

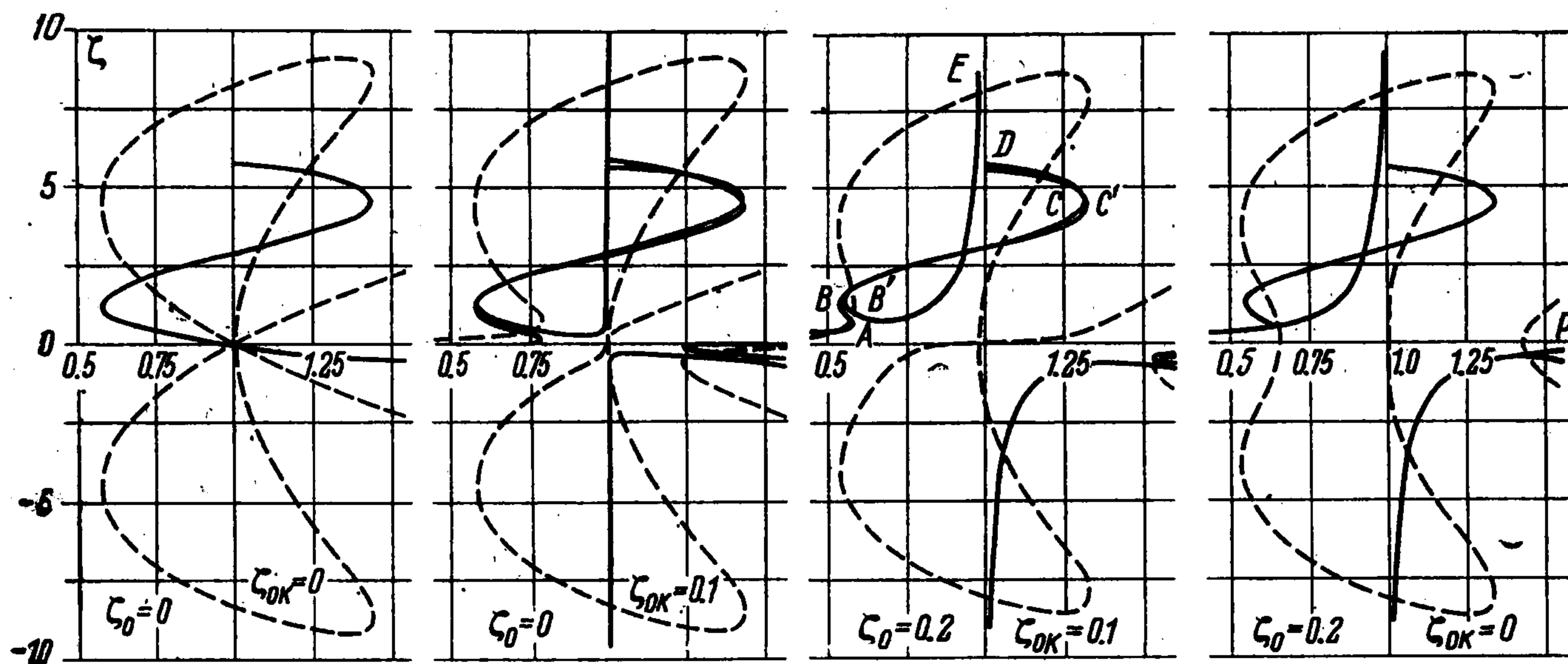
РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НАЧАЛЬНЫМИ ПРОГИБАМИ ПРИ СЖАТИИ

Л. М. Куршин, В. Л. Присекин
(Новосибирск)

При расчете длинной упругой цилиндрической оболочки на устойчивость при продольном сжатии существенное влияние на верхнее критическое значение нагрузки оказывают начальные прогибы [1].

В работе Койтера [2] и затем С. Н. Кана [3] было показано, что симметричный относительно оси оболочки начальный прогиб может значительно уменьшить верхнее значение критической нагрузки за счет изменения докритического напряженного и деформированного состояния оболочки.

В работе выполнено исследование влияния начального прогиба более общего вида, имеющего осесимметричную и неосесимметричную составляющие. Так как в общем случае на кривых равновесных состояний точки бифуркации отсутствуют, то определение критической нагрузки при исследовании устойчивости оболочки состоит в разыскании предельной точки, достигаемой в процессе последовательного нагружения оболочки. Физический смысл предельной точки состоит в том, что при данной нагрузке оболочка имеет нулевую жесткость на сжатие. При вырождении первой предельной точки (случай больших начальных прогибов) значение критической нагрузки предлагается определять из условия достижения минимальной жесткости оболочки в процессе нагружения.



Фиг. 1

Рассмотрим цилиндрическую оболочку радиуса R с начальным прогибом.

$$w_0 = \frac{1}{2} f_0 \cos 2\alpha_1 x + \frac{1}{2} f_{0k} \sin \alpha_1 x \sin \beta_1 y \quad (1)$$

Таким образом, в расчет вводится неосесимметричная составляющая начального прогиба того вида, который при решении задачи устойчивости оболочки [2, 3] рассматривается в качестве смежной формы равновесия.

Решение нелинейных уравнений пологой оболочки

$$\frac{1}{B} \Delta \Delta \Phi = \frac{1}{R} (w - w_0)_{xx} + w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} - (w_{0xy}^2 - w_{0xx} w_{0yy}) \quad (2)$$

$$D \Delta \Delta (w - w_0) = - \frac{1}{R} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} w_{xx} + \Phi_{xx} w_{yy} - 2\Phi_{xy} w_{xy}$$

$$\left(B = Eh, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right)$$

разыскивается в виде

$$w = \frac{1}{2} f \cos 2\alpha_1 x + \frac{1}{2} f_k \sin \alpha_1 x \sin \beta_1 y + f_1. \quad (3)$$

Параметры α_1 и β_1 сохраняются теми же, что и в выражении начального прогиба w_0 . Такой подход соответствует принятой расчетной схеме, в которой исследуется процесс развития заданной начальной неправильности.

Определив из первого уравнения (2) функцию φ и интегрируя второе в смысле Галеркина, получим уравнения, определяющие относительные прогибы ζ и ζ_k оболочки в равновесных состояниях.

$$\begin{aligned} \gamma_1 (\zeta - \zeta_0) - \zeta p - \frac{1}{64\theta^2} (\zeta_k^2 - \zeta_{0k}^2) - \frac{1}{8} \gamma_4 (\zeta_k - \zeta_{0k}) \zeta_k + \gamma_2 (\zeta \zeta_k - \zeta_0 \zeta_{0k}) \zeta_k = 0 \quad (4) \\ \gamma_3 (\zeta_k - \zeta_{0k}) - p \zeta_k - \gamma_4 (\zeta \zeta_k - \zeta_0 \zeta_{0k}) - \gamma_4 (\zeta_k - \zeta_{0k}) \zeta - \\ - \frac{1}{4\theta^2} (\zeta - \zeta_0) \zeta_k + 8\gamma_2 (\zeta \zeta_k - \zeta_0 \zeta_{0k}) \zeta + \frac{\alpha^2}{128} \gamma_5 (\zeta_k^2 - \zeta_{0k}^2) \zeta_k = 0 \end{aligned}$$

Здесь

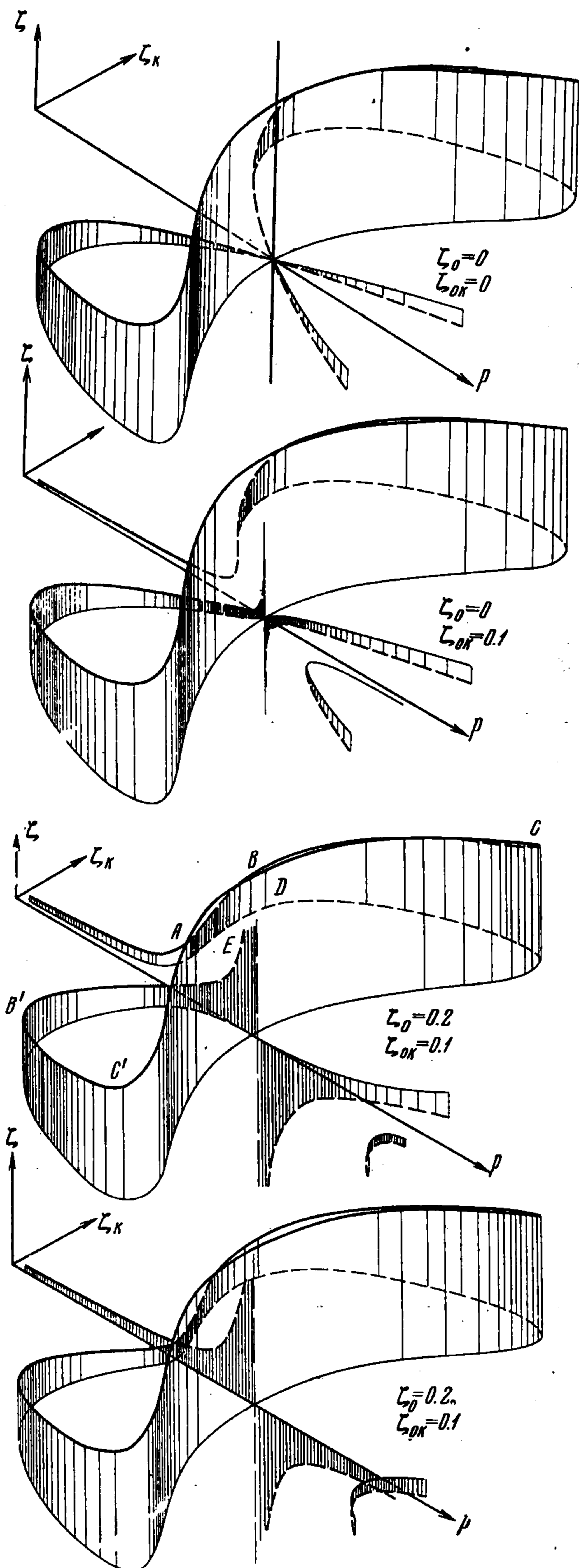
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) \\ \gamma_2 &= \frac{\alpha^2}{16} \left[\frac{1}{(1+9\theta^2)^2} + \frac{1}{(1+\theta^2)^2} \right] \\ \gamma_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{4\theta^2 \gamma_4} + \frac{4\theta^2 \gamma_4}{\alpha^2} \right) \\ \gamma_4 &= \frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2}, \quad \gamma_5 = \frac{1+\theta^4}{\theta^4} \quad (5) \\ p &= \frac{\sigma}{\sigma_e}, \quad \alpha^2 = \frac{2Rh\alpha_1^2}{\lambda} \\ \lambda &= \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad \theta = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ \zeta_0 &= \frac{\lambda f_0}{h}, \quad \zeta_{0k} = \frac{\lambda f_{0k}}{h} \\ \zeta &= \frac{\lambda f}{h}, \quad \zeta_k = \frac{\lambda f_k}{h}, \quad \sigma_e = \frac{Eh}{\lambda R} \end{aligned}$$

(h — толщина оболочки, σ — напряжение сжатия).

Анализ системы (4) показывает, что величина ζ однозначно определяется из первого уравнения при заданных значениях ζ_k и p . Второе уравнение после исключения ζ имеет седьмой порядок относительно ζ_k и поэтому должно существовать не более семи пар действительных значений ζ и ζ_k , определяющих равновесные состояния оболочки. Эти соображения были использованы при составлении программы решения системы (4).

При расчетах равновесных состояний было принято $\alpha = \theta = 1$. Результаты расчета представлены в виде графиков на фиг. 1. Сплошные кривые соответствуют прогибу ζ , пунктирные — ζ_k . На фиг. 2 изображены кривые равновесных состояний в пространстве ζ, ζ_k, p .

Из полученных результатов следует, что в случае, когда имеется неосесимметричный начальный прогиб $\zeta_{0k} \neq 0$, при некоторой величине p достигается первая предельная точка A на линии $\zeta = \zeta(p)$ и соответственно на линии $\zeta_k = \zeta_k(p)$. Следующая ветвь AB будет



Фиг. 2

неустойчивой. С возрастанием p после точки B оболочка вновь попадает на устойчивую ветвь BC . Линия $BCDC'B'$ образует петлю. Точка E — предельная точка при $\zeta \rightarrow \infty$ и $\zeta_k \rightarrow 0$. Отметим, что во всех случаях предельной точке линии ζ , уходящей в бесконечность, соответствует значение $\zeta_k \rightarrow 0$. Это означает, что при развитии больших осесимметричных прогибов, оболочка выправляет начальные неосесимметричные вмятины.

При достижении первой предельной точки A возможен переход (хлопок) на устойчивую новую ветвь BC . Эта величина p будет границей интервала устойчивости оболочки при заданных начальных неправильностях.

В случае, когда начальный неосесимметричный прогиб равен нулю $\zeta_{0k} = 0$ при значении p , соответствующем решению Койтера [2], имеет место точка бифуркации (смежная форма равновесия, при которой $\zeta_k \neq 0$).

Для определения значения p , при котором имеет место предельная точка, кроме уравнений равновесия (4), должны выполняться условия

$$\frac{dp}{d\zeta} = \frac{dp}{d\zeta_k} = 0 \quad (6)$$

Величины $d\zeta/dp$ и $d\zeta_k/dp$ определяются из уравнений равновесия (4). Условия (6) эквивалентны уравнению

$$M = 0 \quad (7)$$

где

$$M = (\gamma_1 - p + \gamma_2 \zeta_k^2) [\gamma_3 - p - 2\gamma_4 \zeta - 1/4 (\zeta - \zeta_0) \theta^{-2} + 8\gamma_2 \zeta^2 + 1/128 \chi^2 \gamma_5 (3\zeta_k^2 - \zeta_{0k}^2)] - 1/8 [1/4 \zeta_k \theta^{-2} + \gamma_4 (2\zeta_k - \zeta_{0k}) - 8\gamma_2 (2\zeta_k \zeta - \zeta_0 \zeta_{0k})]^2$$

То же самое уравнение (7) можно получить, если вместо условий (6) использовать линейные уравнения нейтрального равновесия

$$\frac{1}{B} \Delta \Delta \Phi^* = \frac{1}{R} w_{xx}^* + 2w_{xy} w_{xy}^* - w_{xx} w_{yy}^* - w_{xx}^* w_{yy} \\ D \Delta \Delta w^* = -\frac{1}{R} \Phi_{xx}^* + \Phi_{yy} w_{xx}^* + \Phi_{xx} w_{yy}^* - 2\Phi_{xy} w_{xy}^* + \Phi_{yy}^* w_{xx} + \Phi_{xx}^* w_{yy} - 2\Phi_{xy}^* w_{xy} \quad (8)$$

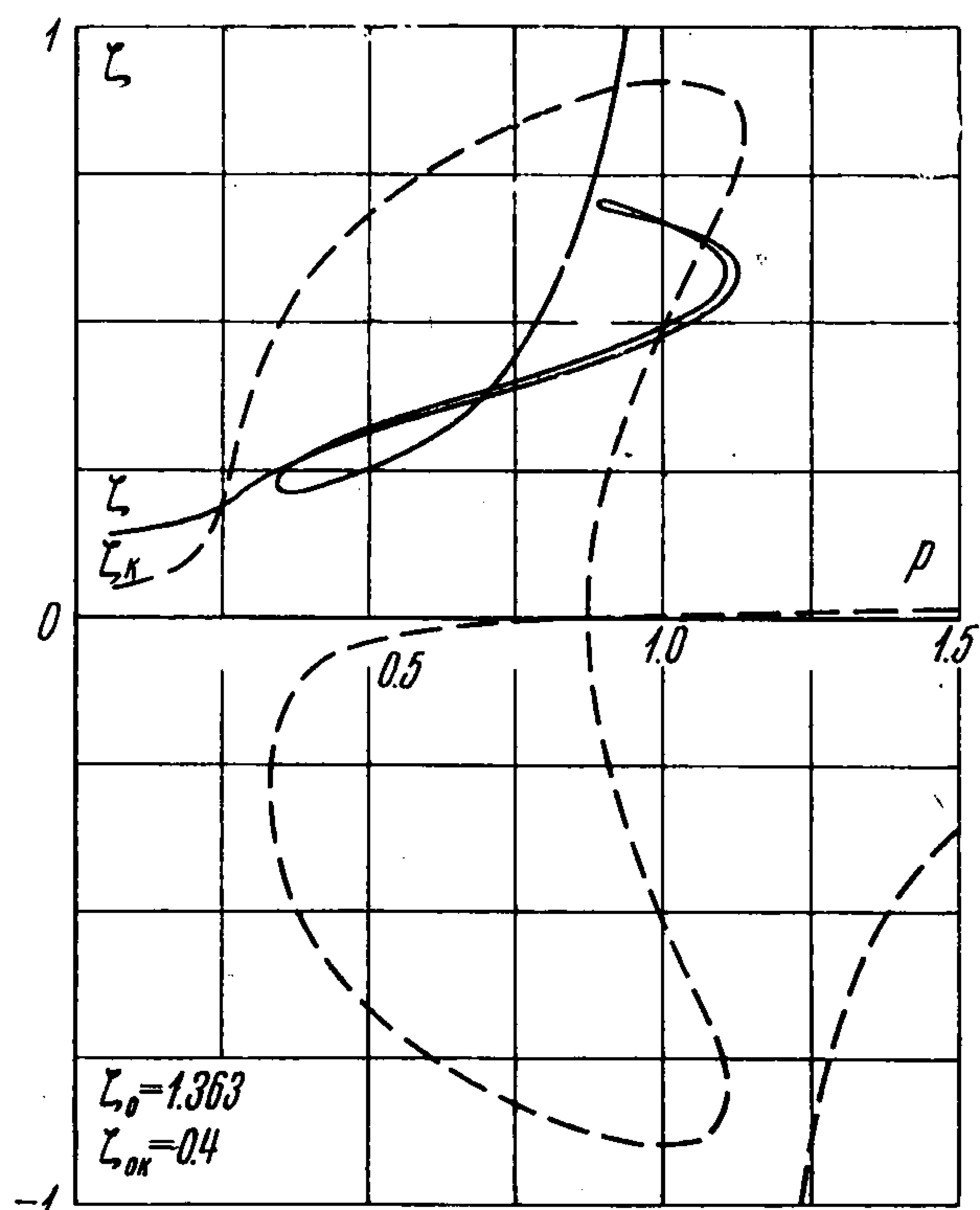
где w и Φ относятся к докритическому состоянию, т. е. будут решением уравнений (2), а w^* и Φ^* — к малым отклонениям от этого состояния, и решение уравнений (8) разыскивать в виде

$$w^* = 1/2 f^* \cos 2\alpha_1 x + 1/2 f_k^* \sin \alpha_1 x \sin \beta_1 y \quad (9)$$

Этот результат есть следствие того, что уравнения устойчивости (8) будут вариациями нелинейных уравнений (2). Общая теория этого вопроса изложена в работе В. В. Болотина [4]. Отметим лишь, что разыскание бифуркационных точек при помощи линейных уравнений устойчивости (8) математически соответствует разысканию предельных точек на кривых равновесных состояний, полученных на основе нелинейных уравнений (2).

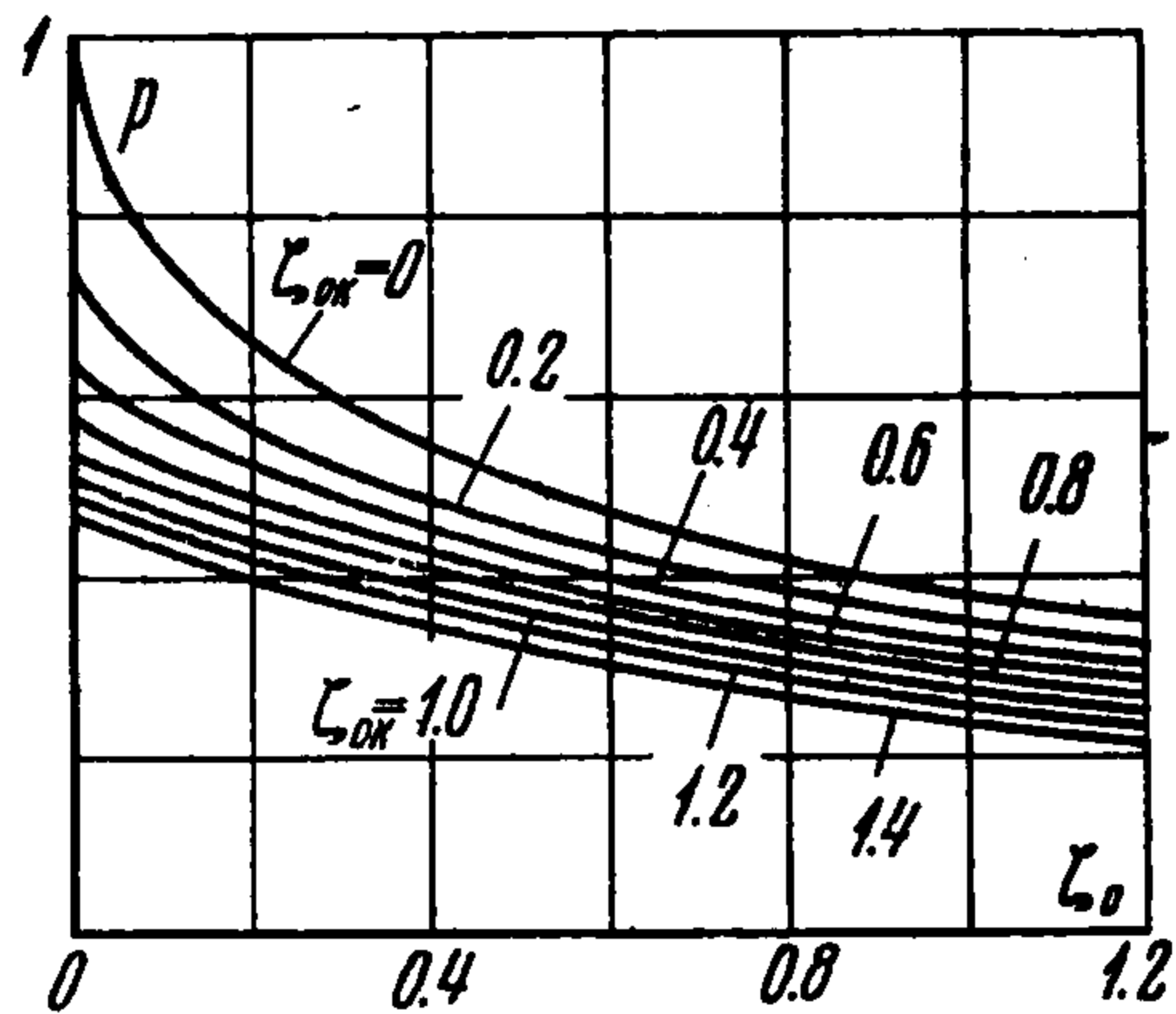
При расчете первой предельной точки при больших значениях ζ_0 и ζ_{0k} условие $M = 0$ не имеет места. В этом случае неустойчивая ветвь AB исчезает (фиг. 3), а величина M при некотором p имеет минимальное значение, которое соответствует наибольшей скорости изменения прогибов по нагрузке $(d\zeta/dp)_{\max}$ и $(d\zeta_k/dp)_{\max}$. Соответствующая величина p принимается в этих случаях за критическую.

На фиг. 4 показаны результаты расчета критических напряжений в зависимости от ζ_0 и ζ_{0k} . Как видно, на значение предельной нагрузки неосесимметричная составляю-

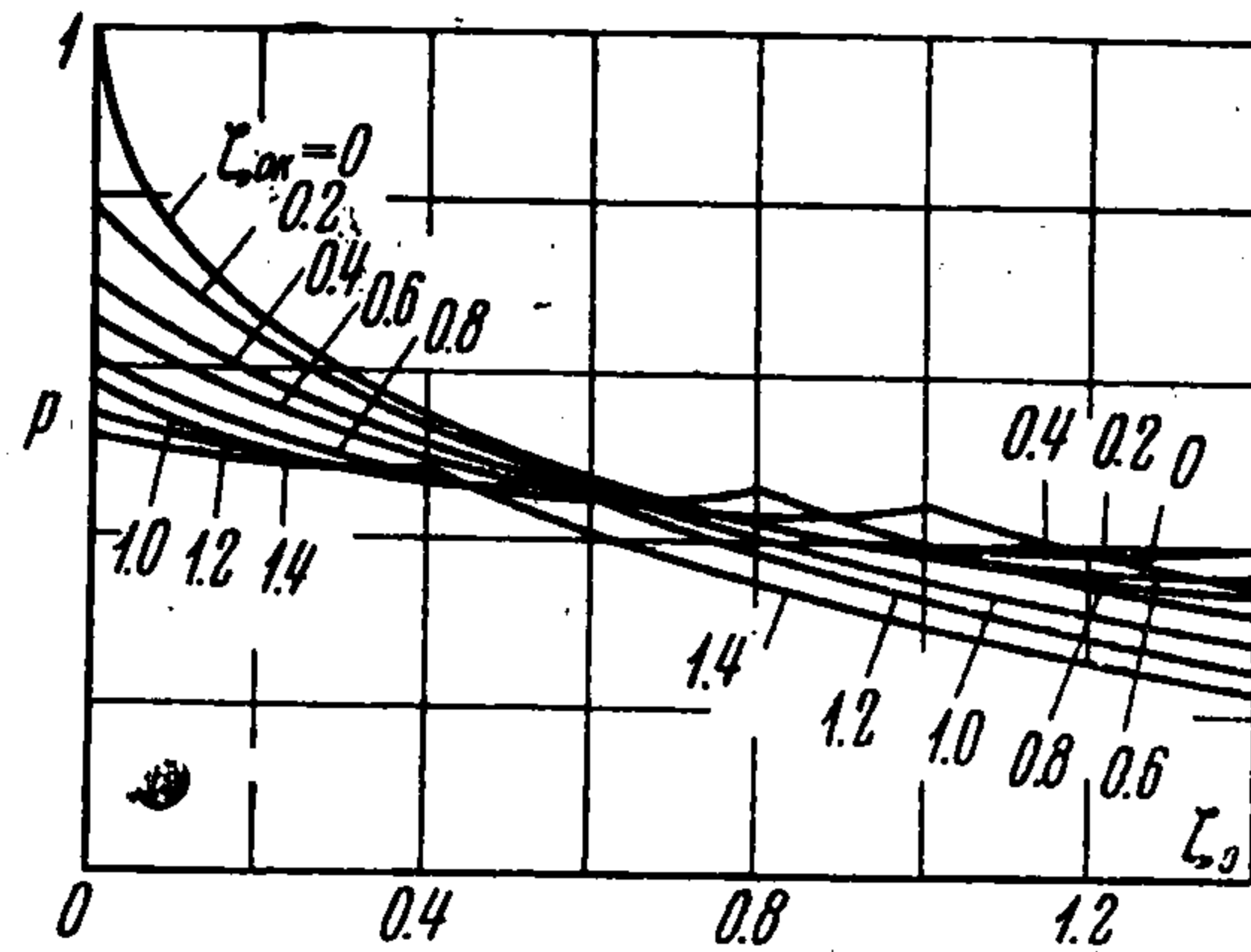


Фиг. 3

щая начального прогиба ζ_{0k} оказывает влияние того же порядка, что и симметричная. Отметим, что до последнего времени по этому вопросу не имелось правильного представления. Так в работе [5] было показано, что несимметричная составляющая оказывает несущественное влияние на критическую нагрузку по сравнению с осесимметричным прогибом. Этот результат явился следствием упрощения задачи при вычислениях.



Фиг. 4



Фиг. 5

Таким образом, для правильного количественного суждения об устойчивости замкнутой оболочки при продольном сжатии, необходимо рассматривать более широкий класс возмущений, чем симметричный начальный прогиб.

Рассмотрим некоторые возможности упрощения задачи определения критической нагрузки. С учетом того, что предельное условие (7) может быть получено при помощи уравнений нейтрального равновесия (8), докритическое состояние оболочки с начальным прогибом будем вместо нелинейных уравнений (2) описывать линеаризованными уравнениями, которые получим из уравнений (2), полагая, что прогибы w мало отличаются от начальных прогибов w_0 . Полагая в (2)

$$w = w_0 + (w - w_0), \quad \varphi = -\frac{1}{2} \sigma h y^2 + \Phi$$

и опуская нелинейные слагаемые, содержащие $w - w_0$, получаем линеаризованные уравнения

$$\frac{1}{B} \Delta \Delta \Phi = \frac{1}{R} (w - w_0)_{xx} + 2w_{0xy} (w - w_0)_{xy} - w_{0xx} (w - w_0)_{yy} - w_{0yy} (w - w_0)_{xx} \quad (10)$$

$$D \Delta \Delta (w - w_0) = -\frac{1}{R} \Phi_{xx} - \sigma h w_{xx} + \Phi_{yy} w_{0xx} + \Phi_{xx} w_{0yy} - 2\Phi_{xy} w_{0xy}$$

К полученному линеаризованному решению для определения критического значения p присоединяем уравнения устойчивости в виде (8).

Используя для w_0 , w и w^* представления (1), (3), (9), получаем условие нетривиального решения уравнений устойчивости в виде

$$L = 0 \quad (11)$$

где

$$L = (\gamma_1 - p + \gamma_2 \zeta_k^2) [\gamma_3 - p - 2\gamma_4 \zeta - \frac{1}{4} (\zeta - \zeta_0) \theta^{-2} + 8\gamma_2 \zeta^2 + \frac{1}{64} \gamma_5 (\zeta_k^2 + \zeta_k \zeta_{0k} - \zeta_{0k}^2)] - \\ - \frac{1}{8} [\frac{1}{4} \zeta_k \theta^{-2} + \gamma_4 (2\zeta_k - \zeta_{0k}) - 8\gamma_2 (\zeta \zeta_k + \zeta_0 \zeta_k - 2\zeta_0 \zeta_{0k} + \zeta \zeta_{0k})]^2$$

Критическое значение p определяется из условия (11), если же условие $L = 0$ не выполняется, то, как и ранее, p определяется условием минимума значения L .

Результаты расчетов критического значения p по условию (11) представлены на фиг. 5. Каждая кривая на фиг. 5 состоит из двух частей: первая (до угловой точки) определяется условием $L = 0$, вторая условием L_{\min} . Сравнивая результаты расчетов по условиям $M = 0$ (фиг. 4) и $L = 0$ (фиг. 5), можно сделать вывод о том, что линеаризация уравнений докритического состояния дает приемлемые результаты лишь в относительно небольшой области малых значений прогибов ζ_{0k} . Естественно, что при $\zeta_{0k} = 0$ результаты расчетов полностью совпадают, так как в этом случае исходные уравнения одинаковы.

Поступила 17 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Donnell L. H., Wan C. C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression J. Appl. Mech., 1950, vol. 17, No. 1.
2. Koiter W. T. The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression. Proc. Koninkl Nederl Akad. Wetenshap. Ser. B, 1963, Bd. 66, N 5.
3. Кан С. Н. Несущая способность круговых цилиндрических оболочек при сжатии. Сб. «Теория оболочек и пластин». Тр. IV Всес. конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1964.
4. Болотин В. В. Нелинейная теория упругости и устойчивость в «большом», Сб. «Расчеты на прочность», М., Машгиз, 1958, вып. 3.
5. Hutchinson J. Axial buckling of pressurised imperfect cylindrical shells. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 8.

**ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
УПРУГО-СВЯЗАННОГО ТВЕРДОГО ШАРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ,
ОГРАНИЧЕННОЙ КОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ НЕПОДВИЖНОЙ СФЕРОЙ**

А. Б. Иванов

(Ленинград)

Рассмотрено вращение твердого шара вокруг диаметра из состояния покоя с малым угловым отклонением под действием упругой пары сил в вязкой жидкости, ограниченной снаружи концентрической неподвижной сферой.

Подробно исследован спектр колебаний. Получены спектральные разложения угловой скорости шара при любых положительных значениях параметров задачи, при этом установлена качественная аналогия движения шара и плоскости, колеблющейся между неподвижными параллельными стенками.

В связи с измерением вязкости газов Дж. К. Максвелл выполнил математический анализ малых крутильных колебаний подвешенного на упругой нити твердого плоского диска в вязкой жидкости, заключенной между параллельными неподвижными плоскостями. Максвелл принял, что диск совершает гармонически затухающие колебания, вывел характеристическое уравнение колебаний диска и получил приближенные формулы для расчета вязкости при заданном из эксперимента комплексном корне характеристического уравнения [1].

В том же плане Фершаффельт рассмотрел задачу о малых крутильных колебаниях упруго-связанного твердого шара в вязкой жидкости, ограниченной концентрической неподвижной сферой [2], применив полученные результаты для измерения вязкости сжиженных газов.

Ввиду теоретического и практического интереса задач, частично рассмотренных в работах [1,2] было желательным поставить и решить эти задачи с учетом начальных условий, не принимая заранее угловую скорость твердого диска или шара экспонентой с комплексным показателем, пропорциональным времени, подробно исследовать характеристические уравнения при всех допустимых значениях параметров и дать спектральные разложения решений. В таком объеме задача о продольных поступательных колебаниях упруго-связанной твердой плоскости в вязкой жидкости (математически тождественная линейной задаче о крутильных колебаниях бесконечного плоского диска) была изучена в работе [3]. Некоторые результаты этой работы использованы ниже при исследовании спектра колебаний шара в задаче Фершаффельта.

§ 1. Постановка задачи. Твердый шар радиусом R_* подвешен на упругой нити крутильной жесткости M_* и совершает малые крутильные колебания в однородной жидкости с вязкостью η_* и плотностью μ_* .