ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Ю. Н. Кузьмин

(Ленинград)

Рассматривается осесимметричная задача Дирихле для уравнения Лапласа в области, которая представляет собой пространство с полубесконечным цилиндрическим вырезом. Задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. При помощи принципа неподвижной точки доказано существование, а также единственность решения этого уравнения.

1. Постановка задачи и сведение ее к парным интегральным уравнениям. Для решения задачи внешность цилиндра (фигура) разбивается на две области: *1* ($z < 0$, $0 \leqslant r < \infty$) и *2* ($z > 0$, $1 < r < \infty$), в которых отыскиваются гармонические функции $u_1(r, z)$ и $u_2(r, z)$

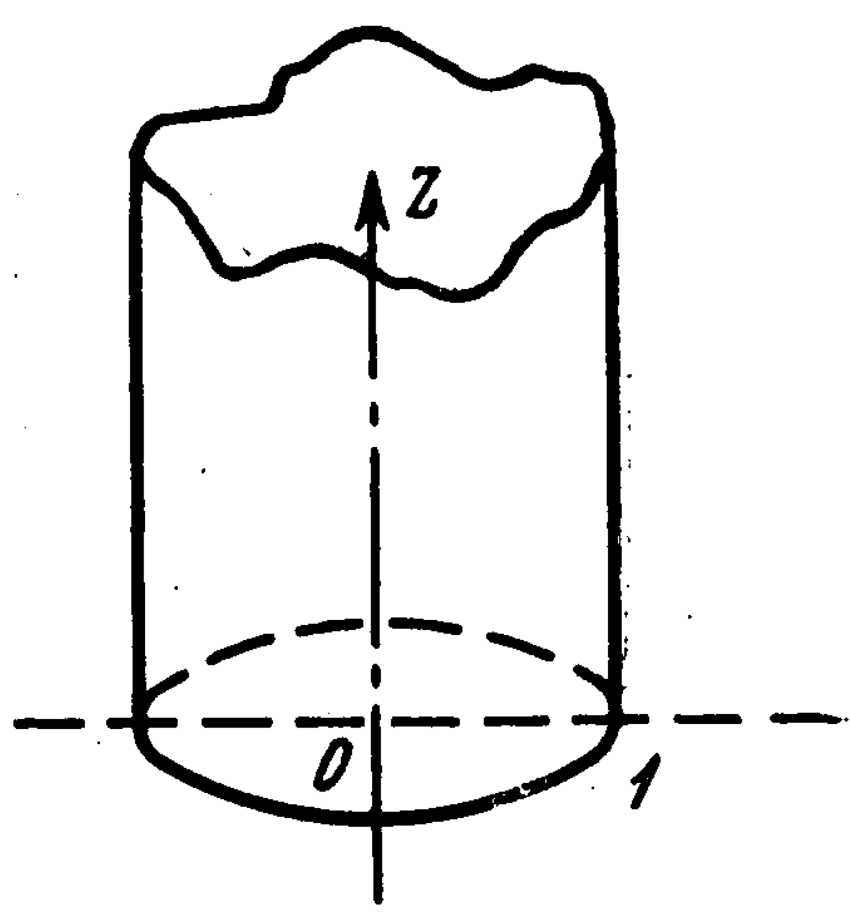
$$\Delta u_1 = 0, \qquad \Delta u_2 = 0 \tag{1.1}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$u_1\big|_{\substack{z=0\\ r<1}} = f(r), \qquad u_2\big|_{r=1} = g(z) \tag{1.2}$$

и условиям непрерывности

$$u_1\big|_{\substack{z=0\\ r>1}} = u_2\big|_{z=0}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=0\\ r>1}} = \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{1.3}$$



Фиг. 1

Что касается поведения на бесконечности, то будем считать, что $\lim u_1 = 0$ при $z \to -\infty$, а решение u_2 при $z \to +\infty$ должно переходить в решение соответствующей антисимметричной задачи Дирихле для бесконечного цилиндра.

Гармонические функции $u_1(r, z)$ и $u_2(r, z)$ ищем в виде следующих интегралов:

$$u_1(r, z) = \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda \tag{1.4}$$

$$u_2(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu)} \sin \nu z \, d\nu \int_0^\infty g(\zeta) \sin \nu\zeta \, d\zeta + \int_0^\infty \lambda B(\lambda) \operatorname{Im}\left[\frac{H_0^{(1)}(\lambda r)}{H_0^{(1)}(\lambda)}\right] e^{-\lambda z} d\lambda \tag{1.5}$$

удовлетворяющих указанным условиям на бесконечности, а также второму из граничных условий (1.2). Первое условие (1.3) примет вид

$$\int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \int_0^\infty \lambda B(\lambda) \operatorname{Im}\left[\frac{H_0^{(1)}(\lambda r)}{H_0^{(1)}(\lambda)}\right] d\lambda \tag{1.6}$$

Это позволяет по формуле обращения Вебера выразить $B(\lambda)$ через $A(\lambda)$

$$B(\lambda) = \int_1^\infty \rho \operatorname{Im}\left[H_0^{(2)}(\lambda) H_0^{(1)}(\lambda\rho)\right] d\rho \int_0^\infty A(\nu) J_0(\nu\rho) d\nu \tag{1.7}$$

Удовлетворяя оставшимся условиям (1.2) и (1.3) задачу сведем к парным интегральным уравнениям[1] относительно функции $A(\lambda)$

$$\int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = f(r) \qquad (0 \leqslant r < 1) \tag{1.8}$$

$$\int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda + \int_0^\infty \lambda^2 B(\lambda) \operatorname{Im}\left[\frac{H_0^{(1)}(\lambda r)}{H_0^{(1)}(\lambda)}\right] d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu)} \nu \, d\nu \int_0^\infty g(\zeta) \sin \nu\zeta \, d\zeta$$
$$(1 < r < \infty) \tag{1.9}$$

---

[1] Парные уравнения с ядром Вебера рассматривались, например, в работах [1-3].

2. Сведение парных интегральных уравнений к интегральному уравнению Фредгольма. Сделаем интегральную подстановку

$$A(\lambda) = \int_0^\infty \Phi(t) \cos \lambda t \, dt \tag{2.1}$$

Как окажется, функцию $\Phi(t)$ удобно искать отдельно на каждом из двух участков $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ изменения переменной t. Поэтому введем обозначение

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & (0 < t < 1) \\ \psi(t) & (1 < t < \infty) \end{cases} \tag{2.2}$$

Подставим (2.1) в (1.8) и воспользуемся известным соотношением [4]

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) \cos \lambda t \, d\lambda = \begin{cases} 0 & (t > r) \\ (r^2 - t^2)^{-1/2} & (t < r) \end{cases} \tag{2.3}$$

Выражение (1.8) примет вид

$$\int_0^r \frac{\varphi(t)\, dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = f(r) \qquad (0 < r < 1) \tag{2.4}$$

Это уравнение Шлемильха относительно функции $\varphi(t)$ имеет решение

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho f(\rho)\, d\rho}{\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{2.5}$$

Подставляя теперь (2.1) в (1.9), получим

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r)\, d\lambda \int_0^\infty \Phi(\tau) \cos \lambda\tau \, d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu)} \nu \, d\nu \int_0^\infty g(\zeta) \sin \nu\zeta \, d\zeta -$$

$$- \int_0^\infty \lambda^2 B(\lambda) \operatorname{Im} \left[\frac{H_0^{(1)}(\lambda r)}{H_0^{(1)}(\lambda)} \right] d\lambda \qquad (1 < r < \infty) \tag{2.6}$$

Подвергнем выражение (2.6) некоторому интегральному преобразованию, для чего умножим его почленно на $2/\pi \; r(r^2 - t^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем по r от t до ∞; при этом воспользуемся формулами

$$\int_t^\infty \frac{J_0(\lambda r)\, r\, dr}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{\cos \lambda t}{\lambda}, \qquad \int_t^\infty \frac{K_0(\lambda r)\, r\, dr}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{\pi}{2\lambda} e^{-\lambda t}, \qquad \int_t^\infty \frac{H_0^{(1)}(\lambda r)\, r\, dr}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{e^{i\lambda t}}{\lambda} \tag{2.7}$$

Тогда выражение (2.6) примет вид

$$\Phi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\nu t}}{K_0(\nu)} d\nu \int_0^\infty g(\zeta) \sin \nu\zeta \, d\zeta - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \lambda B(\lambda) \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\lambda t}}{H_0^{(1)}(\lambda)} \right] d\lambda \tag{2.8}$$

Рассмотрим последнюю формулу в области $1 < t < \infty$. Левая часть (2.8) в этой области есть $\psi(t)$, а первый интеграл в правой части сходится для всех функций $g(z)$, разлагающихся в синус-интеграл Фурье. Займемся подробнее вторым интегралом в правой части формулы (2.8). Прежде всего

$$B(\lambda) = \int_1^\infty \rho \operatorname{Im} [H_0^{(2)}(\lambda) H_0^{(1)}(\lambda\rho)]\, d\rho \int_0^\rho \frac{\Phi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2}} =$$

$$= B_1(\lambda) + \operatorname{Im} \left[H_0^{(2)}(\lambda) \int_1^\infty \psi(\tau)\, d\tau \int_\tau^\infty \frac{H_0^{(1)}(\lambda\rho)\, \rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2}} \right] \tag{2.9}$$

Здесь через $B_1(\lambda)$ обозначена уже известная функция от λ

$$B_1(\lambda)=\int_1^\infty \rho\,\mathrm{Im}\,[H_0^{(2)}(\lambda)\,H_0^{(1)}(\lambda\rho)]\,d\rho\int_0^1\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\rho^2-\tau^2}} \tag{2.10}$$

На основании третьего из интегралов (2.7)

$$B(\lambda)=B_1(\lambda)+\frac{1}{\lambda}\int_1^\infty\psi(\tau)\,\mathrm{Im}\,[H_0^{(2)}(\lambda)\,e^{i\lambda\tau}]\,d\tau \tag{2.11}$$

Поэтому второй интеграл в правой части (2.8) может быть представлен в виде

$$\int_0^\infty\lambda B(\lambda)\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\lambda t}}{H_0^{(1)}(\lambda)}\,d\lambda=S(t)+\int_0^\infty\mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\lambda t}}{H_0^{(1)}(\lambda)}\right]d\lambda\int_1^\infty\psi(\tau)\,\mathrm{Im}\,[H_0^{(2)}(\lambda)\,e^{i\lambda\tau}]\,d\tau \tag{2.12}$$

Здесь

$$S(t)=\int_0^\infty\lambda B_1(\lambda)\,\mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\lambda t}}{H_0^{(1)}(\lambda)}\right]d\lambda \tag{2.13}$$

Так как

$$\mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\lambda t}}{H_0^{(1)}(\lambda)}\right]\mathrm{Im}\,[H_0^{(2)}(\lambda)\,e^{i\lambda\tau}]\equiv\cos\lambda t\cos\lambda\tau-\mathrm{Re}\left[\frac{J_0(\lambda)}{H_0^{(1)}(\lambda)}\,e^{i\lambda(t+\tau)}\right] \tag{2.14}$$

то выражение (2.12) может быть преобразовано к виду

$$\int_0^\infty\lambda B(\lambda)\,\mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\lambda t}}{H_0^{(1)}(\lambda)}\right]d\lambda=S(t)+\frac{\pi}{2}\psi(t)-\mathrm{Re}\left[\int_0^\infty\frac{J_0(\lambda)}{H_0^{(1)}(\lambda)}\,e^{i\lambda t}\,d\lambda\int_1^\infty\psi(\tau)\,e^{i\lambda\tau}\,d\tau\right] \tag{2.15}$$

Рассмотрим последний интеграл на плоскости комплексной переменной (λ); при помощи теоремы Коши заменим интегрирование по вещественной оси интегрированием по мнимой оси. Получим при $\lambda=i\nu$

$$\int_0^\infty\frac{J_0(\lambda)}{H_0^{(1)}(\lambda)}\,e^{i\lambda t}\,d\lambda\int_1^\infty\psi(\tau)\,e^{i\lambda\tau}\,d\tau=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty i\,\frac{I_0(\nu)}{K_0(\nu)}\,e^{-\nu t}\,i\,d\nu\int_1^\infty\psi(\tau)\,e^{-\nu\tau}\,d\tau=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_1^\infty\psi(\tau)\,d\tau\int_0^\infty\frac{I_0(\nu)}{K_0(\nu)}\,e^{-\nu(t+\tau)}\,d\nu \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в (2.15) и (2.15) в (2.8), получим интегральное уравнение

$$\psi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\nu t}}{K_0(\nu)}\,d\nu\int_0^\infty g(\zeta)\sin\nu\zeta\,d\zeta-\frac{1}{\pi}S(t)+\frac{1}{2}\int_1^\infty\psi(\tau)\,d\tau\int_0^\infty\frac{I_0(\nu)}{K_0(\nu)}\,e^{-\nu(t+\tau)}\,d\nu \tag{2.17}$$

Введем новую неизвестную функцию по формуле

$$\omega(t)=\sqrt{t-1}\,\psi(t) \tag{2.18}$$

Для нее получим следующее интегральное уравнение:

$$\omega(t)=h(t)-\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty\omega(\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau \tag{2.19}$$

Здесь

$$h(t)=\frac{\sqrt{t-1}}{\pi}\left[\int_0^\infty\frac{e^{-\nu t}}{K_0(\nu)}\,d\nu\int_0^\infty g(\zeta)\sin\nu\zeta\,d\zeta-S(t)\right]$$

$$K(t,\tau)=\left(\frac{t-1}{\tau-1}\right)^{1/2}\int_0^\infty\Lambda(\nu)\,e^{-\nu(t+\tau-2)}\,d\nu,\quad\Lambda(\nu)=\pi\,\frac{I_0(\nu)}{K_0(\nu)}\,e^{-2\nu} \tag{2.20}$$

Можно показать (приложение), что если $h(t)$ — ограниченная непрерывная функция, то уравнение (2.19), имеет единственное решение в этом классе функций.

Таким образом, решение задачи дается формулами (1.4) — (1.7), (2.1) и (2.2), в которых функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются соотношением (2.5) и интегральным уравнением (2.19).

3. Приложение. Рассмотрим в пространстве ограниченных непрерывных функций с нормой

$$\rho(\omega, \omega^*) = \max|\omega(t) - \omega^*(t)|$$

оператор $y = U(\omega)$, задаваемый формулой

$$y(t) = h(t) - \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \left[\left(\frac{t-1}{\tau-1}\right)^{1/2}\int_0^\infty \Lambda(\nu)\, e^{-\nu(t+\tau-2)}\, d\nu\right]\omega(\tau)\, d\tau$$

и оценим модуль разности y и y^*, где $y^* = U(\omega^*)$

$$|y(t) - y^*(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \left(\frac{t-1}{\tau-1}\right)^{1/2}\left|\int_0^\infty \Lambda(\nu)\, e^{-\nu(t+\tau-2)}\, d\nu\right| \cdot |\omega(\tau) - \omega^*(\tau)|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Lambda_{\max}}{2\pi}\rho(\omega, \omega^*)\int_1^\infty \frac{\sqrt{t-1}\, d\tau}{\sqrt{\tau-1}\,(t+\tau-2)}$$

Последний интеграл легко вычисляется и равен π. Поэтому

$$\rho(y, y^*) \leqslant 1/2\, \Lambda_{\max}\, \rho(\omega, \omega^*)$$

Согласно (2.20) $\Lambda_{\max} = 1.3305 < 2$, поэтому

$$\rho(y, y^*) \geqslant \alpha\rho(\omega, \omega^*) \qquad (\alpha < 1)$$

Таким образом, оператор $y = U(\omega)$ есть оператор сжатия, и по теореме Банаха он имеет неподвижную точку. Значит уравнение (2.19) имеет единственное решение в указанном классе функций, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Поступила 27 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О контактных задачах для полупространства с включением. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, стр. 1050.
2. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х. О некоторых контактных задачах для составного полупространства. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6, стр. 1001.
3. Srivastav R. P. An axisymmetric mixed boundary value problem for a half-space with a cylindrical cavity. J. Math. and Mech., 1964, vol. 13, No. 3, p. 385.
4. Ватсон Д. Н. Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА УПРУГИХ РЕШЕНИЙ

Д. Л. Быков, В. А. Шачнев

(Москва)

Для решения задач теории малых упруго-пластических деформаций предлагается метод построения процесса последовательных приближений, основанный на использовании приведенных модулей сдвига. Этот метод позволяет решать задачи для материалов, у которых отсутствует или имеется лишь незначительная область линейной зависимости между напряжениями и деформациями. Выбор приведенного модуля подчиняется некоторым условиям, невыполнение которых, как показано в работе, может приводить к расходящимся процессам. В случае несжимаемого материала при указанных ограничениях доказывается сходимость последовательных приближений предложенного процесса к обобщенному решению первой и второй краевых задач теории пластичности. На примере показывается, что ограничения, необходимые в общем случае для сходимости приближений, могут ослабляться при решении конкретных задач.