа LT. При $\tau > 5 \div 10 \tau^*$ за зоной A существует область очень малоамплитудных осцилляций. Однако с ростом отношения τ / ξ при любом $\tau = \text{const}$ амплитуды постепенно снова увеличиваются и уже при $\tau \approx 0 \div 8 \div 0 \div 9 \xi$ заслуживают практического внимания. В связи с тем появляется область D, где эффективен метод 3. За исключением грубого вычисления W в области 5 теория типа Тимошенко обеспечивает более или менее надежные результаты лишь в области 2, причем в области 3 она может быть заменена теорией Кирхгофа — Лява для оболочек и теорией Кирхгофа для пластин. При этом в начале движения допустимо найти W и Ψ из последних двух уравнений системы (3.13), пренебрегая влиянием U и пользуясь нетангенциальными краевыми условиями.

Коэффициенты такой системы двух уравнений, равно как и соответствующего уравнения теории Кирхгофа — Лява, независимы от R_j и зависят от геометрических параметров объекта только через B . Поэтому известные численные результаты для плоской ($B = \text{const}$) и осесимметричной ($B = \xi$) деформации пластин позволяют предугадать характер перемещений, изгибающих моментов и поперечной силы в случае различных оболочек вращения.

В частности при плоской деформации пластины и осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки указанные величины будут в начале движения практически совершенно одинаковыми, а деформация пологих оболочек мало отличается от осесимметричной деформации пластин. С ростом τ в случае оболочек постепенно растет влияние R_j и U , причем в области 3 доминируют нетангенциальные факторы напряженного состояния, приобретающие характер простого краевого эффекта. Поэтому при $\tau \gg 1$ в области 3 возможно эффективное расчленение напряженного состояния в безмоментное состояние и простые краевые эффекты.

Переходим к рассмотрению типов воздействия NW, NQ, используя фиг. 1, в, на которой номера 1, ..., 5 и буквы F, E применены в таком же смысле, как на фиг. 1, б. Самое существенное различие от случая воздействия LM состоит в том, что основной разрыв имеет теперь место на фронте $\tau = \xi$, в результате чего в зоне B возникает напряженное состояние I, которое может быть исследовано методами 1, 3, 4. В области D эффективен метод 3. Теория типа Тимошенко применима в области за квазифронтом поверхностных волн Рэлея. В остальных областях применимости приближенных методов такие же, как при воздействиях типа LM.

Рассмотрим теперь вопрос эффективности методов интегрирования уравнений теории типа Тимошенко при воздействиях LT, LM, NW, NQ. Приводимые здесь замечания с одинаковой степенью относятся к случаям 2 и 3. Известно [1], что в первых работах, посвященных применению теории типа Тимошенко в задачах расчета пластин, нацели применение некоторые варианты метода 10 (схема на стр. 309), особенно приведение контурных интегралов к определенным интегралам по берегам срезом плоскости комплексного параметра преобразования. Ввиду большого числа точек разветвления обобщение этих способов для оболочек не оказывается целесообразным.

В начале движения наиболее эффективными будут конечно-разностные методы 13, в том числе вариант метода двумерных сеток, при котором сохраняют основные разрывы, выявленные аналитически методом 9, а также метод характеристик. В тех случаях, когда существуют предварительные сведения о волновом процессе, обеспечивающие удачный выбор аппроксимирующих функций, весьма эффективны также методы 12. Однако по методам 12, 13 объем вычислений растет примерно с τ^2 . Поэтому при $\tau \gg 1$ в районе основного разрыва заслуживает внимания применение метода 9, а далеко от основного разрыва — применение метода 8. Сопоставление результатов по ме-

тодам 8 и 13 говорит о том, что в случае пластин и толстых цилиндрических оболочек метод 8, реализованный в первом приближении, применим при $\tau \gg 10 \div 40$, причем нижний предел применимости существенно зависит от рассматриваемых величин.

В пределах безмоментной теории, а также элементарных теорий стержней и пластин для некоторых задач существуют точные решения (метод 11 на схеме) или решения, гарантирующие на всем диапазоне $\xi < \xi_0, \tau < k_0 \xi_0$ хорошую аппроксимацию. В остальных случаях в начале движения опять эффективны методы 12, 13 и при больших τ — методы 8, 9.

Случай 4. Ввиду малости перемещений главный интерес представляют их производные, имеющие при воздействиях типа LT, LM, LC наибольшие амплитуды в сужающихся зонах (фиг. 1, а) у фронта $\tau = k_0 \xi$ и квазифронта $\tau = k_\pi \xi$, а при воздействиях NW, NQ, NC — в сужающейся зоне (фиг. 1, б) у фронта $\tau = \xi$. У фронтов $\tau = k_0 \xi, \tau = \xi$ следует применять методы 1, 2, 4, а у квазифронта $\tau = k_\pi \xi$ — метод 3.

Наконец отметим, что в проведенных рассуждениях был принят в теории типа Тимошенко коэффициент сдвига $k_T = k_R$, поскольку это, как правило, обеспечивает наиболее хорошие результаты аппроксимации дисперсионных соотношений, используемых при реализации метода 8. Однако некоторое изменение численного значения k_T существенно не изменяет пределов обоснованной применимости этой теории.

4. Некоторые обобщения. Пусть по-прежнему речь идет о вычислении перемещений, их первых производных и напряжений. В предыдущем пункте было указано, что воздействия, плавно распределенные и неуравновешенные в толщине оболочки или пластинки, вызывают в случае

$$\lambda(\tau) \lesssim 1 \quad (4.1)$$

волновые процессы, при которых основные (в смысле величины амплитуд искомым величин) компоненты напряженного состояния довольно хорошо могут быть аппроксимированы при помощи теории типа Тимошенко или более простых приближенных теорий. По существу выполнение условия (4.1) в некотором смысле гарантирует «гладкость» фронтов возбуждаемых элементарных волн, что обеспечивает возможность аппроксимировать зависимость основных напряженных состояний от ζ при помощи гладких функций от ζ , вводимых в рассмотрение при построении приближенных теорий оболочек и пластин. Поэтому существует основание предполагать, что выполнение условия (4.1) будет необходимым также для правильного описания при помощи приближенных теорий перемещений, их первых производных и напряжений в случае распределенного воздействия.

Пусть, например, волновой процесс возбуждается нормальной нагрузкой (σ_{33}) или нормальной скоростью (w), распределение которого по ξ на поверхности $\zeta = 1$ или $\zeta = -1$ задано через функцию $G(\xi)$. Введем в рассмотрение показатель изменчивости воздействия по ξ по формуле

$$r(\xi) = \frac{|G'(\xi)|}{\max |G(\xi)|} \quad (0 \leq \xi \leq \xi_0) \quad (4.2)$$

Если выполняются условие (4.1) и условие

$$r(\xi) \lesssim 1 \quad (4.3)$$

то теория типа Тимошенко дает практически приемлемую аппроксимацию волнового процесса в осесимметричных задачах для оболочек вращения, а также в осесимметричных и плоских задачах для пластин. Если условия (4.1), (4.3) выполняются в сильном смысле $\lambda \ll 1, r \ll 1$, то теория типа Тимошенко, как правило, может быть заменена более простыми теориями.

Указанные выводы хорошо согласуются с выводами о применимости приближенных теорий по асимптотическим оценкам относительно показателя изменчивости напряженного состояния. Для динамических задач расчета круговых цилиндрических оболочек такие асимптотические оценки были, например, получены в работах [67–69].

Метод 6, который в предыдущем пункте был признан неэффективным в случае локальной нагрузки, может оказаться эффективным, если условия (4.1), (4.3) выполняются в достаточно строгом смысле, а условие (3.7) не выполняется. Если $\lambda \ll 1$ и $r \ll$

1, то во многих случаях наиболее эффективным является метод 15. Отсюда, в частности, следует, что диаграммы, характеризующие эхо синусоидальных импульсов от сферических оболочек $R_1=R_2=R_0$ в воде и в воздухе, полученные в [18,70,71] на основе метода 6, могут быть для достаточно тонких оболочек найдены с многократно меньшим трудом при помощи метода 15; если длина волн импульса многократно превышает толщину сферической оболочки и $R_0/h \geq 10$, то достаточно реализовать метод 15 на базе безмоментной теории.

Критерий типа (4.1), легко может быть обобщен также на случай волнового процесса, зависящего от двух координат срединной поверхности.

Поступила 19/IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. А й н о л а Л., Н и г у л У. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. Изв. АН Эст.ССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1965, т. 14, № 1, стр. 3—63.
2. А л у м я э Н. А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластин. Тр. VI Всес. конферен. по теории оболочек и пластин, Баку, 1966, М., «Наука», 1966.
3. П е т р а ш е н ь Г. И. Работы по распространению упругих волн. Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 22, стр. 119—139.
4. M i k l o w i t z J. Recent developments in elastic wave propagation. Appl. Mech. Revs, 1960, vol. 13, No. 12, p. 865—878.
5. M i k l o w i t z J. Transient wave propagation in elastic rods and plates. J. Geophys. Res., 1964, vol. 68, No. 4, p. 1190—1192.
6. Динамические задачи теории упругости (под ред. С. Г. Михлина): ч. I — 1951, ч. II — 1952, ч. III — 1953, ч. IV — 1954, ч. V — 1956, ч. VI — 1958; Уч. зап. Ленингр. ун-та, № 149, 162, 170, 177, 208, 246.
7. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн: сб. I, Л., Гостоптехиздат, 1957; сб. II, 1959; сб. III, 1959; сб. IV, 1960; сб. V, 1961; сб. VI, 1962; сб. VII, 1964. Изд-во Ленингр. ун-та.
8. R o s e n f e l d R. L., M i k l o w i t z J. Wave fronts in elastic rods and plates. Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1962, vol. 1, p. 293—303.
9. Н и г у л У. К. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. Изв. АН ЭстССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1965, т. 14, № 3, стр. 345—384.
10. Н и г у л У., П е т е р с о н М. Алгоритм метода трехмерных сеток для анализа динамических переходных процессов осесимметричной деформации цилиндрической оболочки. Изв. АН ЭстССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1966, т. 15, № 1, стр. 28—35.
11. Н и г у л У. К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек. Тр. VI Всес. конференц. по теории оболочек и пластин, Баку, 1966. М., «Наука», 1966, стр. 653—659.
12. N i g u l U. Three — dimensional shell-theory of axially symmetric transient wave in a semi-infinite cylindrical shell. Arch. Mechaniki Stosowanej, 1967, vol. 19, No. 6, p. 839—856.
13. М о л о т к о в Л. А., К р а у к л и с П. В. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью и помещенной в упругую среду, ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
14. А й з е н б е р г М. В., С л е п я н Л. И. Резонансные волны в полой цилиндрической оболочке, погруженной в сжимаемую жидкость. Переходные процессы деформации оболочек и пластин. Материалы Всесоюзного симпозиума, Тарту, 1967, Изд-во АН ЭстССР, Таллин, 1967, стр. 13—22.
15. А й з е н б е р г М. В. Резонансные явления в цилиндрической оболочке при воздействии акустической волны давления, падающей под углом к ее оси. Сообщ. на III Всесоюзном съезде по теор. и прикладн. механ., М. Наука, 1968.
16. Р а х м а т у л и н Х. А., Б а б и ч е в А. И., С а и д о в Т. Х., Х и д о я т о в К. Исследование динамики многослойных сферических и цилиндрических упругих оболочек непосредственным интегрированием динамических уравнений упругости. Переходные процессы деформации оболочек и пластин. Материалы Всесоюзного симпозиума, Тарту, 1967, Таллин, Изд-во АН ЭстССР, 1967, стр. 113—133.
17. G o o d m a n R. R., S t e r n R. Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells. J. Acoust. Soc. Amer., 1962, vol. 34, No. 3.
18. H i c k l i n g R. Analysis of echoes from a solid elastic sphere in water. J. Acoust. Soc. Amer., 1964, vol. 34, No. 16, p. 1582—1591.
19. S m i r n o v V., S o b o l e v S. Sur une methode nouvelle dans de problème plan des vibrations élastique. Publ. Inst. Séismol. Acad. Sci. USSR, 1932, t. 20.
20. С м и р н о в В. И., С о б о л е в С. Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии. Тр. Сейсм. ин-та АН СССР, 1933, № 29.
21. В е к у а И. Н. К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. Тр. Тбилисс. геофиз. ин-та, 1937, т. 2, стр. 23—50.
22. M e n c h e r A. G. Epicentral displacement caused by elastic waves in an infinite slab. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No 9, p. 1240—1245.
23. К н о р о ф ф L. Surface motions of a thick plate. J. Appl. Phys., 1958, vol. 29, No. 4, p. 661—670.
24. К н о р о ф ф L., G i l b e r t F. First motion methods in theoretical seismology. J. Acoust. Soc. Amer., 1959, vol. 31, No 9, p. 1161—1168.
25. B r o b e r g K. B. A problem on stress waves in an infinite elastic plate. Trans. Roy. Inst. Technol., Stockholm, 1959, Rep. No. 139.
26. D a v i d s N. Transient analysis of stress-wave penetration in plates. Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1959, vol. 26, No. 4, p. 651—660.
27. P y t e l A., D a v i d s N. Further transient analysis of stress wave propagation in plates. Proc. 4th Midwest. Conf. Solid. Mech., Austin, Tex. Univ. Press, s. a., 1959, p. 358—381.
28. B r o b e r g R. B. Transient analysis of stress-wave penetration in plates. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 2, p. 366—367.
29. D a v i d s N. Some problems of transient analysis of waves in plates, Internat. Symp. Stress Wave Propagat. Mater., 1959, N. Y. — London, Interscience, 1960.
30. P y t e l A., D a v i d s N. Transient analysis of shear impact. Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 1, p. 33—39.
31. T h i r u v e n k a t a c h a r V. R. Stress-wave propagation induced in an infinite slab by an impulse over a circular area on one face. 1. Proc. Nat. Inst. Sci, India, 1960, A. 26, Suppl. 2, p. 31—47.
32. M i n d l i n R. D. Waves and vibrations in isotropic, elastic plates. Proc. 1 st. Sympos Naval Struct. Mech. Pergamon Press, 1960, p. 199—232.

33. Skalak R. Longitudinal impact of a semi-infinite circular elastic bar. *J. Appl. Mech.*, 1957, vol. 24, No. 1, p. 59—64.
34. Folk R., Fox G., Shook C. A., Curtis C. W. Elastic strain produced by sudden application of pressure to one end of a cylindrical bar. I. Theory. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1958, vol. 30, No. 6, p. 552—563.
35. De Vault G. P., Curtis C. W. Elastic cylinder with free lateral surface and mixed time-dependent conditions. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1962, vol. 34, No. 4, p. 421—432.
36. Ellis O. E., Jones A. T., Longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars, Part 1; Theoretical considerations. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1963, vol. 30, No. 1, p. 51—60.
37. Jones O. E., Ellis A. T. Longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars. Part 2: Experimental observations and comparisons with theory. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1963, vol. 30, No. 1, p. 61—69.
38. Rosenfeld R. L., Miklowitz J. Elastic wave propagation in rods of arbitrary cross section. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 32, No. 2, p. 290—294.
39. Miklowitz J. Transient compressional waves in an infinite elastic plate or elastic layer overlying a rigid half-space. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1962, vol. 29, No. 1, p. 53—60.
40. Нигул У. К. Применение трехмерной теории упругости к анализу волнового процесса изгиба полубесконечной плиты при кратковременно действующей краевой нагрузке. *ПММ*, 1963, т. 27, вып. 6, стр. 1044—1056.
41. Jones R. P. N. Transverse impact waves in a bar under conditions of plane-strain elasticity. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1964, vol. 17, pt. 4, p. 401—419.
42. Scott R. A., Miklowitz J. Transient compressional waves in the infinite elastic plate with a circular cylindrical cavity. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1964, vol. 31, No. 4, p. 627—634.
43. Miklowitz J. On wave propagation in an elastic plate with nonmixed edge conditions 73-d Meeting of the Acoust. Soc. of Amer. N. Y., 1967, Abstr. SVW 3, *J. Acoust. Soc. Amer.* 1967, vol. 41, No. 6, p. 1587.
44. Witham G. B. Nonlinear dispersive waves. *Proc. Roy Soc., Ser. A*, 1965, vol. 283, No. 1393.
45. Luke J. C. A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems. *Proc. Roy Soc., Ser. A*, 1966, vol. 292, No. 1430.
46. Bertholf L. D. Numerical solution for twodimensional elastic wave propagation in finite bars. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1967, vol. 34, No. 3.
47. Айнола Л. Я. Вариационный принцип динамики линейной теории упругости. *Докл. АН СССР*, 1967, т. 172, стр. 306—308.
48. Новожилов В. В., Утешева В. И. Динамическое кручение полубесконечного цилиндра. *Инж. ж. МТТ*, 1967, № 1.
49. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек. Киев, Изд-во АН УССР, 1963, стр. 354.
50. Колодяжный А. В., Филиппов А. П. Исследование действия нагрузки на цилиндрическую оболочку. *Сообщ. на III Всес. съезде по теор. и прикладн. механ.*, М., «Наука», 1968
51. Klosner J. M., Berglund J. A steady-state formulation for the transient response of a reinforced cylindrical shell immersed in fluid medium. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1967, vol. 34, No. 2, p. 487—490.
52. Векслер Н. Д., Мянниль А. И., Нигул У. К. Применение метода сеток в теории типа Тимошенко для исследования переходных волновых процессов деформации плит конечных размеров. *Прикладная механика*, 1965, т. 1, вып. 12, стр. 38—49.
53. Векслер Н. Д., Нигул У. К. К теории волновых процессов при осесимметричной деформации сферической оболочки. *Инж. ж. МТТ*, 1966, № 1.
54. Векслер Н. Д. К расчету сферической оболочки на динамическую нагрузку. *Изв. АН ЭстССР сер. физ.-матем. и техн. н.*, 1965, т. 14, № 4.
55. Векслер Н. Д. Исследование фронтных разрывов при осесимметричной деформации оболочек вращения и круглой плиты. *Переходные процессы деформации оболочек и пластин. Материалы Всесоюзного симпозиума, Тарту, 1967. Таллин, Изд-во АН ЭстССР, 1967, стр. 41—49.*
56. Векслер Н. Д. Осесимметричные нестационарные процессы деформации оболочек вращения. *Изв. АН ЭстССР, сер. физ.-матем. н.*, 1968, т. 17, № 1, стр. 34—40.
57. Мянниль А. И., Нигул У. К. О результатах сопоставления метода сеток и метода передела при анализе переходного волнового процесса деформации плит. *ПММ*, 1966, т. 30, вып. 2.
58. Spillers W. R., Wave propagation in a thin cylindrical shell. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 32, No. 2, p. 346—350.
59. Малышев А. П. Волновые процессы в упругой тонкостенной цилиндрической оболочке при внезапном приложении силы к ее торцу. *Сообщ. на III Всес. съезде по теорет. и прикладн. механ.*, М., «Наука», 1968.
60. Варданян В. В., Саркисян В. С. К решению задачи о поперечном упругом ударе по анизотропной (неортоотропной) пластинке и цилиндрической оболочке. *Сообщ. на III Всес. съезде по теорет. и прикладн. механ.*, М., «Наука», 1968.
61. Слепьян Л. И. Применение рядов Фурье для исследования волн деформаций. *Прикладная механика*, 1965, т. 1, вып. 8, стр. 112—119.
62. Слепьян Л. И. Исследование нестационарных деформаций с помощью рядов, определенных на переменном интервале. *Изв. АН СССР, Механика*, 1965, № 4, стр. 62—69.
63. Новожилов В. В., Слепьян Л. И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней, *ПММ* 1965, т. 29, вып. 2, стр. 261—281.
64. Айнола Л. Я. Вариационные принципы и теоремы взаимности для динамических задач теории оболочек. *Тр. VI Всес. конференц. по теории оболочек и пластин*, Баку, 1966. М., «Наука», 1966.
65. Сеицки Ю. Э. О решении динамической задачи для пологой сферической оболочки с упругим закреплением краев. *Сообщ. на III Всес. съезде по теорет. и прикладн. механ.* М., «Наука», 1968.
66. Алумяэ Н. А. О применимости метода расчленения напряженного состояния при решении осесимметричных задач динамики замкнутой цилиндрической оболочки. *Изв. АН ЭстССР, сер. физ.-матем. и техн. н.*, 1961, т. 12, № 3, стр. 171—181.
67. Нигул У. К. Линейные уравнения динамики упругой круговой цилиндрической оболочки, свободные от гипотез. *Тр. Таллинск. политехн. ин-та*, 1960, № 176, стр. 1—68.
68. Нигул У. К. Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек. *ПММ*, 1962, т. 26, вып. 5, стр. 923—930.
69. Нигул У. К. Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек и анализ точности различных вариантов теории Кирхгоффа—Лява. *Всес. конференц. по теории оболочек и пластин*, Ереван, 1962. Изд-во АН АрмССР, 1964, стр. 738—742.
70. Diercks K. J., Nickling R. Echoes from hollow aluminium spheres in water. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1967, vol. 41, No. 2, p. 380—394.
1. Nickling R. Echoes from spherical shells in air. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1967, vol. 42, No. 2.