Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ОДНОГО ВИДА

В. С. Нустров

(Свердловск)

Исследуется структура периода параметрического решения нелинейной автономной системы, являющейся в некотором смысле обобщением систем Ляпунова.

Существование периодического решения обусловлено наличием необходимого числа первых интегралов. В случаях, когда можно утверждать наличие такого решения, выводятся формулы для приближенного вычисления периода.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании периодических решений систем, близких к рассматриваемой системе, в условиях главного резонанса (в смысле И. Г. Малкина).

§ 1. Постановка задачи. Рассматривается система

$$dx_i / dt = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + X_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где a_{ij} — постоянные, X_i — аналитические нелинейные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Допустим, что уравнение

$$|a_{ij} - \delta_{ij}\rho| = 0 \tag{1.2}$$

имеет l нулевых корней, которым отвечают l групп решений, два корня $\pm\lambda\sqrt{-1}$ и не имеет корней, кратных $\pm\lambda\sqrt{-1}$.

Используя линейное неособенное преобразование с постоянными коэффициентами, приведем систему (1.1) к виду [1,2]

$$du_j / dt = U_j, \quad dy / dt = -\lambda z + Y, \quad dz / dt = \lambda y + Z$$

$$dv_i / dt = b_{i1}v_1 + \ldots + b_{im}v_m + V_i \tag{1.3}$$

$$(j = 1, \ldots, l; \; i = 1, \ldots, m, \; m + l + 2 = n)$$

где U_j, Y, Z, V_i — аналитические нелинейные функции переменных $u_1, \ldots, u_i$, y, z, $v_1, \ldots, v_m$, а постоянные b_{ij} таковы, что среди корней уравнения $|b_{ij} - \delta_{ij}\rho| = 0$ нет нулевых и кратных корням $\pm\lambda\sqrt{-1}$.

Допустим, что система (1.3) имеет $l + 1$ аналитических первых интеграла

$$M_j(u) + M_j^{(1)}(u, y, z, v) = C_j \quad (j = 1, \ldots, l) \tag{1.4}$$

$$y^2 + z^2 + \psi(u, y, z, v) = C_{l+1} \tag{1.5}$$

где M_j — линейные независимые формы переменных $u_1, \ldots, u_l$; $M_j^{(1)}$, ψ — нелинейные члены относительно u, y, z, v. Дифференцируя интеграл

(1.5) в силу системы (1.3), находим, что члены второго порядка в ψ могут входить только в виде квадратичных форм $L_1(u)$, $L_2(v)$ с постоянными коэффициентами.

Так как формы M_j ($j = 1,\ldots, l$) независимы, то всегда [1] можно выбрать $M_j \equiv u_j$. Интегралы (1.4) запишутся тогда в виде

$$u_j + \varphi_j(u, y, z, v) = C_j \quad (j = 1,\ldots, l) \tag{1.6}$$

где φ_j — нелинейные члены относительно u, y, z, v.

Автономная система (1.3) при наличии интегралов (1.5), (1.6) имеет в достаточно малой окрестности начала координат периодическое решение, зависящее от $l+2$ параметров [3,1]. В качестве этих параметров возьмем начальные значения критических переменных $u_1,\ldots, u_l$, y, z. Последнее всегда возможно [2].

Исследуем структуру периода преобразованного решения системы (1.3). Полученные результаты необходимы при исследовании периодических решений систем, близких к (1.3), в условиях главного резонанса [2], когда должны быть известны хотя бы младшие члены в разложении периода.

§ 2. Общее выражение периода. Рассмотрим подробно лишь случай, когда уравнение (1.2) имеет только один нулевой корень ($l = 1$). Рассуждения без затруднений переносятся на случай $l = 1$ (§ 4, замечание).

Систему (1.3) и интегралы (1.5), (1.6) при $l = 1$ будем обозначать соответственно (1.3^1), (1.5^1), (1.6^1) (система A^1).

Будем считать, что система (A^1) предварительно преобразована согласно следующему утверждению.

Лемма 2.1. Систему (A^1) всегда можно преобразовать так, что функции U, Y, Z, V_i, φ обращаются в нули при $y = z = v_1 = \ldots = v_m = 0$.

Справедливость леммы следует из рассмотрения особого случая одного нулевого корня [1].

Доказательство. Уравнения

$$-\lambda z + Y = 0, \qquad \lambda y + Z = 0, \qquad b_{i1}v_1 + \ldots + b_{im}v_m + V_i = 0$$

разрешим относительно $y_*(u)$, $z_*(u)$, $v_{i*}(u)$ и заменим в (A^1)

$$y = y_1 + y_*(u), \qquad z = z_1 + z_*(u), \qquad v_k = v_k^{(1)} + v_{k*}(u) \tag{2.1}$$

Из тождества, полученного дифференцированием преобразованного интеграла (1.6^1), и из (2.1) находим, что новые нелинейные члены U_1, Y_1, Z_1, $V_i^{(1)}$ обращаются в нули при $y_1 = z_1 = v_1^{(1)} = \ldots = v_m^{(1)} = 0$.

Так как преобразованная система имеет решение

$$u = C_1, \qquad y_1 = z_1 = v_1^{(1)} = \ldots = v_m^{(1)} = 0 \tag{2.2}$$

то справедливо равенство $\varphi_1(u, 0,\ldots, 0) = 0$. При этом из преобразованного интеграла (1.5^1) следует, что решению (2.2) соответствует значение постоянной C_2

$$C_2 = \psi_1(C_1, 0,\ldots, 0)$$

Исключим переменную u в (A^1), используя интеграл (1.6^1). Получим систему

$$dy / dt = -\lambda z + Y_*, \quad dz / dt = \lambda y + Z_*$$
$$dv_i / dt = b_{i1}v_1 + \ldots + b_{im}v_m + V_{i*} \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.3}$$

и соответствующий ей интеграл

$$y^2 + z^2 + \psi_* = C_3, \quad C_3 \equiv C_2 - \psi(C_1, 0, \ldots, 0) \tag{2.4}$$

В (2.3), (2.4) звездочкой обозначены аналитические функции относительно $y, z, v_1, \ldots, v_m, C_1$, обращающиеся в нули (согласно лемме 2.1) при $y = z = v_1 = \ldots = v_m = 0$.

Функции Y_*, Z_*, V_{i*} могут содержать члены первого порядка относительно $y, z, v_1, \ldots, v_m$ коэффициенты при которых будут аналитическими функциями C_1, обращающимися в нули при $C_1 = 0$. Относительно вида функции ψ_* справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. Функция ψ_* в (2.4) при достаточно малых значениях постоянной C_1 не содержит членов первого порядка относительно $y, z, v_1, \ldots, v_m$.

Доказательство. Пусть

$$\psi_* = Ay + Bz + D_1 v_1 + \ldots + D_m v_m + \ldots \tag{2.5}$$

где не выписаны нелинейные члены.

Дифференцируем интеграл (2.4) в силу системы (2.3). Приравнивая в полученном тождестве коэффициенты при первых степенях $y, z, v_1, \ldots, v_m$ нулю, получим однородную систему для определения неизвестных $A, B, D_1, \ldots, D_m$. Определитель этой системы есть непрерывная функция C_1 обращающаяся при $C_1 = 0$ в величину $\lambda^2|b_{ij}|$, отличную от нуля. Тогда в (2.5) величины $A = B = D_1 = \ldots = D_m = 0$ для достаточно малых значений постоянной C_1.

Используя доказанные леммы 2.1, 2.2, выражение периода решения системы (2.3), (2.4), а следовательно, и периода решения системы (A^1), можно получить теперь обычным путем [1,2].

Ограничимся указанием основных моментов вывода формулы периода, опуская выкладки, приведенные в [1,2].

Заменим в (2.3), (2.4)

$$y = \rho\cos\vartheta, \qquad z = \rho\sin\vartheta, \qquad v_i = \rho\chi_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.6}$$

Для достаточно малых значений ρ, χ можно положить $C_3 = C^2$ в (2.4) и (с учетом леммы 2.2) разрешить интеграл (2.4) относительно ρ

$$\rho = \pm C\,[1 + G_1(C_1, \chi, \vartheta) + CG_2(C, C_1, \chi, \vartheta)] \tag{2.7}$$

где G_1, G_2 — аналитические функции своих аргументов, периодические по ϑ; $G_1(0, 0, \vartheta) = 0$.

Используя (2.7), заменим систему (2.3) системой m-го порядка

$$\frac{d\chi_i}{d\vartheta} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}(b_{ij} + d_{ij}(C_1, \vartheta))\chi_j + C_1K_i^{(1)}(C_1, \vartheta) + CK_i^{(2)}(C, \chi, C_1, \vartheta)$$
$$(i = 1, \ldots, m) \tag{2.8}$$

где d_{ij} $(d_{ij}(0, \vartheta) = 0)$, $K_i^{(1)}$, $K_i^{(2)}$ — аналитические функции своих аргументов, периодические по ϑ.

Система (2.8) при достаточно малых значениях постоянных C_1, C имеет периодическое решение вида [2]

$$\chi_i = \chi_i(C_1, C, \vartheta), \qquad \chi_i(0, 0, \vartheta) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.9}$$

Тогда для периода решения системы (2.8), а значит и для периода решения системы (A^1) справедлива формула [1] (стр. 249)

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\vartheta}{\lambda\rho + (Z_*)\cos\vartheta - (Y_*)\sin\vartheta} \tag{2.10}$$

где скобки означают последовательно выполненные замены (2.6), (2.7), (2.9).

Из (2.10) находим период

$$T = 2\pi\lambda^{-1}[1 + p(C_1) + q(C_1, C)]$$
$$p(C_1) = \sum_{i\geqslant 1} p_i C_1^i, \quad = \sum_{j\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0} q_{2j,k} C_1^k C^{2j} \tag{2.11}$$

где p_i, $q_{2j,k}$ — постоянные, а C содержится только в четных степенях [1].

Заменяя в (2.11) (с использованием интегралов (1.6) и (2.4))

$$C_1 = a + \varphi(a, b, c), \quad C^2 \equiv C_2 - \psi(C_1, 0,\ldots,0), \quad C_2 = b^2 + c^2 + \psi(a, b, c) \tag{2.12}$$

где a, b, c — начальные значения переменных u, y, z, получим искомое выражение периода $T(a, b, c)$ решения системы (A^1).

Заметим, что разложение периода $T(a, b, c)$ может начинаться с членов любого порядка (нечетный порядок вносится постоянной C_1).

В дальнейшем (§ 3, 4) систему (A^1) будем рассматривать без переменных $v_1,\ldots, v_m$

$$du / dt = U(u, y, z), \qquad dy / dt = -\lambda z + Y(u, y, z), \qquad dz / dt = \lambda y + Z(u, y, z) \tag{2.13}$$

с интегралами

$$u + \varphi(u, y, z) = C_1 \quad (а), \qquad y^2 + z^2 + \psi(u, y, z) = C_2 \quad (б) \tag{2.14}$$

При этом общность задачи не снижается, так как систему (A^1) всегда можно привести к виду (2.13), (2.14) (см., например, [2]).

Укажем правила подсчета младших членов в разложении периода $T(a, b, c)$.

§ 3. Функция $p(C_1)$ в (2.11). Рассмотрим подынтегральное выражение в (2.10) после замены (2.6), (2.7), (2.9) и сокращения числителя и знаменателя на ρ.

Функция $p(C_1)$ в (2.11) создается линейными членами относительно y, z в Y_*, Z_* (система (2.3) без переменных v_j), которые в свою очередь образуются из произведений вида $u^i y$, $u^i z$ ($i \geqslant 1$) в Y, Z (система (2.13) после исключения u при помощи интеграла (2.14) (а).

Допустим, что в функциях Z, Y есть члены соответственно

$$\alpha_i u^i y + \beta_i u^i z, \qquad \gamma_i u^i y + \delta_i u^i z \quad (i \geqslant 1) \tag{3.1}$$

Выражения (3.1) после необходимых операций дают следующее значение для подынтегральной функции в (2.10):

$$\{\lambda + [\alpha_i \cos^2\vartheta + (\beta_i - \gamma_i)\sin\vartheta\cos\vartheta - \delta_i \sin^2\vartheta]\, C_1^i\}^{-1} \tag{3.2}$$

где опущены члены, зависящие от C, а также члены, зависящие от степеней C_1, отличных от i.

Выполнив деление в (3.2) и интегрируя от 0 до 2π, получим значение $p(C_1)$ в (2.11).

Из изложенного очевидна справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.1. а) Пусть в функциях Y, Z (система (2.13)) нет членов вида (3.1), или, если они есть, то в Y входят только $\gamma_i u^i y$, а в Z — только $\beta_i u^i z$. В последнем случае пусть $\gamma_i = \beta_i$ для всех i. Тогда из (2.11) величина $p(C_1) \equiv 0$.

б) Пусть в Z есть член $\alpha_h u^h y$, в Y — член $\delta_h u^h z$, $\alpha_h \neq \delta_h$ и для всех членов (3.1) в Y, Z при $1 \leqslant i < h$ выполнено одно из требований п. а). Тогда

$$p(C_1) = (2\lambda)^{-1}(\delta_h - \alpha_h)\, C_1^h + (\cdots)\, C_1^{h+1} + \ldots \tag{3.3}$$

в) Пусть в Z есть член $\beta_\sigma u^\sigma z$, в Y — член $\gamma_\sigma u^\sigma y$, $\beta_\sigma \neq \gamma_\sigma$ и для всех членов (3.1) в Y, Z при $1 \leqslant i < \sigma$, $\sigma < i \leqslant 2\sigma$ выполнено одно из требований п. а.). Тогда

$$p(C_1) = (3\lambda^2)^{-1}(\beta_\sigma - \gamma_\sigma)^2 C_1^{2\sigma} + (\cdots)\, C_1^{2\sigma+1} + \ldots \tag{3.4}$$

§ 4. Функция $q(C_1, C)$ в (2.11) Ограничимся вычислением коэффициентов $q_{2k,0}$ $(k \geqslant 1)$. Эти коэффициенты образуются только свободными членами относительно C_1 в выражении (2.7) для ρ. Рассмотрим частный случай.

Пусть функции φ, ψ в (2.14) обращаются в нули при $u = 0$. Дифференцируя интегралы (2.14) в силу системы (2.13), находим, что $U(0, y, z) = 0$, а в функциях Y, Z возможны члены, не зависящие от u, только в том случае, если они удовлетворяют равенству

$$2yY + 2zZ = 0 \tag{4.1}$$

Пусть в Y есть члены

$$-s_1 z^i y^j - s_2 z^{i+1} y^{j-1} \tag{4.2}$$

и в Z — члены

$$s_1 z^{i-1} y^{j+1} + s_2 z^i y^j \tag{4.3}$$

удовлетворяющие условию (4.1).

В рассматриваемом частном случае функции ψ_* в (2.4) и G_1, G_2 в (2.7) (без переменных соответственно $v_j\ \chi_j$) обращаются в нули при $C_1 = 0$.

Выражения (4.2), (4.3) дают значение для подынтегральной функции в (2.10):

$$[\lambda + (s_1 \sin^{i-1}\vartheta \cos^j \vartheta + s_2 \sin^i \vartheta \cos^{j-1}\vartheta)\, C^{i+j-1}]^{-1} \tag{4.4}$$

где опущены члены, зависящие от C_1, а также члены, зависящие от степеней C, отличных от $i + j - 1$.

Выполнив деление в (4.4) и интегрируя по ϑ от 0 до 2π, получим значение коэффициента $q_{2k,0}$ в (2.11). Справедлива, таким образом, следующая лемма.

Лемма 4.1. а) Пусть функции φ, ψ, Y, Z в (2.13), (2.14) обращаются в нули при $u = 0$. Тогда в (2.11) величина $q_{2k,0} = 0$ $(k = 1,2,\ldots)$.

б) Пусть функции φ, ψ обращаются в нули при $u = 0$ и в функциях Y, Z члены (4.2), (4.3) наименьшего порядка. Тогда первый отличный от нуля коэффициент $q_{2k,0}$ в (2.11) равен:

если i — нечетное число, j — четное число

$$q_{i+j-1,0} = -\frac{s_1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} \sin^{i-1}\vartheta \cos^j \vartheta\, d\vartheta \tag{4.5}$$

если i — четное число, j — нечетное число

$$q_{i+j-1,0} = -\frac{s_2}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} \sin^i\vartheta \cos^{j-1}\vartheta\, d\vartheta \tag{4.6}$$

если $(i + j)$ — четное число

$$q_{2(i+j-1),0} = \frac{1}{2\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi} (s_1^2 \sin^{2(i-1)}\vartheta \cos^{2j}\vartheta + s_2^2 \sin^{2i}\vartheta \cos^{2(j-1)}\vartheta)\, d\vartheta \tag{4.7}$$

Следствие. Если при попытке использования формул (4.5), (4.6) окажется, что соответственно $s_1 = 0$ или $s_2 = 0$, то первый отличный от нуля коэффициент $q_{2(i+j-1),0}$ получим из (4.7) при $s_1 = 0$ или $s_2 = 0$.

Замечание. Пусть уравнение (1.2) допускает $l > 1$ нулевых корней. Леммы 2.1, 2.2 остаются справедливыми. Члены (3.1) надо рассматривать для каждой переменной $u_1, \ldots, u_l$ и составлять, таким образом, полное выражение (3.2). Производя в (3.2) деление и интегрируя по ϑ от 0 до 2π, получим функцию $p(C_1, \ldots, C_l)$ в (2.11). Функция q в (2.11) будет зависеть от $C_1, \ldots, C_l, C$. В условии леммы 4.1 теперь должно стоять требование обращения в нуль функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, ψ, Y, Z или только $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, ψ при $u_1 = \ldots = u_l = 0$.

Покажем на примерах, как использовать полученные в § 3,4 результаты для определения младших членов в разложении периода $T(a, b, c)$. Знание этих членов, как уже было отмечено в § 1, необходимо при исследовании систем, близких к (1.3).

§ 5. **Примеры.** 1. Система

$$du/dt = 2\lambda y z^2 (1 + u) - \lambda y^3, \quad dy/td = -\lambda z - \lambda y z + \frac{1}{2}\lambda y^2 z^2$$

$$dz / dt = \lambda y - \lambda z^3 \tag{5.1}$$

допускает интегралы

$$u + y^2 z = C_1, \ y^2 + z^2 + u z^2 = C_2$$

Используя формулу (2.11), а также (3.3), где $\delta_h = -\lambda$, $\alpha_h = 0$, $h = 1$, и заменяя $C_1 = a + \ldots$ по (2.12), получим

$$T = 2\pi\lambda^{-1}(1 - {}^1/_2\, a + \ldots)$$

2. Система

$$du / dt = uz, \ dy / dt = -z - yz, \ dz / dt = y + y^2 - {}^3/_2 u^3 \tag{5.2}$$

допускает интегралы

$$u + uy = C_1, \ y^2 + z^2 + u^3 = C_2 \tag{5.3}$$

Преобразуем систему (5.2), (5.3) согласно лемме 2.1. Для этого разрешим уравнения

$$-z - yz = 0, \ y + y^2 - {}^3/_2\, u^3 = 0$$

относительно y, z как функций u. Найдем

$$z_* (u) \equiv 0, \ y_* (u) = {}^3/_2 u^3 + \ldots$$

Заменяя в (5.2), (5.3) $z = z_* (u) + z_1$, $y = y_* (u) + y_1$, получим

$$dy / dt = u z_1, \ dy_1 / dt = -z_1 - y_1 z_1, \ dz_1 / dt = y_1 + y_1^2 - 3u^3 y_1$$

$$u + u y_1 = C_1, \ y_1^2 + z_1^2 + 3u^3 y_1 + u^3 = C_2$$

По формуле (3.3) имеем $p(C_1) = {}^3/_2\, C_1^3 + \ldots$ По формуле (4.7), где $i = j = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, получим

$$q_{20} = {}^1/_2, \ q(C_1, C) = {}^1/_2\, C^2 + \ldots$$

Сравнивая функции $p(C_1)$ и $q(C_1, C)$ и проделывая замену (2.12), находим

$$T = 2\pi\, [1 + {}^1/_2\, (b^2 + c^2) + \ldots]$$

3. Система

$$du / dt = -y^2 + z^2, \qquad dy / dt = -z + {}^3/_2\, u^2 y, \qquad dz / dt = y - {}^3/_2\, u^2 z \tag{5.4}$$

допускает интегралы

$$u + yz = C_1, \ y^2 + z^2 + u^3 = C_2$$

По формуле (3.4), где $\gamma_\sigma = {}^3/_2$, $\beta_\sigma = -{}^3/_2$, $\sigma = 2$, получим $p(C_1) = {}^9/_8 C_1^4 + \ldots$ В выражении (2.11) вычислим $q = -{}^3/_4\, C_1 C^2 + \ldots$. Сравнивая функции $p(C_1)$, $q(C_1, C)$ находим (после замены (2.12))

Автор благодарит С. Н. Шиманова за ценные советы.

$$T = 2\pi\ [1 - {}^3/_4\, a\ (b^2 + c^2) + \ldots]$$

Поступила 27 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. М а л к и н И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
3. Ш и м а н о в С. Н. Обобщение одного предложения Ляпунова о существовании периодических решений. ПММ., 1959, т. 23, вып. 2.