Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА ДЛЯ РАСШИРЯЮЩИХСЯ ИЛИ СЖИМАЮЩИХСЯ ОБЛАСТЕЙ

Г. А. Гринберг

(Ленинград)

В работе рассматривается задача о решении уравнения вида

$$a\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z, t)$$

(где a — постоянная, f — заданная функция), когда задано начальное состояние, а форма поверхности, ограничивающей область, изменяется со временем с сохранением подобия. Показывается, что она может быть приведена введением новых переменных и функции к решению уравнения вида

$$a\Delta v - R^2 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{R^3 R''}{4a} \rho^2 v = F$$

где $R = R(t)$—функция, определяющая быстроту перемещения граничной поверхности, $R'' = d^2 R / dt^2$, ρ — сферический или полярный радиус, F — известная функция координат и времени, причем для функции v граничные условия задаются на поверхности, подобной граничной поверхности для u, но неподвижной. Показано, что когда $R = \sqrt{Mt^2 + Nt + P}$, где M, N и P — любые постоянные (в частности, может быть $R = Mt + N$ и $R = \sqrt{Mt + N}$), то однородное уравнение для v (при $f = 0$) допускает разделение переменных в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Из этого, в частности, получается общее решение задач для расширяющихся или сжимающихся по указанному закону пластины, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра конечной длины, сферы или сферической оболочки и др. В случае, когда $R(t)$ имеет форму, отличную от вышеуказанной, решение исходной задачи для u сведено к относительно простому интегральному уравнению.

1. Рассмотрение задач указанного в заголовке типа сводится к решению уравнения вида

$$a\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, y, z, t) \tag{1.1}$$

(где a — постоянная, $f(x, y, z, t)$ — заданная функция координат и времени); когда дано начальное состояние

$$u|_{t=0} = F(x, y, z)$$

а границы области перемещаются со временем.

К задачам такого рода приводят, как известно, различные вопросы теории диффузии, теплопроводности, механики грунтов и др. [1]

Начнем с некоторого общего преобразования уравнения (1.1) Пусть $R = R(t)$ — какая-нибудь функция времени, непрерывная и имеющая непрерывные первую и вторую производные. Вводя вместо x, y, z новые

[1] См., например, [1], пп. 1—7 списка литературы.

переменные $\xi = x / R$, $\eta = y / R$, $\zeta = z / R$ получим

$$a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right) + RR'\left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) - R^2 \frac{\partial u}{\partial t} =$$
$$= R^2 f(\xi R, \eta R, \zeta R, t), \quad R' = \frac{dR}{dt} \tag{1.2}$$

В этом уравнении производная $\partial u / \partial t$ берется уже при постоянных ξ, η, ζ. Рассматривая здесь ξ, η и ζ как некоторые декартовы координаты и вводя соответствующий радиус-вектор ρ, проведенный из начала координат в точку ξ, η, ζ, можем переписать уравнение (1.2) еще так:

$$a\Delta_{\xi,\eta,\zeta} u + RR'(\rho, \operatorname{grad} u) - R^2 \frac{\partial u}{\partial t} = R^2 f(\xi R, \eta R, \zeta R, t) \tag{1.3}$$

где значки ξ, η, ζ у лапласиана показывают, что он берется в этих переменных (в дальнейшем будем эти значки отбрасывать).

Введем теперь вместо u новую функцию v соотношением

$$u = qv \tag{1.4}$$

$$q = R^{n/2} \exp - RR'\rho^2 / 4a, \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \tag{1.5}$$

Здесь нужно положить $n = 3$, если рассматривается пространственная задача, когда u зависит от всех трех координат; $n = 2$, если задача двумерная, и $n = 1$, если она одномерная (плоская). Как нетрудно убедиться, уравнение (1.2) или (1.3) переходит при этом в такое:

$$a\Delta v - R^3 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{R^3 R''}{4a} \rho^2 v = \frac{R^2 f(\xi R, \eta R, \zeta R, t)}{q}$$
$$R'' = \frac{d^2 R}{dt^2} \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right) \tag{1.6}$$

Если еще ввести новое «время» τ соотношением

$$\tau = \int \frac{dt}{R^2(t)} \tag{1.7}$$

то (1.6) принимает вид

$$a\Delta v - \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{R^3 R''}{4a} \rho^2 v = \frac{R^2 f}{q} \tag{1.8}$$

и в такой форме оно отличается от исходного уравнения только наличием слева [1] слагаемого $\frac{1}{4} R^3 R'' \rho^2 v / a$. Начальное условие $u|_{t=0} = F(x, y, z)$ переводится при этом при помощи формул (1.4), (1.5) в соответствующее начальное условие

$$v\Big|_{\tau=\tau_0} = \frac{F(\xi R, \eta R, \xi R)}{q}\Big|_{t=0} =$$
$$= [R(0)]^{1/_2 n} \exp\left(\frac{R(0) R'(0)}{4a} \rho^2\right) F[\xi R(0), \eta R(0), \xi R(0)]$$
$$\tau_0 = \tau\,|_{t=0}.$$

---

[1] и, конечно, тем, что одно записано в переменных x, y, z, t, а второе — в переменных ξ, η, ξ, τ.

В том частном случае, когда $R'' = 0$, т. е. когда

$$R = At + B \tag{1.9}$$

где A и B — постоянные, отличие в виде уравнений (1.1) и (1.8) вообще исчезает и они различаются лишь правыми частями (известными) [1]. Отсюда, в частности, следует, что если мы умеем решить уравнение

$$a\Delta v - \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{R^2 f}{q} \qquad (R = At + B) \tag{1.10}$$

для какой-либо области, форма которой не меняется со временем, причем известно начальное состояние системы, а на границе области задаются произвольным образом [2] значения функции v, то для уравнения (1.1) можно решить аналогичную задачу для области, имеющей такую же форму, но которая равномерно расширяется или сжимается со временем, оставаясь подобной самой себе. Это непосредственно вытекает из показанного выше соответствия уравнений и начальных условий для обеих задач и из того, что каждой точке ξ°, η°, ζ° границы (неподвижной!) области для функции v соответствует граничная точка с координатами

$$x^\circ = \xi^\circ R = \xi^\circ\,(At + B), \quad y^\circ = \eta^\circ\,(At + B), \quad z^\circ = \zeta^\circ\,(At + B)$$

в задаче для u. В частности, во всех тех случаях, когда указанная граничная задача для v решается в тех системах координат, в которых однородное уравнение, соответствующее (1.10), т. е.

$$a\,\Delta w - \partial w \,/\, \partial \tau = 0 \tag{1.11}$$

допускает разделение переменных (в декартовых, цилиндрических, сферических), на этом пути непосредственно получается и решение в известных функциях соответствующих задач для равномерно расширяющихся или сжимающихся областей, имеющих, например, форму неограниченной пластины постоянной толщины, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра конечной длины, сферы или сферического слоя и т. п.

Таково решение задачи, когда $R = At + B$. Наряду с этим, особого внимания заслуживает более общий случай [3], когда

$$R^3 R'' = \text{const} = -\alpha \neq 0$$

Уравнение (1.6) обращается при этом в такое:

$$a\Delta v - R^2 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\alpha}{4a}\,\rho^2 v = \frac{R^2 f}{q} \tag{1.12}$$

и соответствующее однородное уравнение

$$a\Delta w - R^2 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\alpha}{4a}\,\rho^2 w = 0 \tag{1.13}$$

---

[1] Для однородного уравнения $a\,\Delta\,u = \partial u \,/\, \partial t$ из этого, в частности сразу следует известная теорема, что если функция $u = \varphi\,(x, y, z, t)$ является его решением, то решением будет и

$$u = t^{-n/2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4at}\right) \qquad \varphi\left(\frac{x}{At}, \frac{y}{At}, \frac{z}{At}, -\frac{1}{A^2 t}\right)$$

[2] В зависимости от координат и времени.

[3] Это будет, например, при $R = \sqrt{At + B}$, причем $\alpha = {}^1/_4\,A^2$. Случай, когда $R = At + B$ соответствует, очевидно, значению $\alpha = 0$.

допускает, как нетрудно видеть, разделение переменных в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. В силу этого и для уравнения (1.12) могут быть решены в этих координатах все те задачи, которые допускали такое решение в случае уравнения (1.10), т. е., в частности, для пластины равномерной толщины, для прямоугольного параллелепипеда, цилиндра конечной длины, сферы или сферического слоя и т. п. (с неподвижными границами).

Из этого опять-таки следует, что соответствующая краевая задача для исходного уравнения (1.1) полностью решается для областей той же формы, но расширяющихся или сжимающихся с сохранением подобия по такому закону, что каждой точке ξ°, η°, ζ° неподвижной граничной поверхности в задаче для v соответствует точка $x^\circ = \xi^\circ R$, $y^\circ = -\eta^\circ R, z^\circ = \zeta^\circ R$ в исходной задаче для u. Здесь R, удовлетворяющее уравнению $R^3 R'' = -\alpha$ определяется, в общем случае, формулой

$$R = \sqrt{(At+B)^2 - \alpha / A^2} \tag{1.14}$$

где A, B и α — произвольные постоянные. Как уже указывалось выше, частными случаями этой формулы будут $R = At + B$ и $R = \sqrt{Mt + N}$, где M и N — новые постоянные. Задание начального состояния системы т. е. функции $u\,|_{t=0} = F(x, y, z)$, а также значений[1] u на движущейся по одному из описываемых формулой (1.14) законов граничной поверхности может быть при этом произвольным.

2. Рассмотрим более подробно вопрос о функциях, входящих при разделении переменных в уравнении (1.13) в декартовых, цилиндрических или сферических координатах. Начнем с последних двух задач, причем ограничимся, для простоты, случаями радиальной или сферической симметрии. Уравнение (1.13) принимает при этом следующий вид:

$$\frac{a}{\rho^n}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^n\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{\alpha}{4a}\rho^2 w = R^2\frac{\partial w}{\partial t} \qquad (n = 1, 2) \tag{2.1}$$

причем значения $n = 1$ и $n = 2$ относятся соответственно к цилиндрической и сферической задачам. Полагая

$$w = \lambda(\rho)\mu(t) \tag{2.2}$$

находим

$$\frac{a}{\rho^n}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^n\frac{d\lambda}{d\rho}\right) + \frac{\beta - \alpha\rho^2}{4a}\lambda = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\beta}{4aR^2}\mu \tag{2.4}$$

где β — произвольный параметр, входящий при разделении. Нетрудно проверить, что к таким же уравнениям, но со значением $n = 0$, приходим и при разделении переменных в уравнении (1.13) в декартовых координатах (не только в одномерном, но и в общем трехмерном случае). Считая, поэтому, в нижеследующем исследовании, что n может иметь значения, равные нулю, единице и двум, охватим и случай декартовых координат.

[1] В зависимости от координат точек поверхности и от времени.

Переходим к рассмотрению уравнения (2.3). При $\alpha = 0$ решение его хорошо известно и выражается через тригонометрические или бесселевы функции [2]. При $\alpha \neq 0$ вводим в (2.3) переменную $\theta = \rho^2$, что дает

$$\theta \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} + \frac{n+1}{2} \frac{d\lambda}{d\theta} + \frac{\beta - \alpha\theta}{16a^2} \lambda = 0 \tag{2.5}$$

Полагая $\theta = \frac{2as}{\sqrt{\alpha}}$, $\lambda = e^{-1/2s} \varphi$ найдем отсюда

$$s \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left(\frac{n+1}{2} - s\right) \frac{d\varphi}{ds} - \left(\frac{n+1}{4} - \frac{\beta}{8a\sqrt{\alpha}}\right) \varphi = 0 \tag{2.6}$$

Это не что иное, как уравнение [3] вырожденной гипергеометрической функции $F(\gamma, \delta, s)$ с параметрами

$$\gamma = \frac{1}{4}\left(n + 1 - \frac{\beta}{2a\sqrt{\alpha}}\right), \qquad \delta = \frac{n+1}{2}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае частные решения $\lambda(\rho)$ выражаются через известные, в значительной мере табулированные, функции, а стало быть, выражается через них и решение граничных задач.

3. В том случае, когда R имеет форму, отличную от (1.14), так что произведение R^3R'' не остается постоянным, можно решение рассмотренных выше граничных задач для уравнения (1.1) свести к относительно простым интегральным уравнениям для соответствующих функций v. Для этого, считая в левой части (1.8) третье слагаемое известным и перенося его в правую часть уравнения, выразим значения v внутри области через ее граничные значения (которые получаются из граничных значений u по формулам (1.4), (1.5)) и через правую часть уравнения при помощи функций Грина. Это и даст искомые интегральные уравнения.

4. Отметим еще особо случай, когда $R = \sqrt{Mt + N}$, где M и N — постоянные. При этом $R^3R'' = -(^1/_2M)^2 = \mathrm{const}$, так что это, собственно, уже исследованный выше случай. Но так как теперь еще и $RR' = {}^1/_2M = \mathrm{const}$, то задача упрощается, ибо уже уравнение (1.3) становится уравнением с разделяющимися переменными (точнее, уравнение, получающееся из (1.3) при $f = 0$), и нет нужды переходить от функции u к v. Очевидно, также, что при таком законе изменения R со временем для исходного уравнения (1.1) решается и граничная задача с условиями второго рода, когда на движущейся границе задается не сама функция u, а ее нормальная производная. Возможно решение и при некоторых более сложных (комбинированных) видах задания граничных условий.

Поступила 4 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Изд-во иностр. лит., 1950, стр. 580.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.