Можно показать (приложение), что если $h(t)$ — ограниченная непрерывная функция, то уравнение (2.19), имеет единственное решение в этом классе функций.

Таким образом, решение задачи дается формулами (1.4) — (1.7), (2.1) и (2.2), в которых функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются соотношением (2.5) и интегральным уравнением (2.19).

3. Приложение. Рассмотрим в пространстве ограниченных непрерывных функций с нормой

$$\rho(\omega, \omega^*) = \max |\omega(t) - \omega^*(t)|$$

оператор $y = U(\omega)$, задаваемый формулой

$$y(t) = h(t) - \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \left[\left(\frac{t-1}{\tau-1}\right)^{1/2}\int_0^\infty \Lambda(\nu)\, e^{-\nu(t+\tau-2)}\,d\nu\right]\omega(\tau)\,d\tau$$

и оценим модуль разности y и y^*, где $y^* = U(\omega^*)$

$$|y(t) - y^*(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \left(\frac{t-1}{\tau-1}\right)^{1/2}\left|\int_0^\infty \Lambda(\nu)\, e^{-\nu(t+\tau-2)}\,d\nu\right| \cdot |\omega(\tau) - \omega^*(\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Lambda_{\max}}{2\pi}\rho(\omega, \omega^*)\int_1^\infty \frac{\sqrt{t-1}\,d\tau}{\sqrt{\tau-1}\,(t+\tau-2)}$$

Последний интеграл легко вычисляется и равен π. Поэтому

$$\rho(y, y^*) \leqslant {}^1/_2\,\Lambda_{\max}\,\rho(\omega, \omega^*)$$

Согласно (2.20) $\Lambda_{\max} = 1.3305 < 2$, поэтому

$$\rho(y, y^*) \geqslant \alpha\rho(\omega, \omega^*) \qquad (\alpha < 1)$$

Таким образом, оператор $y = U(\omega)$ есть оператор сжатия, и по теореме Банаха он имеет неподвижную точку. Значит уравнение (2.19) имеет единственное решение в указанном классе функций, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Поступила 27 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О контактных задачах для полупространства с включением. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, стр. 1050.
2. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х. О некоторых контактных задачах для составного полупространства. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6, стр. 1001.
3. Srivastav R. P. An axisymmetric mixed boundary value problem for a half-space with a cylindrical cavity. J. Math. and Mech., 1964, vol. 13, No. 3, p. 385.
4. Ватсон Д. Н. Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА УПРУГИХ РЕШЕНИЙ

Д. Л. Быков, В. А. Шачнев

(Москва)

Для решения задач теории малых упруго-пластических деформаций предлагается метод построения процесса последовательных приближений, основанный на использовании приведенных модулей сдвига. Этот метод позволяет решать задачи для материалов, у которых отсутствует или имеется лишь незначительная область линейной зависимости между напряжениями и деформациями. Выбор приведенного модуля подчиняется некоторым условиям, невыполнение которых, как показано в работе, может приводить к расходящимся процессам. В случае несжимаемого материала при указанных ограничениях доказывается сходимость последовательных приближений предложенного процесса к обобщенному решению первой и второй краевых задач теории пластичности. На примере показывается, что ограничения, необходимые в общем случае для сходимости приближений, могут ослабляться при решении конкретных задач.

Как известно [1], задачи теории малых упруго-пластических деформаций сводятся к отысканию напряжений σ_{kj}, деформаций e_{kj} и перемещений u_j, удовлетворяющих уравнениям равновесия, законам связи напряжений, деформаций и перемещений, а также граничным условиям

$$\sigma_{jk,\,k} + X_j = 0 \qquad (j, k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

$$\sigma_{jk} - \sigma\delta_{jk} = \frac{2\sigma_i}{3e_i}(e_{jk} - e\delta_{jk}), \qquad e_{jk} = {}^1\!/\!_2\,(u_{j,\,k} + u_{k,\,j}) \tag{2}$$

$$\sigma = 3Ke, \qquad \sigma_i = 3Ge_i\,[1 - \omega(e_i)] \tag{3}$$

$$u_j\,|_\Gamma = u_{j0}, \qquad \sigma_{jk} l_k\,|_\Gamma = \sigma_{j0} \tag{4}$$

Здесь символом $(\ \ )_{,\,j}$ обозначена операция дифференцирования по декартовой координате x_j точки области Ω, занимаемой телом, причем по повторяющимся индексам ведется суммирование, σ_i, e_i — интенсивности напряжений и деформаций, σ, e — среднее напряжение и средняя деформация, δ_{jk} — символ Кронекера, K — модуль объемной деформации, G — модуль сдвига, X_j — массовые силы, σ_{j0}, u_{j0} — поверхностные силы и поверхностные перемещения, l_k — косинусы нормали к поверхности Γ — границе конечной области Ω.

Первое и второе из граничных условий (4) определяют для системы уравнений (1) — (3) соответственно первую и вторую краевые задачи теории пластичности.

Функция $\omega\ (e_i)$, введенная А. А. Ильюшиным в закон связи интенсивностей деформаций и напряжений [1], позволяет применять метод упругих решений благодаря тому, что для упрочняющихся материалов

$$0 \leqslant \omega(e_i) \leqslant \omega(e_i) + \frac{\omega(e_i) - \omega(e_i')}{e_i - e_i'}\,e_i' = \frac{d\omega(e_i^\circ)\,e_i^\circ}{de_i^\circ} \leqslant \eta < 1 \tag{5}$$

Малость параметра ω, обеспечивающая сходимость процесса последовательных приближений [2,3], позволяет особенно эффективно решать задачи, когда отклонения от упругих деформаций в теле не очень велики. По мере возрастания функции ω сходимость последовательных приближений сохраняется, но ее скорость замедляется. Поэтому целесообразно изменить запись закона связи σ_i и e_i таким образом, чтобы при решении задач со значительным отклонением деформаций от линейно-упругих сходимость процесса последовательных приближений была лучшей, чем при обычном методе упругих решений. Это может быть обеспечено, если вместо обычного модуля сдвига G при построении итераций будет употребляться некоторый «приведенный» модуль сдвига G^*.

Из физических соображений очевидно, что при развитых пластических деформациях «средний» модуль сдвига в теле будет меньше чисто упругого модуля G, поэтому G^* следует брать также меньшим, чем G.

Введем функцию $\tau(e_i)$ следующим образом

$$\tau(e_i) = 1 - [1 - \omega(e_i)]\,G\,/\,G^* \qquad (G^* > 0) \tag{6}$$

так, что для σ_i, согласно (2) и (6), получим

$$\sigma_i = 3G^* e_i\,[1 - \tau(e_i)] \tag{7}$$

Тогда для функции $\tau(e_i)$ имеют место неравенства

$$1 - \frac{G}{G^*} \leqslant \frac{\tau(e_{i2})\,e_{i2} \pm \tau(e_{i1})\,e_{i1}}{e_{i2} \pm e_{i1}} \leqslant 1 - \frac{a}{3G^*}, \qquad \frac{\tau(e_{i2}) - \tau(e_{i1})}{e_{i2} - e_{i1}} \geqslant 0 \tag{8}$$

Они вытекают из условий

$$3G \geqslant (\sigma_{i2} \pm \sigma_{i1})\,/\,(e_{i2} \pm e_{i1}) \geqslant a > 0, \qquad \sigma_i(0) = 0$$

и условия выпуклости возрастающей кривой $\sigma_i\ (e_i)$, имеющих место для широкого класса экспериментальных зависимостей $\sigma_i \sim e_i$.

С учетом (7) уравнения равновесия в перемещениях могут быть представлены в виде

$$(K + {}^1\!/\!_3\,G^*)\,u_{k,\,kj} + G^* u_{j,\,kk} = -X_j + G^*\,[\tau\,(u_{j,\,k} + u_{k,\,j})]_{,\,k} - {}^2\!/\!_3\,G^*\,(\tau u_{k,\,k})_{,\,j}$$
$$(k, j = 1, 2, 3) \tag{9}$$

Здесь двойные индексы после запятой указывают на двукратное дифференцирование по соответствующим координатам.

Аналогично методу упругих решений последовательность приближенных решений определим следующим рекуррентным соотношением:

$$(K + {}^1/_3\, G^*)\, u_{k,\,kj}^{(n+1)} + G^* u_{j,\,kk}^{(n+1)} = -X_j + G^*\, [\tau_n\, (u_{j,\,k}^{(n)} + u_{k,\,j}^{(n)})]_{,\,k} - {}^2/_3\, G^*\, (\tau_n\, u_{k,k}^{(n)})_{,j} \tag{10}$$
$$\tau_n = \tau\, (e_i^{(n)})$$

Функции $u_k^{(n+1)}$ удовлетворяют первому из условий (4) в случае первой краевой задачи и условию

$$[(K - {}^2/_3\, G^*)\, u_{m,\,m}^{(n+1)}\, \delta_{jk} + G^*\, (u_{j,\,k}^{(n+1)} + u_{k,\,j}^{(n+1)})]\, l_k\, |_\Gamma = \sigma_{j0} +$$
$$+ G^* \tau_n\, [u_{j,\,k}^{(n)} + u_{k,\,j}^{(n)} - {}^2/_3\, u_{m,\,m}^{(n)}\, \delta_{jk}]\, l_k\, |_\Gamma \tag{11}$$

— в случае второй краевой задачи.

Рассмотрим условия, при которых последовательность (10) при соответствующих граничных условиях будет сходиться к решению уравнения (9), для чего в дальнейшем будем полагать, что граничное условие (4) в случае первой краевой задачи за счет изменения массовых сил может быть сделано однородным

$$u_j\, |_\Gamma = 0 \tag{12}$$

Для произвольных дифференцируемых вектор-функций $\mathbf{u} = u_j \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j$ ($\mathbf{e}_j$ — единичный вектор в направлении оси x_j) определим в точке скалярное произведение и норму по формулам

$$(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = {}^3/_4\, (u_{j,\,k} + u_{k,\,j})\, (v_{j,\,k} + v_{k,\,j}) - \theta_u \theta_v, \qquad \theta_u = u_{m,\,m}, \qquad \theta_v = v_{m,\,m} \tag{13}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})} = {}^3/_2\, \sqrt{2}\, e_i \tag{14}$$

Легко проверить, что при этом выполняются аксиомы скалярного произведения [4] за исключением одной, которая в дальнейшем не используется: из $\|\mathbf{u}\| = 0$ не следует $\mathbf{u} = 0$.

Рассматривая систему (9) как вектор-уравнение, умножим его скалярно на вектор-функцию $\mathbf{v}$, непрерывно дифференцируемую, и проинтегрируем по области Ω. Тогда для первой краевой задачи получим уравнение

$$K \int \theta_u \theta_v\, d\Omega + \frac{2}{3}\, G^* \int (\mathbf{u},\, \mathbf{v})\, d\Omega = \frac{2}{3}\, G^* \int \tau\, (\|\mathbf{u}\|)\, (\mathbf{u},\, \mathbf{v})\, d\Omega + \int X_j v_j\, d\Omega \tag{15}$$

Для второй краевой задачи имеем уравнение вида

$$K \int \theta_u \theta_v\, d\Omega + \frac{2}{3}\, G^* \int (\mathbf{u},\, \mathbf{v})\, d\Omega = \frac{2}{3}\, G^* \int \tau\, (\|\mathbf{u}\|)\, (\mathbf{u},\, \mathbf{v})\, d\Omega + \int X_j v_j\, d\Omega + \int \sigma_{j0} v_j\, d\Gamma \tag{16}$$

Очевидно, что решение уравнения (9) при соответствующих граничных условиях удовлетворяет уравнению (15) или (16). Однако уравнение (9) не всегда имеет решение при указанных граничных условиях и этот факт связан с некорректностью классической постановки задачи. Вместе с тем при тех же данных задачи уравнение (15) или (16) допускает единственное решение, которое естественно считать решением поставленной задачи. Такое решение назовем обобщенным решением уравнения (9).

Решение уравнения (15) или (16) рассмотрим в специальном функциональном пространстве, где для дифференцируемых функций определим скалярное произведение и норму по формулам

$$(\mathbf{u},\, \mathbf{v})_\Omega = \int (\mathbf{u},\, \mathbf{v})\, d\Omega, \qquad \|\mathbf{u}\|_\Omega = \sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})_\Omega} \tag{17}$$

В этом же пространстве дополнительно введем норму $\|\mathbf{u}\|_{1\Omega}$, порожденную скалярным произведением

$$(\mathbf{u},\, \mathbf{v})_{1\Omega} = \int (\mathbf{u},\, \mathbf{v})_1\, d\Omega, \qquad (\mathbf{u},\, \mathbf{v})_1 = (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + \frac{3K}{2G^*}\, \theta_u \theta_v \tag{18}$$

Легко показать эквивалентность норм $\|\mathbf{u}\|_\Omega$ и $\|\mathbf{u}\|_{1\Omega}$, например, для множества вектор-функций, удовлетворяющих условию (12), если для перемещений u_j воспользоваться представлением Стокса.

Решение задачи определим в пространстве H, получающемся замыканием по норме (17) множества два раза непрерывно дифференцируемых вектор-функций, удовлетворяющих в случае первой краевой задачи условию (12). Удовлетворять граничным условиям в случае второй краевой задачи нет необходимости, так как они содержатся в самом уравнении (16). Из неравенства Корна [4] видно, что пространству H принадлежат функции, обобщенные производные которых суммируемы с квадратом. В связи с этим рассмотрим условие ограниченности в H линейных функционалов в (15) и (16)

$$\int X_j v_j d\Omega, \quad \int \sigma_{j0} v_j d\Gamma$$

Согласно теоремам вложения [5] последнее имеет место, когда

$$X_j \in L_p(\Omega), \; p \geqslant {}^6/_5, \qquad \sigma_{j0} \in L_q(\Gamma), \; q > {}^4/_3$$

Покажем, что при этих условиях существует в H решение уравнения (15) (этот результат приведен в работе [2]). В дальнейшем все преобразования будут проводиться лишь для первой краевой задачи, так как для второй все доказательства по форме аналогичны.

Умножим (10) скалярно на вектор-функцию $\mathbf{v}$, два раза непрерывно дифференцируемую и равную нулю на границе области Ω. Интегрируя по Ω, получим рекуррентное соотношение

$$K\int \theta_u^{(n+1)}\theta_v\, d\Omega + \frac{2}{3}G^*\int (\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{v})\, d\Omega = \frac{2}{3}G^*\int \tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|)(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v})\, d\Omega + \int X_j v_j\, d\Omega \quad (19)$$

Последовательные решения этого соотношения в пространстве H будут обобщенными решениями последовательности (9), и они существуют, если правая часть в (19) есть ограниченный в H функционал на множестве вектор-функций $\mathbf{v}$, плотном в H. Последнее, с учетом условия для X_j, имеет место при соответствующем выборе начального элемента. Например, достаточно, чтобы вектор-функция $\mathbf{u}^{(0)}$ была кусочно-дифференцируемой. Для удобства по-прежнему будем полагать, что функция $\tau(e_i)$ будет дифференцируемой. (Существование решения соотношения (19) легко доказать, пользуясь известными результатами [4] об ограниченности снизу положительной константой в пространстве H оператора левой части (19).)

Из (19) в силу неравенства Буняковского, неравенства треугольника и определения (14) получим

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v})_{1\Omega}| &= \left|\int \tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|)(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}) - \tau(\|\mathbf{u}^{(n-1)}\|)(\mathbf{u}^{(n-1)}, \mathbf{v})\, d\Omega\right| = \\ &= \left|\int \tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|)(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}, \mathbf{v}) + [\tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|) - \tau(\|\mathbf{u}^{(n-1)}\|)](\mathbf{u}^{(n-1)}, \mathbf{v})\, d\Omega\right| \leqslant \\ &\leqslant \int\left[|\tau(e_i)| + \frac{\tau(e_i^{(n)}) - \tau(e_i^{(n-1)})}{e_i^{(n)} - e_i^{(n-1)}}\, e_i^{(n-1)}\right]\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\|\,\|\mathbf{v}\|\, d\Omega \leqslant \\ &\leqslant \left[|\tau(e_i)| + \frac{\tau(e_i^{(n)}) - \tau(e_i^{(n-1)})}{e_i^{(n)} - e_i^{(n-1)}}\, e_i^{(n-1)}\right]_{x_j=\xi_j}\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\|_{1\Omega}\,\|\mathbf{v}\|_{1\Omega} \end{aligned}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — точка, определяемая теоремой о среднем значении.

Положим, что почти всюду в области Ω

$$|\tau(e_i'')| + \frac{\tau(e_i'') - \tau(e_i')}{e_i'' - e_i'}\, e_i' \leqslant \eta < 1 \quad (20)$$

Тогда получим

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_{1\Omega} \leqslant \eta\,\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\|_{1\Omega} \leqslant \eta^n\,\|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(0)}\|_{1\Omega}$$

Отсюда следует, что $\|\mathbf{u}^{(n+p)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_\Omega \to 0$ (так как $\|\mathbf{u}\|_\Omega \leqslant \|\mathbf{u}\|_{1\Omega}$) при $n \to \infty$ и любом p, и в силу полноты пространства последовательность $\mathbf{u}^{(n)}$ сходится к единственному решению $\mathbf{u} \in$ H.

Условие (20) выполняется, например, при $\tau \geqslant 0$. Физически условие $\tau \geqslant 0$ означает, что в рассматриваемой задаче интенсивности деформации почти всюду в Ω не меньше, чем значение e_{is}, определяемое из уравнения $\tau(e_{is}) = 0$.

Из (20), в частности, следует и сходимость метода упругих решений [2], когда $\tau \equiv \omega \geqslant 0$, т. е. $G^* = G$.

Однако сходимость последовательности $\mathbf{u}^{(n)}$ имеет место при более слабых, чем (20), ограничениях на τ. Предварительно покажем, что последовательность $\mathbf{u}^{(n)}$, определяемая (10), ограничена в H при условии $|\tau| \leqslant \eta < 1$.

Из уравнения (15) и существования в H решения следует, что свободный член в уравнении (15) есть линейный и ограниченный в H функционал, и потому его можно представить в виде

$$\int X_j v_j d\Omega = {}^2/_3\, G^* (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{1\Omega}, \qquad \mathbf{f} \in \mathrm{H}$$

Тогда из рекуррентного соотношения (19) следует при $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{(n+1)}$, что

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)}\|_{1\Omega}^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{u}^{(n+1)})_{1\Omega} + \int \tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|)(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n+1)})\, d\Omega \leqslant (\|\mathbf{f}\|_{1\Omega} + \eta \|\mathbf{u}^{(n)}\|_{1\Omega}) \|\mathbf{u}^{(n+1)}\|_{1\Omega}.$$

Отсюда имеем

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)}\|_{\Omega} \leqslant \|\mathbf{u}^{(n+1)}\|_{1\Omega} \leqslant \eta \|\mathbf{u}^{(n)}\|_{1\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{1\Omega} \leqslant \eta^n \|\mathbf{u}^{(1)}\|_{1\Omega} + (1 + \eta + \ldots \eta^{n-1}) \|\mathbf{f}\|_{1\Omega}$$

что и доказывает ограниченность в H последовательности $\mathbf{u}^{(n)}$.

Покажем еще, что при всех τ решение уравнения (15) единственно. Для этого заменим τ в (15) на ω и G^* на G согласно (6) и предположим, что существуют два решения $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Тогда, подставив последовательно $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ в (15) и положив $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, будем иметь с учетом (14), (5) и неравенства Буняковского

$$K \int (\theta_{u_2} - \theta_{u_1})^2 d\Omega + \frac{2}{3} G \int \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|^2 d\Omega =$$

$$= \frac{2}{3} G \int [\omega(\|\mathbf{u}_2\|)(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) - \omega(\|\mathbf{u}_1\|)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)]\, d\Omega =$$

$$= \frac{2}{3} G \int \left[\omega(\mathbf{u}_2)\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|^2 + \frac{\omega(\|\mathbf{u}_2\|) - \omega(\|\mathbf{u}_1\|)}{\|\mathbf{u}_2\| - \|\mathbf{u}_1\|} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)(\|\mathbf{u}_2\| - \|\mathbf{u}_1\|)\right] d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3} G \int \left[\omega(e_{i2}) + \frac{\omega(e_{i2}) - \omega(e_{i1})}{e_{i2} - e_{i1}} e_{i1}\right] \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|^2 d\Omega \leqslant \frac{2}{3} G\eta \int \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|^2 d\Omega$$

Так как $\eta < 1$, то неравенство имеет место лишь при $\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\| = 0$ почти всюду в Ω. Для первой краевой задачи это означает, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ почти всюду в Ω. Для второй краевой задачи в этом случае решения совпадают почти всюду с точностью до «жестких» перемещений.

Доказательство сходимости последовательности $\mathbf{u}^{(n)}$ проведем для несжимаемого материала при условиях

$$\left|\frac{\tau(e_{i2}) e_{i2} \pm \tau(e_{i1}) e_{i1}}{e_{i2} \pm e_{i1}}\right| \leqslant \eta < 1, \qquad |\tau| \leqslant \eta < 1 \tag{21}$$

которые выполняются при $G^* > {}^1/_2\, G$. Решение задачи будем искать в классе вектор-функций, для которых имеет место условие несжимаемости: $\theta_u = 0$. Тогда вместо (15) и (19) будем иметь соответственно

$$\int (\mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\Omega = \int \tau(\|\mathbf{u}\|)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\Omega + \frac{3}{2G^*} \int X_j v_j d\Omega \tag{22}$$

$$\int (\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{v})\, d\Omega = \int \tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|)(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v})\, d\Omega + \frac{3}{2G^*} \int X_j v_j\, d\Omega \tag{23}$$

Относительно сходимости процесса последовательных приближений имеет место следующая теорема.

Теорема. Последовательность (23) при сделанных выше предположениях относительно X_j и выбора начального элемента сходится в пространстве H к решению уравнения (22), если выполняется условие

$$G^* > {}^1/_2\, G \tag{24}$$

Доказательство. Для функций $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ введем представление при помощи их средних. Пусть $\mathbf{u}$ продолжена нулем вне Ω и $h(x, \xi)$ — усредняющее ядро в круге C радиуса ρ с центром в точке $x \in \Omega$, непрерывно дифференцируемое в C нужное число раз и равное нулю вне C. Тогда имеем

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lim_{\rho\to 0} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\rho, \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\rho = \int (\mathbf{u}(\xi), \mathbf{v}(\xi))\, h(x, \xi)\, dC, \qquad \xi \in C$$

Здесь предел понимается в смысле метрики пространства суммируемых функций.

Так как $\int X_j v_j \, d\Omega$, по предыдущему ограниченный в H функционал, то его можно представить в виде $(\mathbf{g}, \mathbf{v})_\Omega$. Тогда (22) можно представить в виде

$$\int \lim_{\rho\to 0} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\rho \, d\Omega = \int \tau(\|\mathbf{u}\|) \lim_{\rho\to 0} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\rho \, d\Omega + \frac{3}{2G^*} \int \lim_{\rho\to 0} (\mathbf{g}, \mathbf{v})_\rho \, d\Omega \tag{25}$$

Полученному соотношению можно придать более общий смысл, чем в случае (22), если рассматривать здесь вектор-функции как функции двух переменных ξ и x. Для этого введем скалярное произведение по формуле

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{2\Omega} = \int (\mathbf{u}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_2 = \lim_{\rho\to 0} (\mathbf{u}(x, \xi), \mathbf{v}(x, \xi))_\rho, \quad \xi \in C, \ x \in \Omega$$

(произведение $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2$ совпадает с $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ функции только от ξ) и рассмотрим соответствующее гильбертово пространство H_2 вектор-функций $\mathbf{u}$, определенных в $\Omega \times \Omega$, для которых существует конечная норма $\|\mathbf{u}\|_{2\Omega}$. По определению пространство H вкладывается в H_2. Легко доказать, что в H_2 существует решение уравнения

$$\int (\mathbf{u}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega = \int \tau(\|\mathbf{u}\|_2) (\mathbf{u}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega + \frac{3}{2G^*} \int (\mathbf{g}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega \tag{26}$$

если под $\tau(\|\mathbf{u}\|_2)$ подразумевать функцию, аналогичную по свойствам функции $\tau(\|\mathbf{u}\|)$, и $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x, \xi)$. Для этого достаточно в уравнении (26) заменить τ и G^* на ω и G соответственно согласно (6) и образовать последовательность вида

$$\int (\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega = \int \omega(\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2) (\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega + \frac{3}{2G} \int (\mathbf{g}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega$$

Если начальный элемент последовательности $\mathbf{u}^{(0)}$ и $\mathbf{g}$ выбрать так, что $(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v})_{2\Omega}$ и $(\mathbf{g}, \mathbf{v})_{2\Omega}$ суть ограниченные в H_2 функционалы, то все $(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v})_{2\Omega}$ будут ограниченными в H_2 функционалами и $\mathbf{u}^{(n)}$ существуют в H_2. Точно так же, как и в случае обычного метода упругих решений, доказывается сходимость последовательности к единственному решению уравнения (26). Уравнение (26) определяет некоторый оператор T: $g(x, \xi) \to \mathbf{u}(x, \xi)$. Если $\mathbf{g}(x, \xi) = \mathbf{g}(\xi)$ и $\mathbf{g}(\xi)$ берется из уравнения (25), то оператор T определяет $\mathbf{u}^*(\xi)$—решение уравнения (25). Действительно, полагая $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\xi)$ в (26), получим уравнение (25), и в силу единственности решений уравнений (25) и (26) решение уравнения (26) будет совпадать в этом случае с решением уравнения (25). Покажем, что к решению уравнения (26) сходится последовательность вида

$$\int (\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega = \int \tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2) (\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega + \frac{3}{2G^*} \int (\mathbf{g}, \mathbf{v})_2 \, d\Omega \tag{27}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\xi), \ \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(\xi)$$

Из ограниченности в H_2 функционалов $(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v})_{2\Omega}$, $(\mathbf{g}, \mathbf{v})_{2\Omega}$, а значит и всех $(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v})_{2\Omega}$, следует существование последовательности $\mathbf{u}^{(n)}$. В силу единственности эта последовательность совпадает с последовательностью (23).

Представим вектор-функцию из H в виде

$$\mathbf{u} = \varphi + \psi \tag{28}$$

где φ и ψ определим следующим образом. В точке, в окрестности которой почти всюду $(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) \neq 0$, положим

$$\varphi(x, \xi) = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)}{(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)} \mathbf{u}^*(\xi), \qquad \psi \equiv \mathbf{u} - \varphi$$

а для точек x, где $(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) = 0$, положим $\varphi = 0$, $\psi = \mathbf{u}$.

Тогда представление (28), легко проверить, обладает следующими свойствами

$$(\mathbf{u}^*, \psi)_2 = 0, \quad (\varphi, \psi)_2 = 0, \quad (\mathbf{u}^*, \varphi)_2 = \pm \|\mathbf{u}^*\|_2 \|\varphi\|_2, \quad \|\mathbf{u}\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2$$

Из последнего видно, что $\|\varphi\|_2^2$ и $\|\psi\|_2^2$ — суммируемые функции.

Положим в (26) и (27) $\mathbf{v} = \varphi^{(n+1)}$. С учетом свойств разложения имеем

$$\int (\mathbf{g}, \psi^{(n+1)})_2 \, d\Omega = 0, \qquad \|\psi^{(n+1)}\|_{2\Omega}^2 = \int \tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2)(\psi^{(n)}, \psi^{(n+1)})_2 \, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \eta \int |(\psi^{(n+1)}, \psi^{(n)})_2| \, d\Omega \leqslant \eta \|\psi^{(n+1)}\|_{2\Omega} \|\psi^{(n)}\|_{2\Omega}.$$

Отсюда

$$\|\psi^{(n+1)}\|_{2\Omega} \leqslant \eta \|\psi^{(n)}\|_{2\Omega} \leqslant \eta^n \|\psi^{(1)}\|_{2\Omega} \to 0 \quad n \to \infty$$

т. е. при $n \to \infty$ последовательность $\mathbf{u}^{(n)}$ стремится стать «параллельной» $\mathbf{u}^*$.

Для последовательности $\mathbf{u}^{(n)}$ согласно (26) и (27) имеем

$$\int (\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^*, \mathbf{v})_2 \, d\Omega = \int [\tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2)(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v})_2 - \tau(\|\mathbf{u}^*\|_2)(\mathbf{u}^*, \mathbf{v})_2] \, d\Omega$$

Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^*$ и используя представление (28) и учитывая (8), имеем

$$\int [\tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2)(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^*)_2 - \tau(\|\mathbf{u}^*\|_2)(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^*)_2] \, d\Omega =$$

$$= \int [\tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2) - \tau(\|\varphi^{(n)}\|_2)](\varphi^{(n)}, \varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*)_2 \, d\Omega + \int \tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2)(\psi^{(n)}, \psi^{(n+1)})_2 \, d\Omega +$$

$$+ \int \frac{\tau(\|\varphi^{(n)}\|_2)(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*)_2 - \tau(\|\mathbf{u}^*\|_2)(\mathbf{u}^*, \varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*)_2}{(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*)_2 - (\mathbf{u}^*, \varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*)_2} (\varphi^{(n)} - \mathbf{u}^*, \varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*)_2 \, d\Omega =$$

$$= \pm \int \frac{\tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2) - \tau(\|\varphi^{(n)}\|_2)}{\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2 - \|\varphi^{(n)}\|_2} \left(\sqrt{\|\varphi^{(n)}\|_2^2 + \|\psi^{(n)}\|_2^2} - \|\varphi^{(n)}\|_2\right) \|\varphi^{(n)}\|_2 \|\varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*\|_2 \, d\Omega \pm$$

$$\pm \int \frac{\tau(\|\varphi^{(n)}\|_2(\pm\|\varphi^{(n)}\|_2) - \tau(\|\mathbf{u}^*\|_2)(\pm\|\mathbf{u}^*\|_2)}{(\pm\|\varphi^{(n)}\|_2) - (\pm\|\mathbf{u}^*\|_2)} \|\varphi^{(n)} - \mathbf{u}^*\|_2 \|\varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*\|_2 \, d\Omega +$$

$$+ \int \tau(\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2)(\psi^{(n)}, \psi^{(n+1)})_2 \, d\Omega \leqslant 2\eta \int \left(\sqrt{\|\varphi^{(n)}\|_2^2 + \|\psi^{(n)}\|_2^2} - \|\varphi^{(n)}\|_2\right) \|\varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*\|_2 \, d\Omega +$$

$$+ \eta \int \|\varphi^{(n)} - \mathbf{u}^*\|_2 \|\varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*\|_2 \, d\Omega + \eta \int \|\psi^{(n)}\|_2 \|\psi^{(n+1)}\|_2 \, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 2c_1\eta \|\varphi^{(n)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega} \|\psi^{(n)}\|_{2\Omega} + \eta \|\psi^{(n)}\|_{2\Omega} \|\psi^{(n+1)}\|_{2\Omega} + \eta \|\varphi^{(n)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega} \|\varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega}$$

так как

$$\int \left(\sqrt{\|\varphi^{(n)}\|_2^2 \|\psi^{(n)}\|_2^2} - \|\psi^{(n)}\|_2\right)^2 d\Omega \leqslant c_1^2 \int \|\psi^{(n)}\|_2^2 \, d\Omega, \qquad \left| \frac{\tau_2 - \tau_1}{e_{i2} - e_{i1}} e_{i1} \right| < 2\eta$$

Таким образом, имеем

$$\|\varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega}^2 + \|\psi^{(n+1)}\|_{2\Omega}^2 \leqslant \eta \|\varphi^{(n)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega} \|\varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega} + c_2 \|\psi^{(n)}\|_{2\Omega}$$

Отсюда следует, что при достаточно большом n: либо

$$\|\varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega} < \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ — достаточно малая величина})$$

либо

$$\|\varphi^{(n+1)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega} \leqslant \eta_1 \|\varphi^{(n)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega}, \qquad \eta_1 < 1$$

Предполагая, что первое, как желаемое, никогда не выполняется, придем к соотношению

$$\|\varphi^{(n+p+1)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega} \leqslant \eta_1^p \|\varphi^{(n)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega}$$

и при $p \to \infty$ имеем

$$\|\varphi^{(n+p+1)} - \mathbf{u}^*\|_{2\Omega} \to 0$$

Теорема доказана.

Из (27) легко видеть, что процесс будет расходящимся, если $-\tau \geqslant \eta > 1$. Действительно, полагая $v = \psi^{(n)}$ в (27), получим

$$\eta \|\psi^{(n)}\|_{2\Omega}^2 \leqslant \left| \int \tau (\|u^{(n)}\|_2) \|\psi^{(n)}\|_2^2 d\Omega \right| = \left| \int (\psi^{(n+1)}, \psi^{(n)})_2 d\Omega \right| \leqslant \|\psi^{(n+1)}\|_{2\Omega} \|\psi^{(n)}\|_{2\Omega}$$

и значит

$$\|\psi^{(n+1)}\|_{2\Omega} \geqslant \eta \|\psi^{(n)}\|_{2\Omega} \geqslant \eta^n \|\psi^{(1)}\|_{2\Omega} \to \infty, \qquad n \to \infty$$

Вместе с тем из доказательства теоремы видно, что условие $\eta < 1$ в (8) может выполняться не всюду в Ω. В частности, оно может не выполняться на многообразиях меньшей размерности, чем то, которому принадлежит решение.

Сходимость процесса по норме пространства H происходит тем быстрее, чем меньше η. Из (8) следует, что наименьшее значение для η имеет место при $|1 - G / G^*| = |1 - a / 3G^*| < 1$, где a — наименьшее значение тангенса угла наклона к кривой $\sigma_i \sim e_i$ на участке сходимости процесса.

Заметим, что доказательство сходимости процесса имеет смысл и в том случае, когда приведенные модули выбираются на каждом шаге процесса. В этом случае они должны удовлетворять условию $1/2\, G < A \leqslant G_n \leqslant B < \infty$.

Заметим еще, что при отрицательных τ, соответствующих малым G^*, последовательность приближений получается немонотонной в метрике пространства H_2, что легко усматривается из (27), если положить там $v = \psi^{(n)}$, так как тогда скалярное произведение $(\psi^{(n)}, \psi^{(n+1)})_{2\Omega}$ отрицательно. Это обстоятельство позволяет оценивать решение с «разных сторон» при помощи двух соседних приближений.

Приведенное доказательство не охватывает случая, когда скалярное произведение (13) вырождается в обычное произведение. Но в этом случае доказательство определяется приводимым ниже примером, в котором учет сжимаемости позволил получить условие сходимости процесса более широким, чем (24).

В качестве примера рассмотрим сходимость процесса в случае симметричной деформации сферы. Уравнение, аналогичное (9), в данном случае будет иметь вид

$$\left(K + \frac{4}{3} G^*\right) \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 u}{dr} = \frac{4}{3} G^* \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \tau r^4 \frac{d}{dr} \frac{u}{r} - R(r), \quad u|_\Gamma = 0 \tag{29}$$

где $u(r)$ — радиальное перемещение, $R(r)$ — массовая центральная сила. Последовательность приближенных решений определится в виде

$$\left(K + \frac{4}{3} G^*\right) \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 u_{n+1}}{dr} = \frac{4}{3} G^* \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \tau_n r^4 \frac{d}{dr} \frac{u_n}{r} - R(r), \qquad u_{n+1}\big|_\Gamma = 0 \tag{30}$$

Умножив (30) на непрерывно дифференцируемую функцию v, $v|_\Gamma = 0$ и интегрируя по промежутку $[a, b]$, области определения решения, получим с учетом (6)

$$\left(K + \frac{4}{3} G^*\right) \int_a^b \frac{1}{r} \frac{dr^2 (u_{n+1} - u_n)}{dr} \frac{1}{r} \frac{dr^2 v}{dr} dr =$$

$$= \frac{4}{3} G^* \int_a^b \left(\tau_n r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_n}{r} - \tau_{n-1} r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_{n-1}}{r}\right) r^2 \frac{d}{dr} \frac{v}{r} dr = \tag{31}$$

$$= \frac{4}{3} G^* \int_a^b \frac{\tau_n e_{in} \pm \tau_{n-1} e_{in-1}}{e_{in} \pm e_{in-1}} r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_n - u_{n-1}}{r} r^2 \frac{dv}{dr} dr, \quad e_i = \frac{2}{3} \left| r \frac{d}{dr} \frac{u}{r} \right|$$

Положив $v = u_{n+1} - u_n$, получим согласно (21)

$$\left(K + \frac{4}{3} G^*\right) \int_a^b \left[\frac{1}{r} \frac{dr^2 (u_{n+1} - u_n)}{dr}\right]^2 dr = \left(K + \frac{4}{3} G^*\right) \int_a^b \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_{n+1} - u_n}{r}\right)^2 dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{3} G^* \eta \left[\int_a^b \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_n - u_{n-1}}{r}\right)^2 dr \int_a^b \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_{n+1} - u_n}{r}\right)^2 dr\right]^{1/2}$$

Тогда, вводя определение

$$\| u \|_\Omega^2 = \int_a^b \left(r \frac{d}{dr} \frac{u}{r}\right)^2 dr$$

получим

$$\| u_{n+1} - u_n \|_\Omega \leqslant \frac{4G^*\eta}{3K + 4G^*} \| u_n - u_{n-1} \|_\Omega = \lambda \| u_n - u_{n-1} \|_\Omega \qquad \lambda = \frac{4G^*\eta}{3K + 4G^*}$$

т. е. процесс сходится с быстротой геометрической прогрессии, если $\lambda < 1$. Условие $\lambda < 1$ может выполняться и при $\eta \geqslant 1$, например, в случаях, когда у кривой $\sigma_i\ (e_i)$ существует площадка текучести. С другой стороны, выбирая η, равное левой части неравенства (8), получим, что из условия $\lambda < 1$ вытекает

$$\frac{4(G - G^*)}{3K + 4G^*} < 1, \qquad G^* > \frac{1 - 5\nu}{1 - 2\nu} \frac{G}{4} \tag{32}$$

где ν — коэффициент Пуассона. Отсюда видно, что в данной задаче сходимость будет иметь место и при $G^* < {}^1/_2\, G$.

Условие (32) для G^* будет необходимым. Действительно, положим, что u есть упругое решение. Тогда $\omega = 0$ и, положив $u_{n-1} = u$ в (31), имеем согласно (7)

$$\left(K + \frac{4}{3} G^*\right) \int_a^b \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_{n+1} - u}{r}\right)^2 dr =$$

$$= -\frac{4}{3} \int_b^b (G - G^* - G\omega_n)\, r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_n - u}{r}\, r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_{n+1} - u}{r}\, dr$$

Отсюда при отрицательных τ очевидна немонотонность процесса приближений. При этом последовательные приближения получаются как нижние и верхние оценки решения. Вместе с тем последовательность будет расходящейся, если

$$\frac{4(G - G^*)}{3K + 4G^*} \geqslant \lambda > 1$$

Авторы благодарны И. И. Воровичу и Ю. П. Красовскому за обсуждение работы.

Поступила 25 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Ворович И. И., Красовский Ю. П. О методе упругих решений. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
3. Красовский Ю. П. Разрешимость плоской задачи теории малых упруго-пластических деформаций. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 5.
4. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.