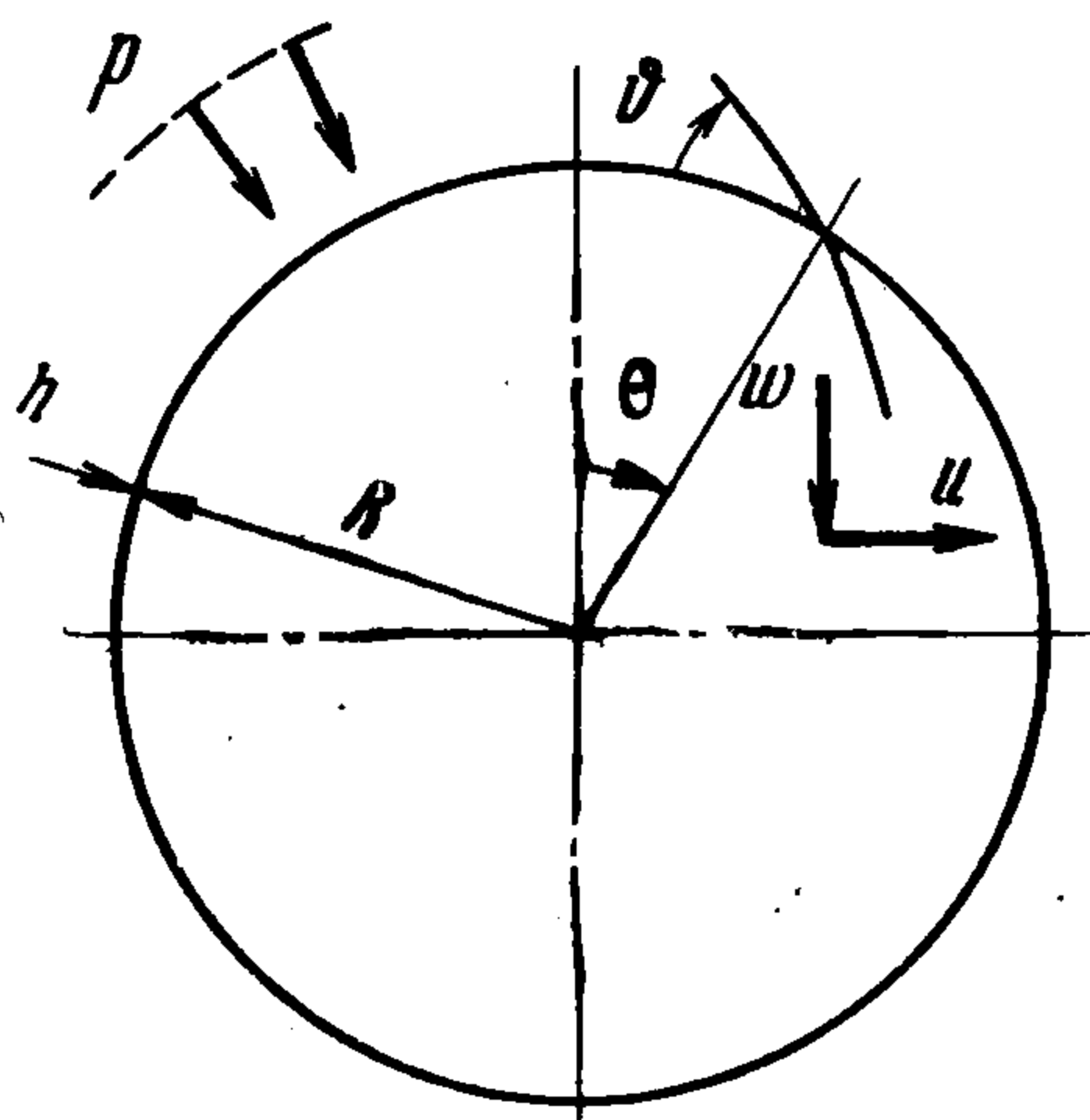


ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЭЛАСТИКА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

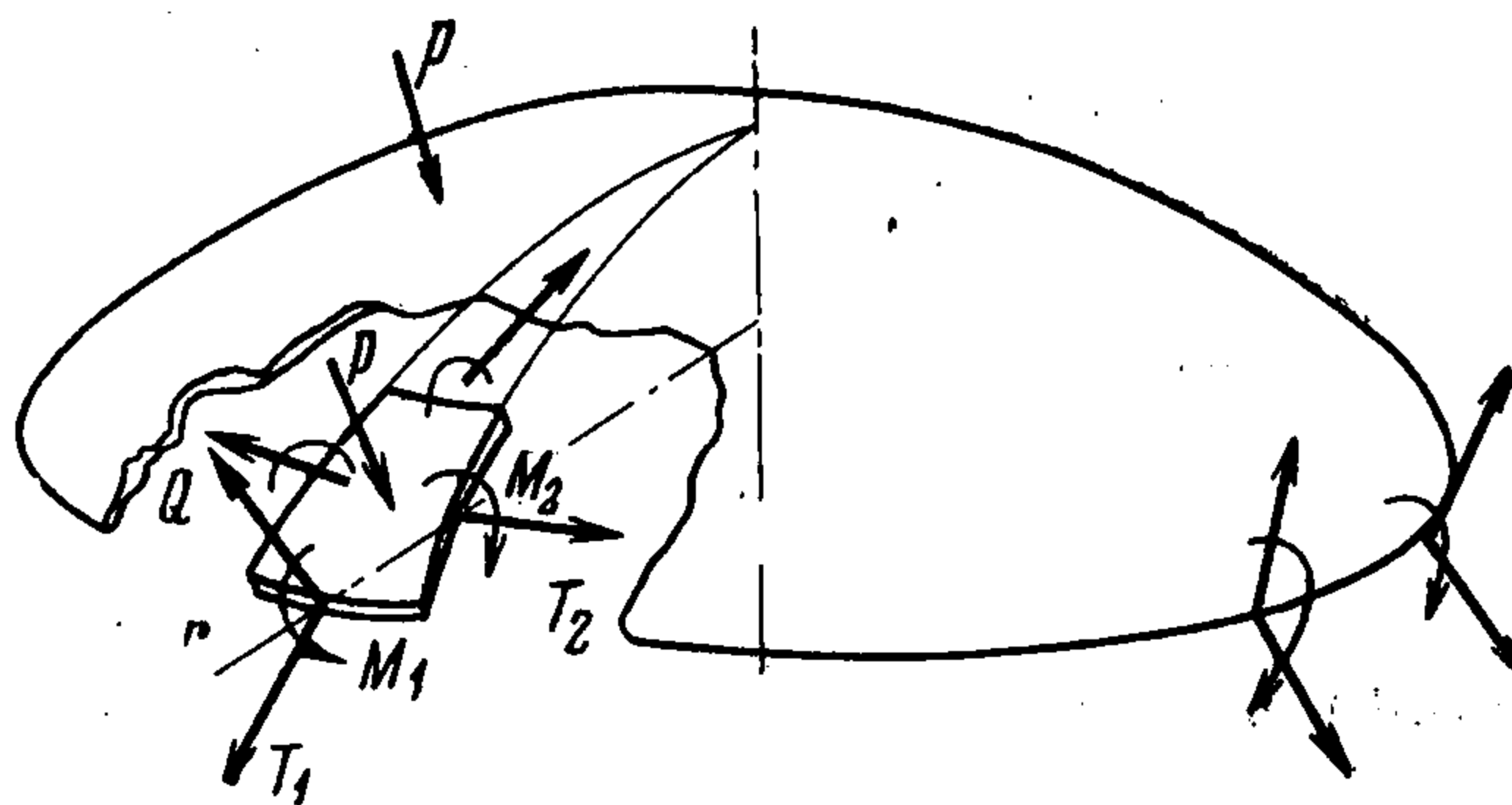
В. И. Феодосьев

(Москва)

Исследуются осесимметричные формы равновесия сферической оболочки под действием равномерно распределенного давления. Деформации считаются малыми, но на величину перемещений ограничения не накладываются. Предпосылки тождественны тем, которые принимаются при исследовании эластичности гибкого стержня, что и дает возможность воспользоваться терминологической аналогией.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. За независимое переменное принимаем угол θ для недеформированной поверхности. Положительное изменение этого угла обозначим через ϑ . Кроме того, введем безразмерные перемещения u и w , отнесенные к радиусу оболочки R (фиг. 1).

Из геометрических соотношений следует:

$$\begin{aligned} u' &= (1 + \varepsilon_1) \cos(\theta + \vartheta) - \cos \theta \\ w' &= (1 + \varepsilon_1) \sin(\theta + \vartheta) - \sin \theta \end{aligned} \quad \left((\dots)' = \frac{d(\dots)}{d\theta} \right) \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u}{\sin \theta} \quad (1.2)$$

Здесь ε_1 и ε_2 — деформации в срединной поверхности. На расстоянии z от срединной поверхности

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \frac{z}{R} R\kappa_1, \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + \frac{z}{R} R\kappa_2 \quad (1.3)$$

Здесь

$$R\kappa_1 = \vartheta' - \varepsilon_1, \quad R\kappa_2 = \frac{\sin(\theta + \vartheta)}{\sin \theta} - 1 - \varepsilon_2 \quad (1.4)$$

В соответствии с законом Гука

$$\begin{aligned} T_1 &= \varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2, & M_1 &= R\kappa_1 + \mu R\kappa_2 \\ T_2 &= \varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1, & M_2 &= R\kappa_2 + \mu R\kappa_1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь T_1, T_2, M_1, M_2 — безразмерные усилия и моменты

$$T_{1,2} = T_{1,2}^* \frac{1 - \mu^2}{Eh}, \quad M_{1,2} = M_{1,2}^* \frac{12R(1 - \mu^2)}{Eh^3}$$

К безразмерной форме приводится поперечное усилие Q^* и давление p

$$Q = Q^* \frac{1 - \mu^2}{Eh}, \quad p_0 = p \frac{R(1 - \mu^2)}{2Eh} \quad (1.6)$$

Составляем три уравнения равновесия, пренебрегая удлинениями в срединной поверхности: первое — для отсеченной части купола (фиг. 2)

$$T_1 \sin(\theta + \vartheta) - Q \cos(\theta + \vartheta) = -p_0 \sin \theta \quad (1.7)$$

два других — для элемента, выделенного из этого купола (фиг. 2)

$$\alpha^{-1} Q \sin \theta = (M_1 \sin \theta)' - M_2 \cos(\theta + \vartheta) \quad (1.8)$$

$$X' = 2p_0 \sin \theta \sin(\theta + \vartheta) + T_2 \quad (1.9)$$

Здесь

$$\alpha = h^2 / 12R^2 \quad (1.10)$$

$$X = [T_1 \cos(\theta + \vartheta) + Q \sin(\theta + \vartheta)] \sin \theta \quad (1.11)$$

Уравнение (1.9) выражает равенство нулю суммы проекций сил на ось r (фиг.2), перпендикулярную оси симметрии.

Сгруппируем полученные уравнения в виде системы, подготовленной к численному интегрированию

$$u' = (1 + \varepsilon_1) \cos(\theta + \vartheta) - \cos \theta, \quad \vartheta' = R\kappa_1 - \varepsilon_1$$

$$X' = 2p_0 \sin \theta \cos(\theta + \vartheta) + T_2$$

$$(M_1 \sin \theta)' = \alpha^{-1} Q \sin \theta + M_2 \cos(\theta + \vartheta)$$

$$w' = (1 + \varepsilon_1) \sin(\theta + \vartheta) - \sin \theta \quad (1.12)$$

Правые части могут быть вычислены на каждом шаге из равенств (1.1) — (1.4), (1.7) и (1.11).

Независимое переменное θ меняется от нуля до π . На концах интервала (в полюсах сферы) функции ϑ и u должны обращаться в нуль.

Последнее из уравнений (1.12) интегрируется независимо от четырех первых, и функция w определяется с точностью до произвольной постоянной. Для численного интегрирования системы (1.11) была принята следующая процедура.

2. Система (1.12) имеет два особых решения: первое, — соответствующее безмоментному состоянию

$$\vartheta = 0, \quad X = -p_0 \sin \theta \cos \theta, \quad u = -\frac{p_0}{1 + \mu} \sin \theta, \quad M_1 = p_0$$

и второе, — соответствующее «вывернутой наизнанку» сфере

$$\vartheta = -2\theta, \quad X = p_0 \sin \theta \cos \theta, \quad u = \frac{p_0}{1 + \mu} \sin \theta, \quad M_1 = -2(1 + \mu) - p_0$$

Рассмотрим формы равновесия, при которых на отдельных участках сферы допустима линеаризация уравнений вблизи первого или второго особого решения. На этих участках можно будет воспользоваться методом прогонки.

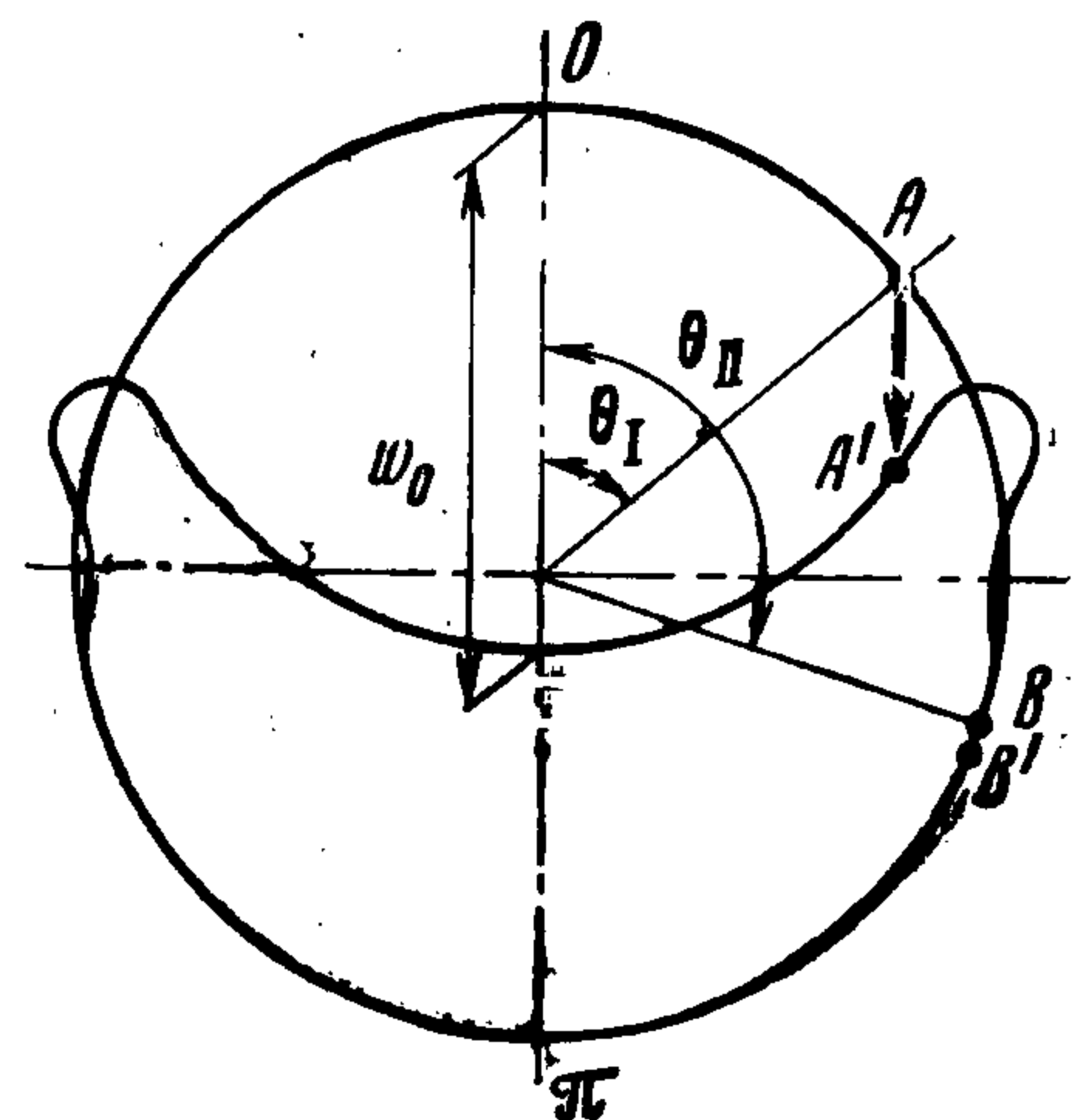
Оставшийся интервал, если он не окажется слишком большим, будет пройден методом начальных параметров.

Поступая таким образом, нельзя охватить многообразия возможных форм равновесия и, распределяя последовательность участков, необходимо представлять себе в общих чертах искомую форму.

Произведем линеаризацию вблизи первого особого решения. Примем

$$\vartheta = \Delta\vartheta, \quad X = -p_0 \sin \theta \cos \theta + \Delta X$$

$$u = -\frac{p_0}{1 + \mu} \sin \theta + \Delta u, \quad M_1 = p_0 + \Delta M_1 \quad (2.1)$$



Фиг. 3

После линеаризации всех уравнений получаем одно четвертого порядка относительно $\Delta\vartheta$

$$\begin{aligned} & \Delta\vartheta^{(IV)} + \Delta\vartheta''' 2\operatorname{ctg} \theta + \Delta\vartheta'' \left(\frac{p_0}{\alpha} - \frac{2 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) + \\ & + \Delta\vartheta' \left[\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} (3 + 2\sin^2 \theta) + \frac{p_0}{\alpha} (\operatorname{ctg} \theta - \sin 2\theta) \right] + \\ & + \Delta\vartheta \left\{ \frac{1 - \mu^2}{\alpha} - \frac{3}{\sin^4 \theta} - \frac{p_0}{\alpha} [\operatorname{ctg}^2 \theta + 2(3 + \mu) \cos^2 \theta - 1 - 2\mu] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

а также

$$\Delta X \alpha^{-1} = \Delta\vartheta'' + \Delta\vartheta' \operatorname{ctg} \theta - \Delta\vartheta (\operatorname{ctg}^2 \theta + \mu - p_0/\alpha) \quad (2.3)$$

Здесь, кроме пренебрежений, свойственных линеаризации, в окончательных уравнениях отброшены члены порядка α по сравнению с единицей.

Вблизи второго особого решения получаем аналогично

$$\begin{aligned} \vartheta &= -2\theta + \Delta\vartheta, & X &= p_0 \sin \theta \cos \theta + \Delta X \\ u &= \frac{p_0}{1 + \mu} \sin \theta + \Delta u, & M_1 &= -2(1 + \mu) - p_0 + \Delta M_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \Delta\vartheta^{(IV)} + \Delta\vartheta''' 2\operatorname{ctg} \theta + \Delta\vartheta'' \left(2 + 2\mu - \frac{2 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{p_0}{\alpha} \right) + \\ & + \Delta\vartheta' \left[3 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} + 2(2 + \mu) \operatorname{ctg} \theta + \frac{p_0}{\alpha} (\sin 2\theta - \operatorname{ctg} \theta) \right] + \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$+ \Delta\vartheta \left\{ \frac{1 - \mu^2}{\alpha} - \frac{3}{\sin^4 \theta} - 2(1 + \mu) \operatorname{ctg}^2 \theta + \right.$$

$$\left. + \frac{p_0}{\alpha} [\operatorname{ctg}^2 \theta - 1 - 2\mu + 2(3 + \mu) \cos^2 \theta] \right\} = 0$$

$$- \Delta X \alpha^{-1} = \Delta\vartheta'' + \Delta\vartheta' \operatorname{ctg} \theta - \Delta\vartheta (\operatorname{ctg}^2 \theta - 2 - \mu + p_0/\alpha) \quad (2.6)$$

3. Представим себе некоторую типичную форму равновесия, показанную на фиг. 3.

На интервале $(0, \theta_I)$ применимы уравнения (2.4) — (2.6), а на интервале (θ_{II}, π) — уравнения (2.1) — (2.3). Участок от $\theta = \theta_I$ до $\theta = \theta_{II}$ будет проходиться методом начальных параметров.

Длины участков изменяются в зависимости от параметра нагрузки p_0 . В частности θ_I может оказаться равным нулю, или $\theta_{II} = \pi$. Тогда взамен трех участков будем иметь только два; главное, чтобы отрезок (θ_I, θ_{II}) не оказался бы слишком большим.

Уравнение (2.5) интегрируется при следующих граничных условиях:

$$\Delta\vartheta = 0, \Delta X = 0 \text{ при } \theta = 0; \quad \Delta\vartheta = \Delta\vartheta_I, \Delta\vartheta' = \Delta\vartheta'_I \text{ при } \theta = \theta_I$$

где $\Delta\vartheta_I$ и $\Delta\vartheta'_I$ — некоторые параметры, подлежащие дальнейшему определению.

В результате прогонки на правом конце отрезка находим значения второй и третьей производной функции $\Delta\vartheta$. Они зависят от $\Delta\vartheta_I$ и $\Delta\vartheta'_I$ линейно. Поэтому

$$\Delta\vartheta_I'' = K_1 \Delta\vartheta_I + K_2 \Delta\vartheta'_I, \quad \Delta\vartheta_I''' = K_3 \Delta\vartheta_I + K_4 \Delta\vartheta'_I \quad (3.1)$$

где K_i — коэффициенты влияния. Они легко определяются после двукратного решения уравнения (2.5). Сначала полагаем $\Delta\vartheta_I = 1$ и $\Delta\vartheta'_I = 0$; тогда $\Delta\vartheta_I'' = K_1$ и $\Delta\vartheta_I''' = K_3$. При втором интегрировании $\Delta\vartheta_I = 0$ и $\Delta\vartheta'_I = 1$, и тогда $\Delta\vartheta_I'' = K_2$ и $\Delta\vartheta_I''' = K_4$.

Для интервала (θ_{II}, π) используется уравнение (2.2).

При $\theta = \pi$ функции $\Delta\vartheta = 0$ и $\Delta X = 0$. При $\theta = \theta_{II}$ имеем аналогично первому участку

$$\Delta\vartheta_{II}'' = K_5 \Delta\vartheta_{II} + K_6 \Delta\vartheta'_{II}, \quad \Delta\vartheta_{II}''' = K_7 \Delta\vartheta_{II} + K_8 \Delta\vartheta'_{II} \quad (3.2)$$

Коэффициенты влияния определяются тем же путем.

Теперь можно перейти к интегрированию системы (1.12) на участке (θ_I, θ_{II}) . Для этого задаемся значениями $\Delta\vartheta_I$ и $\Delta\vartheta_I'$ и из (3.1) определяем $\Delta\vartheta_I''$ и $\Delta\vartheta_I'''$. Затем при помощи выражений (1.1) — (1.11) вычисляются значения функций u , ϑ , X и $M_1 \sin \theta$ при $\theta = \theta_I$. Эти данные засылаются, как исходные, в стандартную программу интегрирования по Рунге — Кутта. Интегрирование ведется до $\theta = \theta_{II}$ и на конце интервала получаем необходимые для стыковки с третьим участком значения ϑ_k , ϑ_k' , X_k и X_k' .

При $\theta = \theta_{II}$ имеем

$$\begin{aligned}\vartheta_k &= \Delta\vartheta_{II}, & X_k &= -p_0 \sin \theta_{II} \cos \theta_{II} + \Delta X_{II} \\ \vartheta_k' &= \Delta\vartheta'_{II}, & X_k' &= -p_0 \cos 2\theta_{II} + \Delta X'_{II}\end{aligned}$$

При соблюдении этих условий обеспечивается непрерывность всех функций при переходе через точку стыковки.

Воспользовавшись выражениями (2.3) и (3.2) и заменяя $\Delta\vartheta'_{II}$ и $\Delta\vartheta_{II}$ на ϑ_k и ϑ_k' , приходим к двум уравнениям

$$\begin{aligned}X_k + p_0 \sin \theta_{II} \cos \theta_{II} - a\vartheta_k - b\vartheta_k' &= 0 \\ X_k' + p_0 \cos 2\theta_{II} - c\vartheta_k - d\vartheta_k' &= 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

где

$$a = \alpha \left(K_5 - \operatorname{ctg}^2 \theta_{II} + \frac{p_0}{\alpha} - \mu \right), \quad c = \alpha \left(K_7 + K_5 \operatorname{ctg} \theta_{II} + 2 \frac{\cos \theta_{II}}{\sin^3 \theta_{II}} \right) \quad (3.4)$$

$$b = \alpha (K_6 + \operatorname{ctg} \theta_{II}), \quad d = \alpha \left(K_8 + K_6 \operatorname{ctg} \theta_{II} - \frac{1 + \cos^2 \theta_{II}}{\sin^2 \theta_{II}} + \frac{p_0}{\alpha} - \mu \right)$$

Эти величины вычисляются по найденным ранее коэффициентам влияния.

Теперь задача заключается в подборе начальных параметров $\Delta\vartheta_I$ и $\Delta\vartheta_I'$, при которых удовлетворялись бы уравнения (3.3). Достигается это обычными приемами, связанными с линейной интерполяцией по двум параметрам.

После того как величины $\Delta\vartheta_I$ и $\Delta\vartheta_I'$ найдены, производится «чистовая» прогонка на двух участках и заключительное интегрирование по Рунге — Кутта. В итоге получаем таблицу значений ϑ на интервале $(0, \pi)$, а затем выводятся на печать функции u и w , по которым строится форма дуги меридиана.

4. Несколько слов о параметрах численной реализации описанного алгоритма.

Интервал интегрирования $(0, \pi)$ был разбит на 255 участков. Таким образом, в программе фиксировались значения функций в 256 точках. Для всех трех участков шаг $\pi/255$ оставался неизменным.

При прогонке была принята центральная конечно-разностная схема и было введено по две законтурных точки на каждом конце интервалов прогонки.

Положение границ раздела θ_I и θ_{II} выбиралось машиной по условию $|\Delta\vartheta| < 0,06$.

Для участков с малым углом θ (для пологой части сферы) допустимость линеаризации определяется не только величиной самого угла поворота $\Delta\vartheta$, но и величиной угла θ , поэтому для области, примыкающей к полюсам, накладывалось еще дополнительное условие

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{2\theta} < 0,06, \quad \frac{|\Delta\vartheta|}{2(\pi - \theta)} < 0,06$$

При подборе начальных параметров $\Delta\vartheta_I$ и $\Delta\vartheta_I'$ необходимая точность считалась достигнутой, если в двух последовательных, линейных интерполяциях изменения $\Delta\vartheta_I$ и $\Delta\vartheta_I'$ по модулю оказывались одновременно меньше 0.0001.

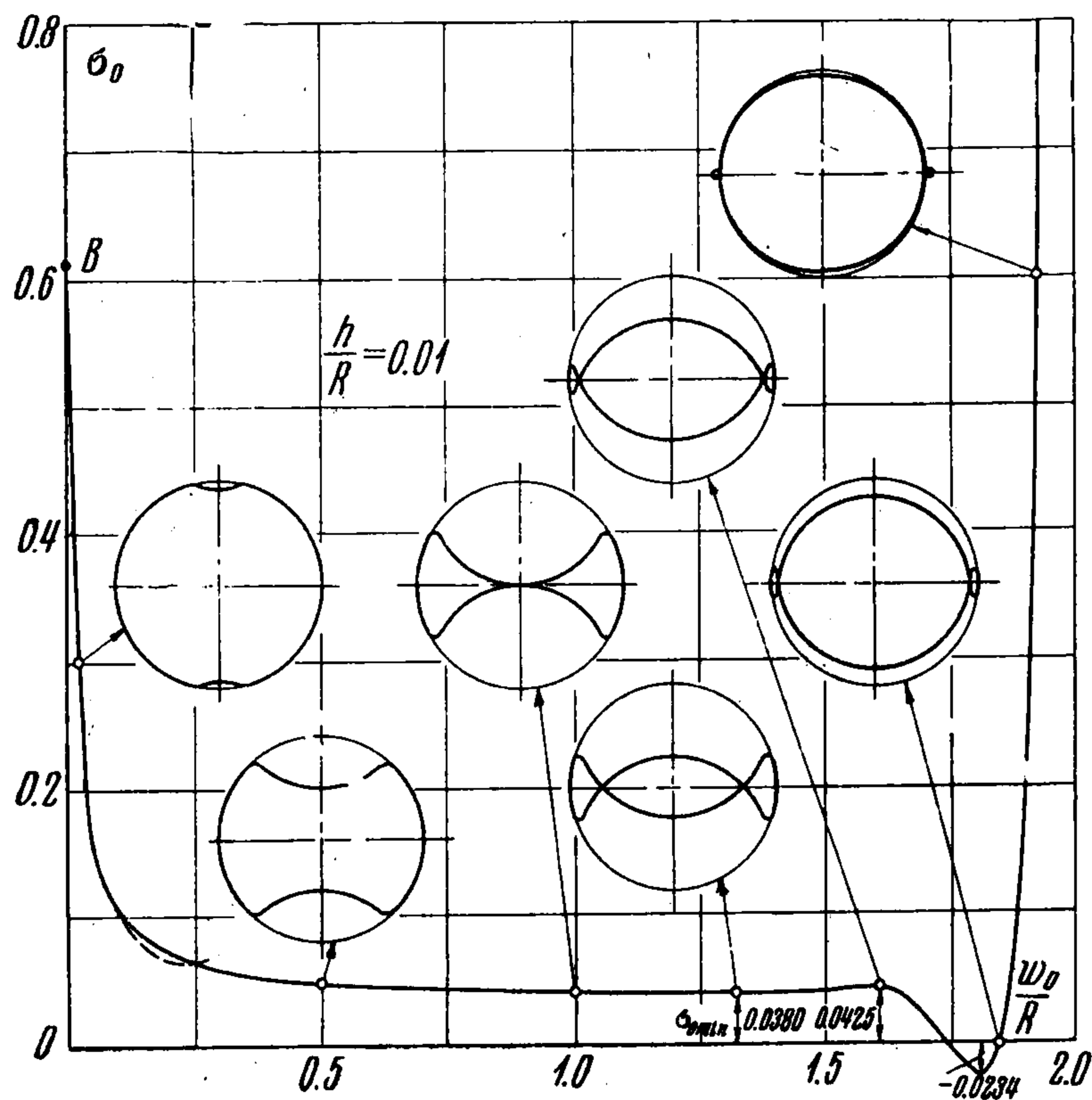
После того, как путем различных проб было найдено решение для некоторого исходного значения p_0 , машиной производился поиск новых $\Delta\vartheta_I$ и $\Delta\vartheta_I'$ для измененного значения $p_0 + \Delta p_0$ и при неизменных θ_I и θ_{II} . Затем последние определялись по указанным условиям и решение производилось заново. Величина Δp_0 варьировалась вручную в зависимости от обстоятельств, так как принципы выбора шага Δp_0 заранее предусмотреть было очень трудно.]

Если область искомых параметров $\Delta\vartheta_1$ и $\Delta\vartheta_1'$ известна с достаточной точностью, то машинное время для определения формы равновесия оказывается очень небольшим.

Но при переходе через экстремальные точки p_0^{\max} или p_0^{\min} машина, естественно, теряла базисные значения параметров и требовалось довольно много времени для новой настройки процесса счета. Достигалось это при помощи вспомогательных программ.

5. Сначала были рассмотрены формы равновесия, симметричные относительно плоскости экватора. Предполагалось, что в противоположных полюсах сферы образуются одновременно две вмятины, которые в дальнейшем развиваются навстречу одна другой. Счет велся только для одной полусферы. При $\theta = 1/2\pi$ $X = 0$ и $\vartheta = 0$.

Результаты расчета представлены на фиг. 4. По оси абсцисс откладывается безразмерное пере-



Фиг. 4

мещение полюса w_0/R , относительно плоскости экватора, а по оси ординат — параметр нагрузки

$$\sigma_0 = \frac{p}{E} \frac{R^2}{2h^2}$$

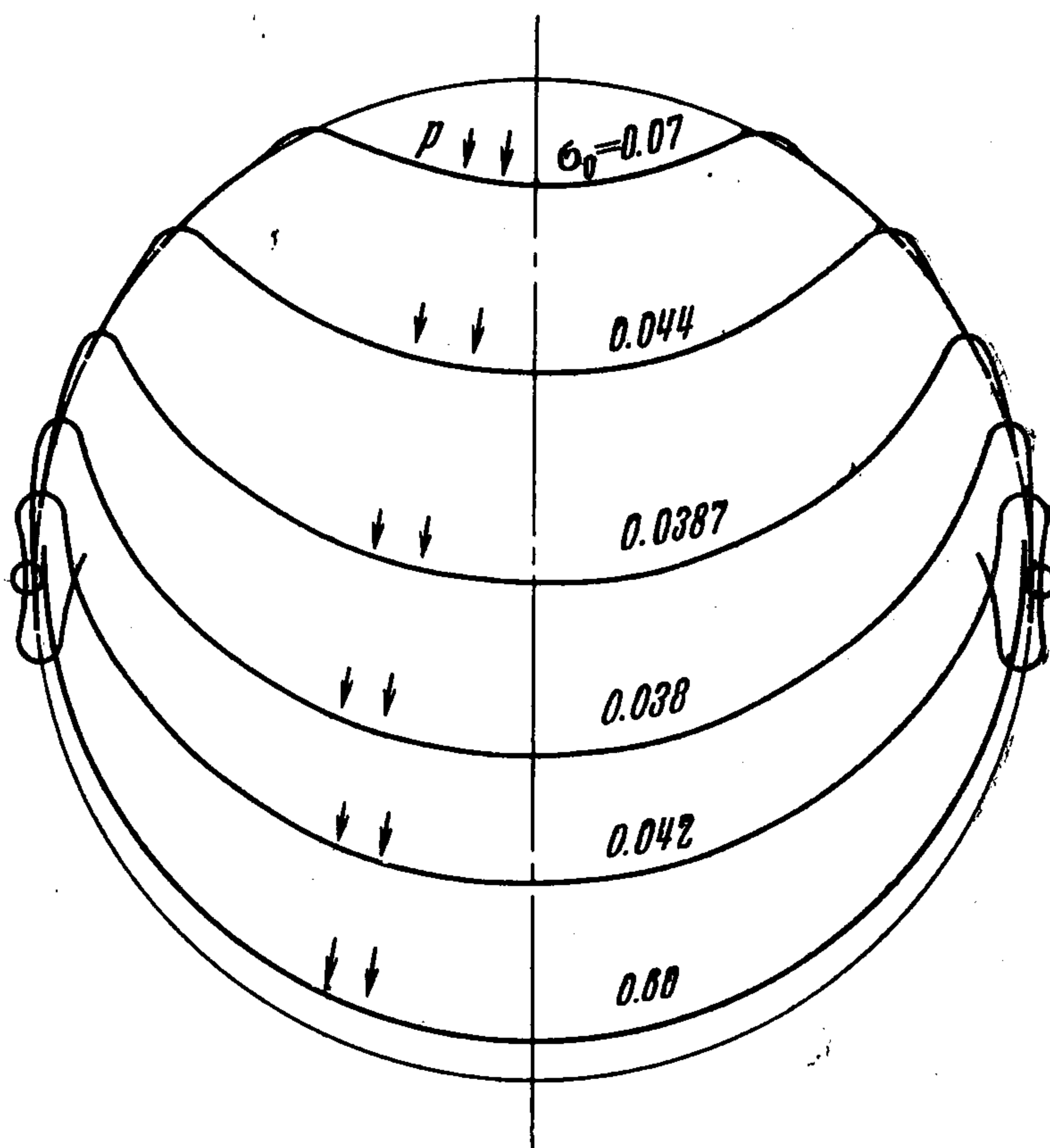
Левая часть диаграммы «нагрузка-перемещение» представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Деформации обусловлены только сжатием оболочки и перемещения очень малы. Прямая в пределах точности чертежа сливается с осью ординат.

На чертеже отмечена точка бифуркации B . От нее кривая резко спускается вниз и σ_0 имеет два минимума при

$$\begin{aligned} w_0/R = 1.32 & \quad (\sigma_0 = 0.0380) \\ w_0/R = 1.80 & \quad (\sigma_0 = -0.0234) \end{aligned}$$

и максимум при

$$w_0/R = 1.61 \quad (\sigma_0 = 0.0425)$$



Фиг. 5

На фиг. 4 показаны формы дуги меридиана деформированной оболочки. На возможность самопересечения поверхности, как и в эластках Эйлера, ограничений не накладывалось. На фиг. 5 формы равновесия показаны в более крупном масштабе. Все расчеты проведены при $h/R = 0.01$.

Рассмотрены формы равновесия, несимметричные относительно плоскости экватора, полученные интегрированием уравнений на интервале $(0, \pi)$. Диаграмма нагруз-

ка-перемещение показана на фиг. 6. Здесь под величиной w_0 / R понимается взаимное смещение полюсов. Нагрузка имеет один минимум при $w_0 / R = 1.3$ ($\sigma_0 = 0.0381$).

Построение правой части диаграммы при $w_0 / R > 3$ встретило большие трудности. Зона θ_{II} , π (фиг. 3) быстро сокращается, а нелинеаризуемый участок θ_I , θ_{II} (фиг. 3) возрастает настолько, что метод начальных параметров становится неприменимым.

Формы равновесия оболочки для некоторых значений σ_0 показаны на фиг. 7. Нижний полюс сферы принят за неподвижный.

Сопоставляя диаграммы, показанные на фиг. 4 и 6, легко убедиться, что при $w_0 / R < 1$ они оказываются полностью совпадающими; деформации верхней и нижней полусфер одна на другую практически не влияют.

Если вернуться к решению [1], полученному ранее на основе нелинейных уравнений пологой оболочки, то обнаруживается также совпадение соответствующих кривых, но только до значений $w_0 / R = 0.1$ (см. пунктирную кривую, показанную на фиг. 4). Значение $\sigma_0^{\min} = 0.06$, найденное ранее, с новым $\sigma_0^{\min} = 0.038$ не совпадает. Это является естественным следствием погрешностей, содержащихся в уравнениях равновесия пологих оболочек.

Интересно рассмотреть результаты численного решения вблизи точки бифуркации.

На фиг. 8 в измененном масштабе показан левый участок диаграмм $\sigma_0 = f(w_0 / R)$ (фиг. 4 и 6).

Прямая, проходящая через начало координат, характеризует перемещения оболочки в результате равномерного сжатия. Кривая, спускающаяся вниз от точки бифуркации B , соответствует изгибным формам равновесия.

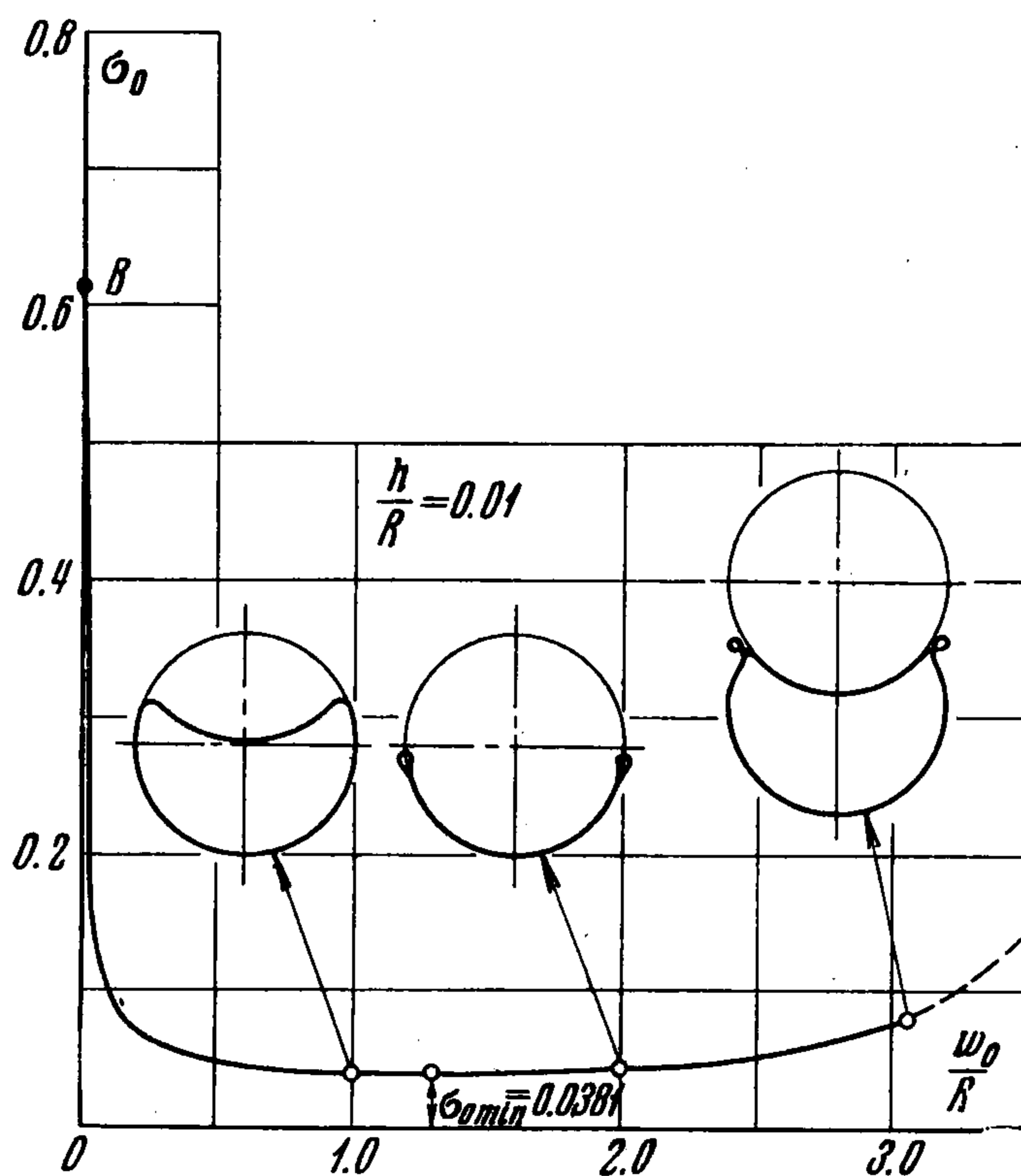
Так как вмятина вблизи полюса мала, то интервал интегрирования разбивался не на три, а на две зоны. На участке от $\theta = 0$ до $\theta = 0.5$ интегрирование нелинейных уравнений (1.12) велось по Рунге — Кутта, а от $\theta = 0.5$ до $\theta = \pi$ линеаризованные уравнения (2.2) и (2.3) решались методом прогонки. Как видно из фиг. 8, в точке B кривая и прямая встречаются под некоторым углом. Новых форм равновесия левее прямой не обнаружено.

В связи с этим возникает, как нам кажется, очень интересный вопрос. Как вблизи точки бифуркации смыкаются линейное и нелинейное решение и насколько правомерна линеаризация уравнений вблизи полюса сферы?

С одной стороны, имеется аналитическое решение задачи в линейной постановке, которое для сферической оболочки дает потерю устойчивости по формам функции Лежандра $w / R = CP_n(\theta)$ (при $h / R = 0.01$ $n = 18$). Неопределенный множитель C может быть как положительным, так и отрицательным.

С другой стороны, численное решение нелинеаризованных уравнений вблизи точки бифуркации дало для прогибов только положительные значения (внутри сферы).

Ответ на поставленный вопрос можно получить, по-видимому, только на основе аналитического исследования уравнений с малой нелинейностью. Численное решение здесь не поможет. По мере приближения к точке бифуркации теряется точность, так как масштаб функции w / R становится исчезающе малым, да и сама критическая на-

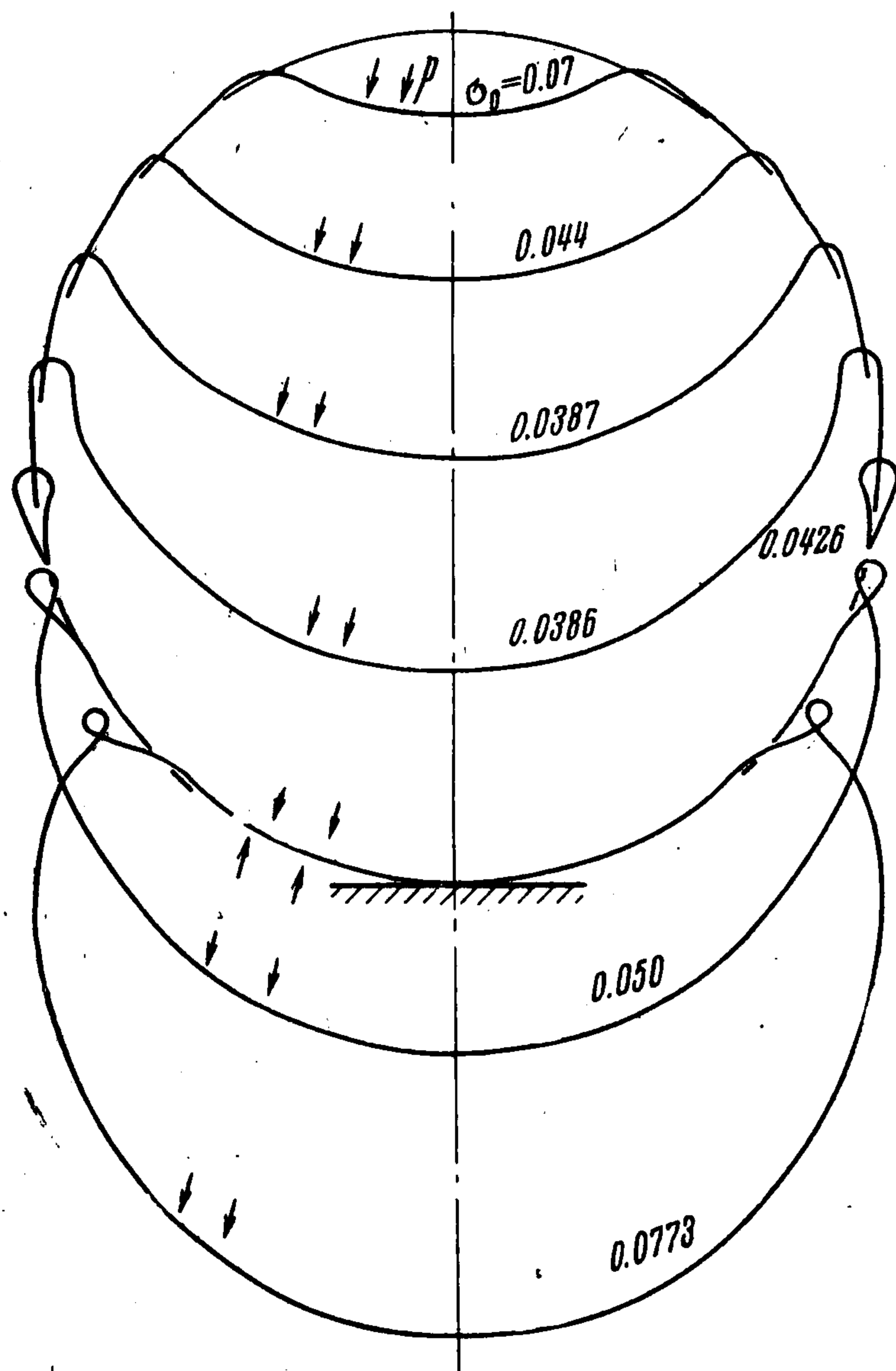


Фиг. 6

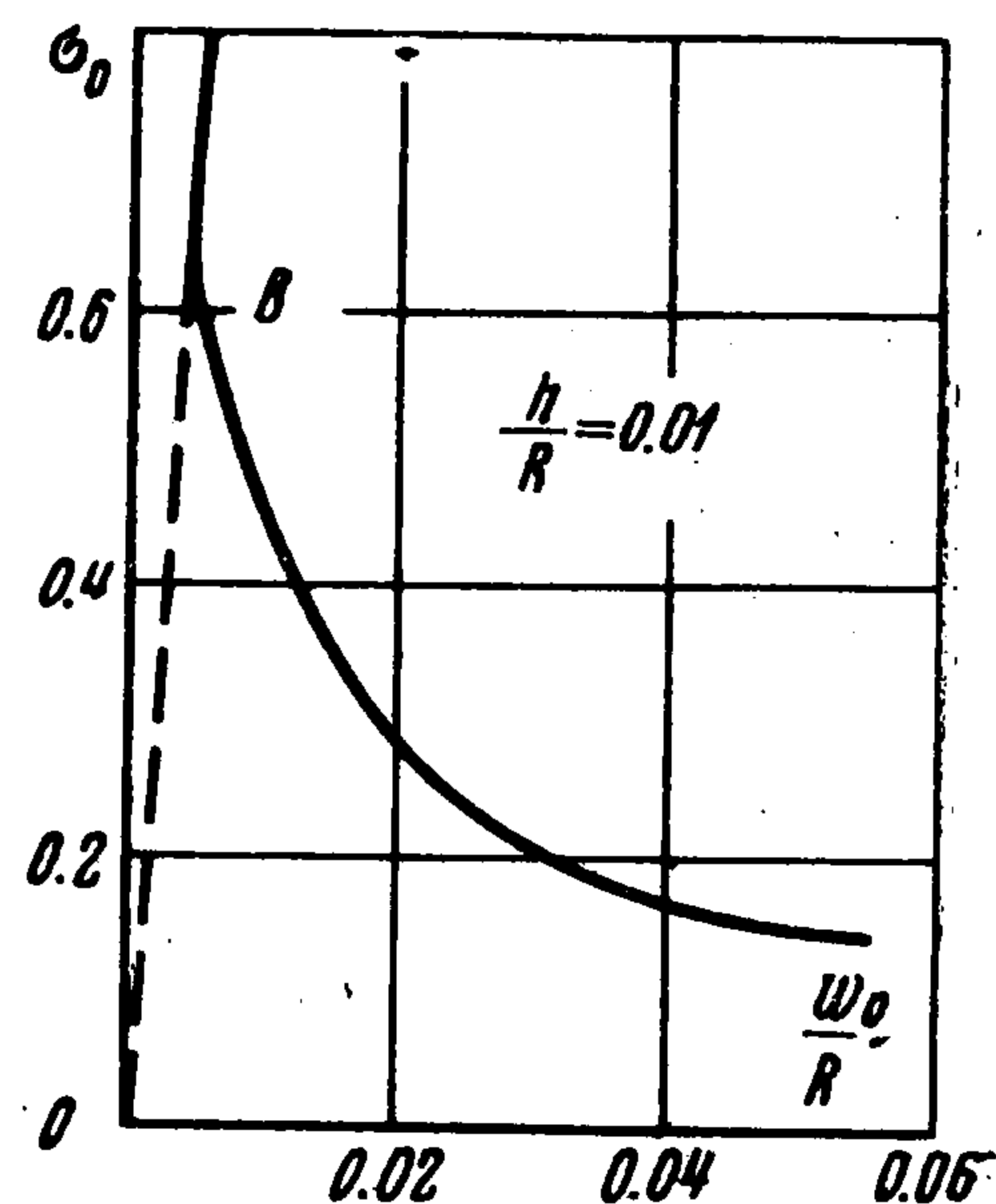
грузка! не может быть определена достаточно точно из-за очень острого угла встречи прямой и кривой. Так, в принятой численной процедуре еще при $\sigma_0 = 0.62$ просматривается хотя и малая ($w_0/R = 0.000353$), но четко выраженная изгибная форма равновесия, близкая к функции Лежандра $P_{18}(\theta)$. При $\sigma_0 \geq 0.63$ машина с точностью до 0.07% регулярно выдавала

перемещения w_0/R , соответствующие равномерному сжатию оболочки.

Таким образом, в отличие от известного линейного решения, дающего критическое $\sigma_0 = 0.605$, получена величина σ_0 , лежащая в интервале (0.62, 0.63). Такое расхождение не представляется существенным. Оно легко может быть отнесено за счет нормаль-



Фиг. 7



Фиг. 8

но допустимых различий в написании исходных уравнений устойчивости и за счет очевидных трудностей подхода к точке бифуркации. Так или иначе, но вопрос нуждается в более глубоком изучении.

Полученные в работе результаты далеко не исчерпывают форм эластики сферической оболочки. Число возможных форм равновесия, по-видимому, очень велико и возникает естественное опасение, что при углубленном анализе экзотика неоднозначности, свойственная нелинейным задачам, перерастет в проклятье многообразия.

В заключение автор считает необходимым выразить глубокую благодарность обслуживающему персоналу вычислительного центра за терпимое отношение к беспокойному автору. Особую помощь оказали ему З. А. Кудлай и М. И. Неретина, мастерство которых неизменно обеспечивало бесперебойную работу машин.

Поступила 2 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Г а б р и л ь я н ц А. Г., Ф е о д о с ь е в В. И. Об осесимметричных формах равновесия упругой сферической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного давления. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.