ЛИТЕРАТУРА

1. Donnel L. H., Wan C. C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression J. Appl. Mech., 1950, vol. 17, No. 1.
2. Koiter W. T. The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression. Proc. Konikl Nederl Akad. Wetenshap. Ser. B, 1963, Bd. 66, N 5.
3. Кан С. Н. Несущая способность круговых цилиндрических оболочек при сжатии. Сб. «Теория оболочек и пластин». Тр. IV Всес. конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1964.
4. Болотин В. В. Нелинейная теория упругости и устойчивость в «большом», Сб. ««Расчеты на прочность», М., Машгиз, 1958, вып. 3.
5. Hutchinson J. Axial buckling of pressurised imperfect cylindrical shells. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 8.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГО-СВЯЗАННОГО ТВЕРДОГО ШАРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ КОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ НЕПОДВИЖНОЙ СФЕРОЙ

А. Б. Иванов

(Ленинград)

Рассмотрено вращение твердого шара вокруг диаметра из состояния покоя с малым угловым отклонением под действием упругой пары сил в вязкой жидкости, ограниченной снаружи концентрической неподвижной сферой.

Подробно исследован спектр колебаний. Получены спектральные разложения угловой скорости шара при любых положительных значениях параметров задачи, при этом установлена качественная аналогия движения шара и плоскости, колеблющейся между неподвижными параллельными стенками.

В связи с измерением вязкости газов Дж. К. Максвелл выполнил математический анализ малых крутильных колебаний подвешенного на упругой нити твердого плоского диска в вязкой жидкости, заключенной между параллельными неподвижными плоскостями. Максвелл принял, что диск совершает гармонически затухающие колебания, вывел характеристическое уравнение колебаний диска и получил приближенные формулы для расчета вязкости при заданном из эксперимента комплексном корне характеристического уравнения [1].

В том же плане Фершаффельт рассмотрел задачу о малых крутильных колебаниях упруго-связанного твердого шара в вязкой жидкости, ограниченной концентрической неподвижной сферой [2], применив полученные результаты для измерения вязкости сжиженных газов.

Ввиду теоретического и практического интереса задач, частично рассмотренных в работах [1,2] было желательным поставить и решить эти задачи с учетом начальных условий, не принимая заранее угловую скорость твердого диска или шара экспонентой с комплексным показателем, пропорциональным времени, подробно исследовать характеристические уравнения при всех допустимых значениях параметров и дать спектральные разложения решений. В таком объеме задача о продольных поступательных колебаниях упруго-связанной твердой плоскости в вязкой жидкости (математически тождественная линейной задаче о крутильных колебаниях бесконечного плоского диска) была изучена в работе [3]. Некоторые результаты этой работы использованы ниже при исследовании спектра колебаний шара в задаче Фершаффельта.

§ 1. **Постановка задачи.** Твердый шар радиусом R_* подвешен на упругой нити крутильной жесткости M_* и совершает малые крутильные колебания в однородной жидкости с вязкостью η_* и плотностью μ_*.

Жидкость ограничена концентрической с твердым шаром неподвижной сферой радиусом $R_*' > R_*$. Как на поверхности твердого шара, так и на наружной границе, выполнено условие прилипания. Момент инерции шара равен K_*. В начальный момент шар и жидкость находятся в покое, причем шар закручен по отношению к положению равновесия на угол A_0.

В дальнейшем жидкость побуждается к движению только шаром, вращаясь недеформирующимися сферами (угол A_0 настолько мал, что конвективные члены в ускорении жидкости несущественны по сравнению с локальным членом); искомая угловая скорость ω_* этих сфер зависит от времени t_* и радиуса r_*, $R_*' \geqslant r_* \geqslant R_*$. Угловая скорость шара $\omega_{0*}(t_*) = \omega_*(t_*, R_*)$.

Звездочкой обозначены величины ненулевой размерности. Параметры A_0, R_*, R_*', K_*, M_*, η_*, μ_* положительны; M_* можно заменить параметром $k_{0*} = \sqrt{M_* \mid K_*}$.

Введем безразмерные величины

$$t = k_{0*}t_*, \quad r = \frac{r_*}{R_*}, \quad r_e = \frac{R_*'}{R_*}, \quad \omega = \frac{\omega_*}{k_{0*}}, \quad \omega_0 = \frac{\omega_{0*}}{k_{0*}}$$

$$\eta = \frac{8\pi R_*^3}{3K_* k_{0*}}\eta_*, \quad \mu = \frac{8\pi R_*^5}{3K_*}\mu_*, \quad \nu = \frac{\eta}{\mu}$$

Под решением задачи будем понимать функцию $\omega(t, r)$, удовлетворяющую следующим условиям.

1) Функция $\omega(t, r)$ непрерывна в $(t \geqslant 0,\ r_e \geqslant r \geqslant 1)$ и обращается в нуль при $t = 0$, $r_e \geqslant r \geqslant 1$ и $t \geqslant 0$, $r = r_e$.

2) В $(t > 0,\ r_e \geqslant r \geqslant 1)$ существуют непрерывные производные ω_t, ω_r, ω_{rr} и выполняется уравнение

$$\omega_t = \nu(\omega_{rr} + 4r^{-1}\omega_r) \tag{1.1}$$

3) Величина $\omega(t, 1) \equiv \omega_0(t)$ при $t > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\omega_0'(t) + A_0 + \int_0^t \omega_0(\tau)\, d\tau - \eta\omega_r(t, 1) = 0 \tag{1.2}$$

Единственность такой функции вытекает из энергетической оценки.

§ 2. Интегральное представление решения. Решение выражается интегралом Лапласа — Меллина

$$\omega(t, r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty,\ \gamma \geqslant 0}^{\gamma + i\infty} -\frac{A_0}{r^{3/2}}\frac{D(z, r)\, e^{zt}}{D(z, 1)\,\varphi(z)}\, dz \tag{2.1}$$

$$D(z, r) = I_{3/2}(br)\, K_{3/2}(br_e) - I_{3/2}(br_e)\, K_{3/2}(br), \qquad b = \sqrt{z/\nu}, \quad |\arg b| \leqslant 1/2\pi$$

$$\varphi(z) = z^2 + 1 + \eta z\left[\frac{3}{2} - \frac{bD_1}{D(z, 1)}\right]$$

$$D_1 = I_{3/2}'(b)\, K_{3/2}(br_e) - I_{3/2}(br_e)\, K_{3/2}'(b)$$

Легко проверить, что $\omega(t, r)$ непрерывна вместе с ω_r в $(t \geqslant 0,\ r_e \geqslant r \geqslant 1)$ и будет аналитической функцией t и r в $(t > 0,\ r_e \geqslant r \geqslant 1)$. Производная ω_t непрерывна как функция t при любом r, $r_e \geqslant r \geqslant 1$, но терпит разрыв как функция r в точке $t = 0$, $r = 1$, так как

$$\omega_t(0, 1) = -A_0 < 0, \qquad \omega_t(0, 1 + 0) = 0$$

§ 3. Исследование спектра. Выражения $\omega = \operatorname{Re}[e^{zt} u(z, r)]$ при некоторых $u(z, r)$ удовлетворяют всем условиям поставленной задачи, кроме условия обращения $\omega(t, r)$ в нуль при $t = 0$, тогда и только тогда, когда $z = k$, где k — любой корень функции $\varphi(z)$. В этом смысле корни $\varphi(z)$ будут точками спектра задачи (целиком дискретного). Выясним, как они распределены на плоскости z.

Вводим параметры $\lambda = \sqrt{\nu}$, $\varkappa = \eta / \lambda$, $\xi = (r_e - 1)/\lambda$. Фиксируем $\varkappa > 0$, $\xi > 0$, изменяя параметр λ в промежутке $[0, \lambda_0]$, где λ_0 — произвольно фиксированное положительное число. Представим $\Phi(z, \lambda) \equiv \varphi(z)$ отношением однозначных целых функций от z, разлагающихся по степеням z в ряды с вещественными коэффициентами и непрерывных как функции двух переменных z, λ

$$\Phi(z, \lambda) = \Phi_2(z, \lambda) : \Phi_1(z, \lambda), \qquad \Phi_1(z, \lambda) = \mu\,[I_{3/2}(a)\,K_{3/2}(b) - I_{3/2}(b)\,K_{3/2}(a)]$$

$$\Phi_2(z, \lambda) = (z^2 + 1 + {}^3/_2\,\lambda\varkappa z)\,\Phi_1 + \mu\varkappa z\,\sqrt{z}\,[I_{3/2}'(b)\,K_{3/2}(a) - I_{3/2}(a)\,K_{3/2}'(b)]$$

$$\mu = \sqrt{1 + \xi\lambda}\,/\,\xi\lambda, \qquad a = br_e = (1/\lambda + \xi)\sqrt{z}, \qquad b = \lambda^{-1}\sqrt{z}$$

$$\Phi_2(0, \lambda) = \Phi_1(0, \lambda) = 1 + 1/(3\mu^2) > 0$$

Заметим, что Φ_1 и Φ_2 при любом $\lambda > 0$ не имеют общих корней на плоскости z. Последнее вытекает, например, из тождества

$$I_{3/2}(b)\,K_{3/2}'(b) - I_{3/2}'(b)\,K_{3/2}(b) = -1/b \neq 0$$

При $\lambda = 0$

$$\Phi_1(z, 0) = \frac{\operatorname{sh}(\xi\sqrt{z})}{\xi\sqrt{z}}, \qquad \Phi_2(z, 0) = (z^2 + 1)\,\Phi_1(z, 0) + \frac{\varkappa}{\xi}\,z\operatorname{ch}(\xi\sqrt{z})$$

Доказано [3], что корни $\Phi_2(z, 0)$ исчерпываются счетным множеством простых отрицательных корней $k_1 > k_2 > \ldots$ и двумя корнями k_{01}, k_{02}, отрицательными (при этом возможен случай $k_{01} = k_{02}$) или мнимыми сопряженными с отрицательной вещественной частью. Корни $\zeta_n = -\pi^2\xi^{-2}n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, функции $\Phi_1(z, 0)$ разделены корнями $\Phi_2(z, 0)$

$$0 > \zeta_1 > k_1 > \zeta_2 > k_2 > \ldots$$

Пусть на плоскости z построена последовательность окружностей Γ_m, $m = 1, 2, \ldots$, с центром $z = 0$ и неограниченно возрастающим радиусом, для которой функция $\operatorname{cth}(\xi\sqrt{z})$ равномерно ограничена на совокупности Γ_m. Поскольку на Γ_m при $m \to \infty$ равномерно относительно $\lambda \in [0, \lambda_0]$

$$\Phi_1(z, \lambda) = \frac{\operatorname{sh}(\xi\sqrt{z})}{\xi\sqrt{z}}\,[1 + o(1)], \qquad \Phi_2(z, \lambda) = \frac{1}{\xi}\,z\sqrt{z}\operatorname{sh}(\xi\sqrt{z})\,[1 + o(1)]$$

то при достаточно больших номерах m, начиная с некоторого m_N (функции $\Phi_1(z, \lambda)$ и $\Phi_2(z, \lambda)$ не обращаются в нуль на Γ_m ни при каких значениях $\lambda \in [0, \lambda_0]$, т. е. траектории корней функций Φ_1 и Φ_2 на плоскости z при возрастании λ в указанном промежутке не пересекают Γ_m. Фиксируем любую окружность Γ_p, $p \geqslant m_N$ и проследим за движением корней, имея в виду те факты, что мнимые корни каждой из функций $\Phi_1(z, \lambda)$ и $\Phi_2(z, \lambda)$ на плоскости z могут быть лишь в виде сопряженных пар, а Φ_1 и Φ_2 не имеют общих корней. Очевидно, при возрастании λ в промежутке $[0, \lambda_0]$ корни Φ_1 и Φ_2 движутся на плоскости z таким образом, что, как и при $\lambda = 0$, все корни Φ_1 внутри Γ_p остаются простыми отрицательными и разделенными корнями Φ_2, а число мнимых корней Φ_2 равно двум или нулю. Из легко формализуемых энергетических соображений вытекает, что вещественная часть мнимых корней Φ_2 отрицательна. Рассматривая возможные при этих условиях варианты расположения корней Φ_2 на плоскости z (нетрудно показать, что все они осуществляются при тех или иных положительных значениях параметров), приходим окончательно к следующему заключению.

При положительных $\varkappa$, ξ, λ функция $\varphi(z)$ имеет счетное множество простых полюсов ζ_{nm}, $0 > \zeta_1 > \zeta_2 > \ldots$, исчерпывающее все полюсы $\varphi(z)$. В каждом из интервалов (ζ_{n+1}, ζ_n), $n = 1, 2, \ldots$ функция $\varphi(z)$ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$. При этом в каждом интервале $(\zeta_{n+1}, \zeta_{mn})$ за исключением, может быть, одного (ζ_{j+1}, ζ_j), где у $\varphi(z)$ три нуля $k_{02} \leqslant k_{01} \leqslant k_j$, функция $\varphi(z)$ имеет один и только один корень k_n, $\varphi'(k_n) < 0$, $n \neq j$. Корни $\varphi(z)$ исчерпываются отрицательными корнями k_n, $n = 1, 2, \ldots$ (номер

$n = j$ учитывается) и двумя корнями k_{01}, k_{02}, находящимися вне интервала $(\zeta_1, 0)$ при $0 < \varkappa < \varkappa_0$ или на $(\zeta_1, 0)$ при $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ (число $\varkappa_0$ определяется значениями параметров $\xi > 0$, $\lambda > 0$). Если $k_{01} \notin (\zeta_1, 0)$, $k_{02} \notin (\zeta_1, 0)$, корни k_{01}, k_{02} либо мнимые, $k_{01} = \bar{k}_{02} = -\alpha + \beta i$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$, либо вещественные, $\zeta_{j+1} < k_{02} \leqslant k_{01} \leqslant k_j < \zeta_j$ (номер $j \geqslant 1$ зависит от параметров).

§ 4. Спектральное разложение угловой скорости шара. На основании полученной информации о спектре контурным интегрированием с привлечением окружностей Γ_m (при $z \to \infty$ на совокупности Γ_m по построению $\varphi(z) = z^2 + o(z^2)$) определяются все типы спектрального разложения угловой скорости шара

$$\omega_0 t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{-A_0 e^{zt}}{\varphi(z)}\,dz$$

1) При $k_{01} = \bar{k}_{02} = -\alpha + \beta i$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\omega_0(t) = a_0 e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \vartheta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{k_n t} \tag{4.1}$$

$$\underset{n \geqslant 1}{a_n} = -\frac{A_0}{\varphi'(k_n)} > 0, \qquad a_0 = -\frac{2A_0}{|\varphi'(k_{01})|}, \qquad \vartheta_0 = -\arg\varphi'(k_{01})$$

2) При $\zeta_{j+1} < k_{02} \leqslant k_{01} \leqslant k_j < \zeta_j$

$$\omega_0(t) = S_j + \Sigma_{(j)}\, a_n e^{k_n t} \tag{4.2}$$

В формуле (4.2) символ $\Sigma_{(j)}$ обозначает суммирование по всем номерам $n \geqslant 1$ за исключением номера j. При $n \neq j$ коэффициент $a_n = -A_0 / \varphi'(k_n) > 0$. Сумма вычетов функции $-A_0 e^{zt} / \varphi(z)$ относительно k_j, k_{01}, k_{02} обозначена S_j.

Если $\zeta_{j+1} < k_{02} < k_{01} < k_j < \zeta_j$, то

$$S_j = a_j^{(1)} e^{k_j t} + a_j^{(2)} e^{k_{01} t} + a_j^{(3)} e^{k_{02} t}$$

$$a_j^{(1)} = -A_0/\varphi'(k_j) > 0, \qquad a_j^{(2)} = -A_0/\varphi'(k_{01}) < 0, \qquad a_j^{(3)} = -A_0/\varphi'(k_{02}) > 0$$

Если $\zeta_{j+1} < k_{02} = k_{01} < k_j < \zeta_j$, то

$$S_j = a_j^{(1)} e^{k_j t} + a_j^{(2)} t e^{k_{01} t} + a_j^{(3)} e^{k_{01} t}$$

$$a_j^{(1)} = -\frac{A_0}{\varphi'(k_j)} > 0, \qquad a_j^{(2)} = -\frac{2A_0}{\varphi''(k_{01})} < 0, \qquad a_j^{(3)} = \frac{2A_0\varphi'''(k_{01})}{3[\varphi''(k_{01})]^2} = -\Sigma_{(j)}\, a_n - a_j^{(1)} < 0$$

Если $\zeta_{j+1} < k_{02} < k_{01} = k_j < \zeta_j$, то

$$S_j = a_j^{(1)} t e^{k_j t} + a_j^{(2)} e^{k_j t} + a_j^{(3)} e^{k_{02} t}$$

$$a_j^{(1)} = -\frac{2A_0}{\varphi''(k_j)} > 0, \qquad a_j^{(2)} = \frac{2A_0\varphi'''(k_j)}{3[\varphi''(k_j)]^2} < 0, \qquad a_j^{(3)} = -\frac{A_0}{\varphi'(k_{02})} > 0$$

Если $\zeta_{j+1} < k_{02} = k_{01} = k_j < \zeta_j$, то

$$S_j = a_j^{(1)} t^2 e^{k_j t} + a_j^{(2)} t e^{k_j t} + a_j^{(3)} e^{k_j t}$$

$$a_j^{(1)} = -\frac{3A_0}{\varphi'''(k_j)} > 0, \quad a_j^{(2)} = \frac{3A_0\varphi^{\mathrm{IV}}(k_j)}{2[\varphi'''(k_j)]^2}, \quad a_j^{(3)} = \frac{3A_0\varphi^{\mathrm{V}}(k_j)}{10[\varphi'''(k_j)]^2} - \frac{3A_0[\varphi^{\mathrm{IV}}(k_j)]^2}{8[\varphi'''(k_j)]^3} < 0$$

3) При $\zeta_1 < k_{02} \leqslant k_{01} < 0$

$$\omega_0(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{k_n t}, \qquad a_n = -\frac{A_0}{\varphi(k_n)} > 0 \qquad (n \geqslant 1) \tag{4.3}$$

Если $\zeta_1 < k_{02} < k_{01} < 0$, то

$$S_0 = a_0^{(1)} e^{k_{01} t} + a_0^{(2)} e^{k_{02} t}$$

$$a_0^{(1)} = -\frac{A_0}{\varphi'(k_{01})} < 0, \quad a_0^{(2)} = -\frac{A_0}{\varphi'(k_{02})} > 0, \quad a_0^{(1)} = -a_0^{(2)} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если $\zeta_1 < k_{02} = k_{01} < 0$, то

$$S_0 = a_0^{(1)} t e^{k_{01} t} + a_0^{(2)} e^{k_{01} t}$$

$$a_0^{(1)} = -\frac{2A_0}{\varphi''(k_{01})} < 0, \quad a_0^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2A_0 \varphi'''(k_{01})}{3[\varphi''(k_{01})]^2} < 0$$

При $n \to \infty$, как вытекает из элементарных подсчетов

$$k_n = -\frac{\pi^2}{\xi^2} n^2 - 2\left(\frac{\lambda^2}{1+\xi\lambda} + \frac{\varkappa}{\xi}\right)[1 + o(1)], \qquad \varphi'(k_n) = -\frac{\pi^4}{2\varkappa\xi^3} n^4 [1 + o(1)] \tag{4.4}$$

Формулы (4.4) показывают, что при $t > 0$ ряды (4.1) — (4.3) можно почленно дифференцировать бесчисленное множество раз, при $t = 0$ — один раз. Все производные от $\omega_0(t)$, начиная со второй, стремятся к бесконечности при $t \to 0$. Выделяя главные при $t \to \infty$ члены в рядах (4.1), (4.2), (4.3), устанавливаем следующее. Если корни k_{01}, k_{02} находятся вне интервала $(\zeta_1, 0)$, то шар проходит через положение равновесия конечное, и притом нечетное, или же бесконечное число раз. Если корни k_{01}, k_{02} принадлежат интервалу $(\zeta_1, 0)$, то шар не проходит через положение равновесия, а лишь монотонно и неограниченно к нему приближается с угловой скоростью, не обращающейся в нуль при $t > 0$.

Заметим, что этот вывод верен и для аналогичных задач о малых крутильных или продольных колебаниях упруго-связанной твердой плоскости в вязкой жидкости, ограниченной неподвижными стенками, параллельными колеблющейся плоскости [3], или бесконечного цилиндра — в жидкости, ограниченной неподвижной соосной цилиндрической стенкой. Исследование для бесконечного цилиндра по существу не отличается от выполненного в данной статье и приводит к тем же основным результатам.

Поступила 18 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J. Clerk. On the viscosity or internal friction of air and other gases (Bakerian Lecture). Philos. Trans., 1866, vol. 156, p. 249—268.
2. Verschaffelt J. E. The rotational oscillation of a Sphere in a viscous liquid. Communications from the Physical laboratory of Leiden by H. Cammerling Onnes, 1915, No. 148 b, p. 18—39.
3. Иванов А. Б. О движении твердой плоскости в вязкой жидкости под действием продольной упругой силы. Вестн. Ленингр. ун-та, сер. матем., механ. и астрономии, 1964, № 19, вып. 4, стр. 31—41.