Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О НЕКОТОРОМ ВИДОИЗМЕНЕННОМ КРИТЕРИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Э. Дальберг

(Стокгольм)

При помощи идей, характерных для второго метода Ляпунова и развитых в работах Четаева (см., например, [1,3]), получен критерий неустойчивости, несколько отличающийся от известных критериев Ляпунова и Четаева.

1. Введение. Рассмотрим устойчивость положения равновесия системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx \,/\, dt = X(x,\, t), \quad X(0,\, t) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь предполагается, что n-мерная векторная функция $X(x,\, t)$ непрерывна по t и допускает непрерывные частные производные по x.

Формулируемый ниже критерий справедлив для систем любого порядка m; чтобы дать геометрическую иллюстрацию основных идей, рассмотрим вначале простой пример системы третьего порядка.

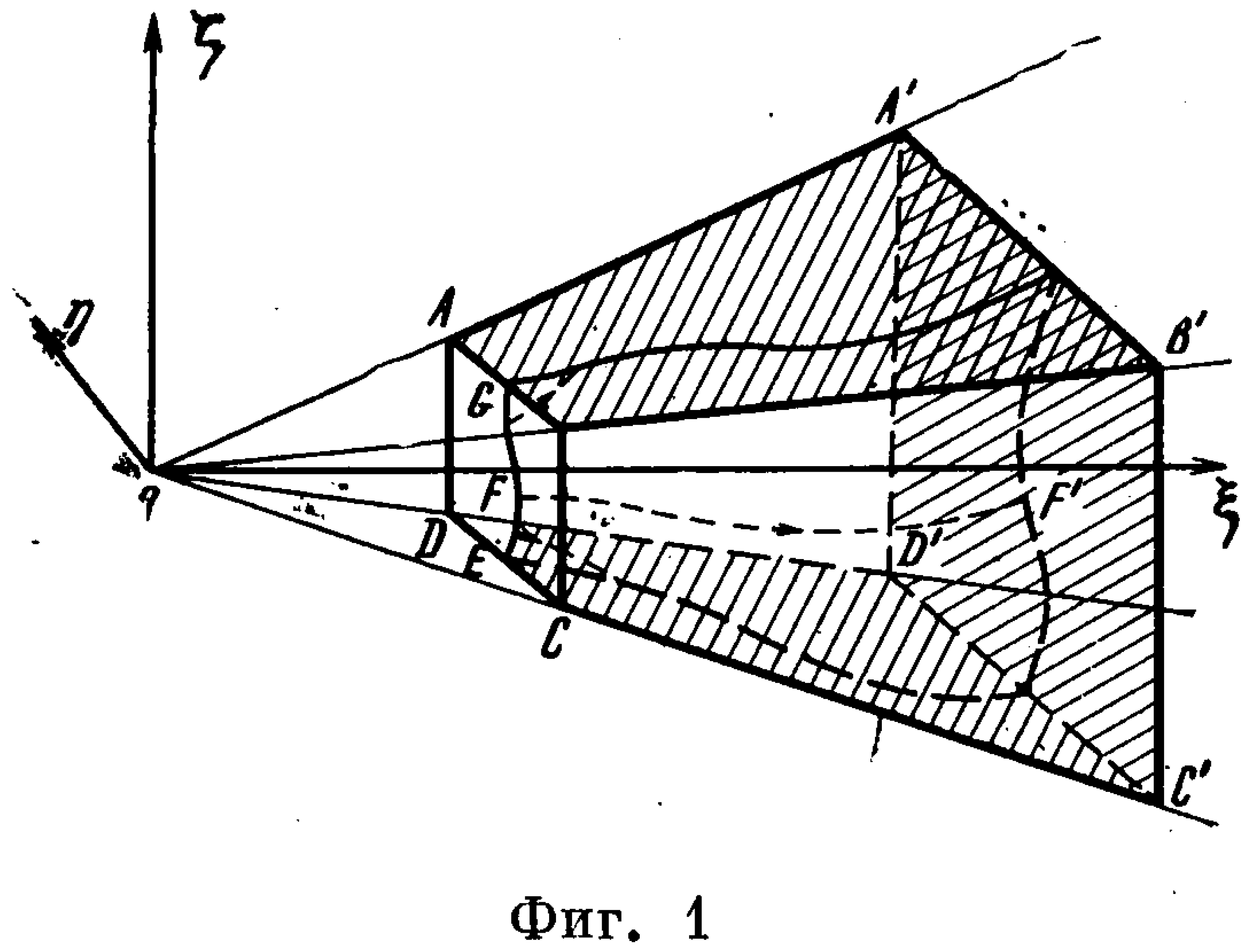
Предположим, что при $\xi > 0$ (здесь и далее ξ, η, ζ означают составляющие вектора x) выполнены следующие неравенства:

$$\frac{d\xi}{dt} \geqslant \delta(\xi) > 0, \quad \text{если } \max(|\eta|,\, |\zeta|) \leqslant k\xi \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}(|\eta| - k\xi) < 0 \quad \text{при } |\eta| = k\xi,\ |\zeta| \leqslant k\xi \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dt}(|\zeta| - k\xi) > 0 \quad \text{при } |\zeta| = k\xi,\ |\eta| \leqslant k\xi \tag{1.4}$$

Рассмотрим пирамиду $OA'B'C'D'$ (фигура), определяемую неравенством $\max(|\eta|,\, |\zeta|) \leqslant k\xi$ и пересекаемую плоскостью $ABCD(\xi = \varepsilon)$ в



Фиг. 1

произвольной близости от начала координат. Условия (1.2) — (1.4) показывают, что траектории входят внутрь усеченной пирамиды T, пересекая ее поверхность в точках, лежащих на куске S_1, состоящем из граней $ABCD$, $BB'C'C$ и $DD'A'A$; равным образом траектории выходят из пирамиды наружу, пересекая ее поверхность в точках, лежащих на части S_2, образуемой гранями $BB'A'A$, $DD'C'C$ и $A'B'C'D'$. Как видно из условия (1.2), изображающая точка может находиться внутри T лишь в течение конечного времени; отсюда следует, что семейство траекторий, входящих в момент t_0 внутрь пирамиды T, осуществляет непрерывное отображение части S_1 ее поверхности на часть S_2; при этом каждая точка замкнутой ломаной $ABB'C'CDD'A'A$ переходит сама в себя.

Рассмотрим отображение кривой EFG. Соответствующая кривая $EF'G$ должна быть непрерывной линией, лежащей целиком на поверхности S_2 и соединяющей точки E и G. Следовательно, она должна содержать точки, принадлежащие грани $A'B'C'D'$. Это обстоятельство и влечет за собой неустойчивость, поскольку грань $ABCD$ можно выбрать как угодно близко к началу и при этом всегда будут существовать траектории (подобные FF'), двигаясь по которым, изображающая точка достигнет грани $A'B'C'D'$ за конечный промежуток времени.

2. Постановка задачи и ее исследование. Нижеследующий критерий обобщает изложенную основную идею; можно надеяться, что это обобщение не столь отвлеченно, чтобы вызвать трудности при практическом применении (хотя не исключено, что возможна и другая, более удобная формулировка).

Рассмотрим множество точек x, принадлежащих заданной (малой, но конечной) окрестности Ω начала координат. Допустим, что существуют три однозначные функции $U(x, t)$, $V(x, t)$; и $W(x, t)$ такие, что для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно указать замкнутую область Ω_ε и множество $S_{\varepsilon, t}$, непустые при $t \geqslant t_0$ и определяемые следующим образом:

$$(\Omega_\varepsilon) \quad (x, t) \in \Omega_\varepsilon, \quad \text{если } U \geqslant \varepsilon \text{ и } \max(V, W) \leqslant 0$$

$$(S_{\varepsilon, t}) \quad x \in S_{\varepsilon, t}, \quad \text{если } U = \varepsilon \text{ и } \max(V, W) \leqslant 0$$

Предполагается, что функция U непрерывна в области Ω при $t \geqslant t_0$ и допускает бесконечно малый высший предел; что касается функций V и W (которые могут зависеть и от ε), то от них требуется лишь непрерывность в некоторой окрестности области Ω_ε; при этом значения $V(0, t)$ и $W(0, t)$, могут быть и не определены. Производные по времени U', V' и W', взятые вдоль траекторий уравнений (1.1), будем считать кусочно непрерывными в упомянутой окрестности области Ω_ε. Наконец, предположим, что в области Ω_ε при $t \geqslant t_0$ функции U, V, W обладают следующими свойствами (достаточно выполнения либо условий a, либо условий b):

$$1. \quad U' \geqslant \delta(\varepsilon, t) \geqslant 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} \delta(\varepsilon, t)\, dt > M > 0 \quad (M = \text{const})$$

Здесь постоянная M не зависит от ε.

2a. $V' > 0$ при $V = 0$ и $W \leqslant 0$. (Если $V' \to +0$, когда $V \to -0$, то можно взять функцию $V_1 = V + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, и при этом будет $V_1' > 0$ при $V_1 = 0$. Если поверхность $V = 0$ касается поверхности разрыва V', то можно соответствующим образом видоизменить функцию V)

2b. $V' \geqslant -\gamma|V|$ при $V \to -0$, и $W \leqslant 0$ $(\gamma = \text{const})$

3a. $W' \leqslant \gamma|W|$ при $W \to -0$ и $V \leqslant 0$ $(\gamma = \text{const})$

3b. $W' < 0$, при $W = 0$ и $V \leqslant 0$

Нижеследующие условия обычно выполняются в приложениях. Будем предполагать, что существует такое непрерывное отображение $y = f(x, t)$ области Ω_ε в n-мерное $(n < m)$ евклидово пространство, что выполнены условия:

4a. $V(x, t) < 0$, если $(x, t) \in \Omega_\varepsilon$, $y = f(x, t) = 0$

4b. $W(x, t) < 0$, если $(x, t) \in \Omega_\varepsilon$, $y = f(x, t) = 0$

5. Существует замкнутое связное подмножество $R_{\varepsilon,t} \subseteq S_{\varepsilon,t}$ гомеоморфное своему отображению $Q_{\varepsilon t} = f(R_{\varepsilon t}, t)$. Соответствие между множествами $R_{\varepsilon,t}$ и $Q_{\varepsilon,t}$ зададим равенством

$$x = g_{\varepsilon,t}(y) = g_{\varepsilon,t}(f(x, t))$$

6a. Множество $R_{\varepsilon,t}$ можно выбрать так, что если $x \in R_{\varepsilon,t}$, то предельное равенство $\varepsilon \to 0$ влечет за собой $|x| \to 0$.

6b. Если $x \in S_{\varepsilon,t}$, то при $\varepsilon \to 0$ имеем предельное равенство $|x| \to 0$.

7a. В точках границы $P_{\varepsilon,t}$ множества $Q_{\varepsilon,t}$ выполняется равенство $V(g_{\varepsilon,t}(y), t) = 0$.

7b. В точках границы $P_{\varepsilon,t}$ множества $Q_{\varepsilon,t}$ выполняется равенство $W(g_{\varepsilon,t}(y), t) = 0$.

8. Точка $y = 0$ есть внутренняя точка области $Q_{\varepsilon,t}$.

При этих условиях начало координат представляет собой неустойчивую особую точку (в случае, если область Ω_ε распадается на несколько изолированных областей, достаточно выполнения перечисленных условий для одной из этих областей).

Проведем доказательство неустойчивости при выполнении условий a. Пусть начало координат устойчиво в начальный момент t_0, который без потери общности можно считать равным нулю. Тогда существует положительное число ε такое, что любая траектория, начинающаяся в момент $t = 0$ в точке $x_0 \in R_{\varepsilon,0}$ будет оставаться в области Ω неограниченно долго (условия 5 и 6 а). С другой стороны, спустя конечное время траектория должна выйти из пределов области Ω_ε (условие 1), пересекая границу этой области в единственной точке $(\bar{x}_0, \bar{t}_0)$, в которой $V = 0$ (условия 2a и 3a). Тем самым определяется отображение $(\bar{x}_0, \bar{t}_0) = h_{\varepsilon,0}(x_0)$ области $R_{\varepsilon,0}$ в пространство (x, t); это отображение непрерывно благодаря непрерывности решений исходных уравнений и в силу условия 2a.

Теперь определим непрерывное отображение области $Q_{\varepsilon,0}$ на y-пространство

$$\bar{y} = f(\bar{x}_0, \bar{t}_0) = f(h_{\varepsilon,0}(x_0)) = f(h_{\varepsilon,0}(g_{\varepsilon,0}(y))) = F(y)$$

Согласно условию 7a имеем

$$\bar{y} = F(y) = y, \text{ если } y \in P_{\varepsilon,0}$$

Простые топологические соображения показывают теперь, что отображение $F(Q_{\varepsilon,0})$ покрывает все внутренние точки множества $Q_{\varepsilon,0}$, в том числе и точку $\bar{y} = 0$ (условие 8). (Область определения отображения F можно распространить до замкнутой n-мерной сферы $|y| \leqslant R$, содержащей внутри себя область $Q_{\varepsilon,0}$; этого достигнем, если положим $F(y) = y$ для точек $y \notin Q_{\varepsilon,0}$. Предположение, что неравенство $|F(y)| < \delta$ не выполняется ни в одной точке y, приводит к заключению о том, что проекция $G(y) = -RF(y) / |F(y)|$ непрерывна и не имеет неподвижных точек, что противоречит теореме Брауэра). Поскольку в силу условия 4a при $\bar{y} = 0$ справедливо неравенство $V(h_{\varepsilon,0}(g_{\varepsilon,0}(y))) < 0$, приходим к противоречию с предположением об устойчивости особой точки. Теорема доказана.

В случае условий b доказательство проводится аналогично предыдущему; при этом рассматриваются траектории, проходящие через область $\Omega_{\varepsilon,k}$, состоящую из точек (x, t), для которых $\varepsilon \leqslant U \leqslant k$ (ε сколь угодно мало) и $\max(V, W) \leqslant 0$. Значение параметра $k < M$ возьмем настолько малым, чтобы было выполнено включение $\Omega_{\varepsilon,k} \subset \dot{\Omega}$.

Будем следить за движением изображающей точки вдоль траектории в направлении убывания t. Поскольку функция U допускает бесконечно малый высший предел, неравенство $U(x, t) \geqslant k$ влечет за собой $|x| \geqslant K(k) > 0$. С другой стороны (см. 6b), неравенство $U(x, t) \leqslant \varepsilon$ показывает, что $|x| < \delta_1(\varepsilon)$, где δ_1 сколь угодно мало. Для заданных k, ε и t_0 (например, $t_0 = 0$) всегда можно указать такое T, $0 < T < \infty$, что множества $S_{k,T}$ и $S_{\varepsilon,0}$ соединяются хотя бы одной траекторией.

Значение T ограничено сверху; верхняя граница задается неравенством

$$\int_0^T \delta(\varepsilon, T)\, dt \leqslant k - \varepsilon$$

При доказательстве удобно считать, что $X(x, t) = X(x, -t)$ при $t < 0$.

Критерии неустойчивости, аналогичные теореме Четаева с двумя функциями ([3], стр. 225), можно, очевидно, вывести из доказанного критерия в качестве частных случаев; для этого достаточно взять либо функцию W (случай a), либо функцию V (случай b) равными отрицательным постоянным. С другой стороны, теорема с двумя функциями остается справедливой и при других, менее ограничительных условиях. Можно сформулировать следующие два критерия неустойчивости.

c. Предположим, что $W = \text{const} < 0$; тогда неустойчивость вытекает из условий 1,2b и 6b.

Действительно, при этих условиях любая траектория, достигающая множества $S_{k,T}$ при $V<0$, входит в пределы области Ω_ε не иначе как через точки множества $S_{\varepsilon,\tau}$, $\tau<T$.

Варьируя T между нулем и указанным выше верхним пределом, можно добиться того, чтобы было $\tau=0$.

d. Предположим, что $V=\text{const}<0$; тогда неустойчивость вытекает из условий 1,3а и 6d, последнее из которых требует, чтобы можно было указать такое $x_0(\varepsilon)\in S_{\varepsilon,0}$, что $W(x_0,\ 0)<0$ и $|x_0(\varepsilon)|\ \to 0$ вместе с ε.

Действительно, при этих условиях любая траектория, входящая в область Ω_ε в точке $(x_0,\ 0)$, не может покинуть эту область иначе как через границу области Ω.

Можно отметить, что для справедливости критериев a и d нет необходимости требовать, чтобы функция U допускала бесконечно малый высший предел: достаточно предположить, что эта функция равномерно ограничена в области Ω и удовлетворяет условию $U(0,\ t)=0$. Далее, укажем, что критерий b с двумя функциями ($V=\text{const}<0$) целиком содержится в критерии d, чего нельзя сказать о критериях a и c. Условия справедливости критерия c менее числом и менее ограничительны (в особенности это касается поведения V'), но ограничения 6 b на множество $S_{\varepsilon,t}$ и ограничения на функцию U (бесконечно малый высший предел) будут более сильными, чем соответствующие условия критерия a ($W=\text{const}<0$).

Предлагаемая формулировка критерия неустойчивости будет более конструктивной с точки зрения требований на границах и требований к функции U', нежели классическая теорема Четаева ([3], стр. 225); это обстоятельство может иметь значение для приложений. Таким образом, если первоначальную теорему Четаева ([3], стр. 217) и его известную теорему с одной функцией трактовать как частные случаи теоремы о двух функциях ([3], стр. 224), то следует допустить возможность обращения в нуль функций U' и W' на границе $W=0$. При этом существенно, чтобы приведенное выше условие 1 было выполнено (или могло быть выполнено при надлежащем изменении определения функции W, зависящей от ε).

3. **Пример.** Исследуем неустойчивость положения равновесия в следующей простой задаче [4]. Возьмем дифференциальные уравнения вида

$$x_s'=\lambda_s x_s+X_s^{(2)}(x)+R_s\ (x,\ t)\qquad (s=1,\ldots,6)\tag{3.1}$$

Предположим, что выполнены следующие равенства:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\ \lambda_4^*=-\lambda_4=\lambda_5,\ x_5=x_4^*,\ \lambda_6=\lambda_6^*<0\tag{3.2}$$

Символами $X_s^{(2)}(x)$ обозначены однородные полиномы второй степени с постоянными коэффициентами, а функции R_s удовлетворяют неравенствам

$$|R_s(x,\ t)|\leqslant k|x|^3,\quad k=\text{const}<\infty\quad \text{при } t>0\tag{3.3}$$

Комплексно-сопряженные «критические» переменные x_4, x_5 введены для иллюстрации особенностей, связанных с чисто мнимыми собственными значениями. Таких собственных значений может быть много пар. Если все эти пары различны, то никаких дополнительных трудностей не возникает. В выражении для $X_4^{(2)}$ можно исключить все слагаемые, кроме x_1x_4, x_2x_4 или x_3x_4; в дальнейшем будем предполагать, что это уже сделано [4].

Сходным образом, члены типа x_1x_4, x_1x_5, x_2x_4 и т. д. могут быть исключены из выражений для $X_1^{(2)}$, $X_2^{(2)}$, $X_3^{(2)}$. «Некритическая» переменная x_6 введена для того, чтобы система обладала собственным значением с отрицательной действительной частью; увеличение числа таких собственных значений не приносит никаких трудностей, даже если среди них есть одинаковые. Все слагаемые в выражениях для $X_s^{(2)}$, $s = 1,\ldots, 5$, содержащие x_6, легко могут быть исключены (см., например, [4]); далее будем предполагать, что такое исключение уже произведено.

Приступая к исследованию задачи, будем разыскивать направление ра иуса неустойчивости, для которого $\rho = O(|x_1|)$; если такого радиуса не существует, то будем разыскивать радиус, для которого $\rho = O(|x_2|)$, $x_1 = o(\rho)$ и т. д.

Положим

$$y_2 = x_2 - \alpha x_1, \quad y_3 = x_3 - \beta x_1, \; y_s = x_s \quad (s = 1, 4, 5, 6) \tag{3.4}$$

и подберем постоянные α и β так, чтобы исключить слагаемые с y_1^2 из выражений для y_2' и y_3'. Указанные постоянные определяются из двух уравнений относительно α и β; одна из этих постоянных входит в уравнения во второй степени, а другая — в третьей. Система уравнений без труда решается графически. Вычислительные трудности возрастают тогда, когда приходится иметь дело более, чем с тремя критическими переменными, которым соответствуют нулевые собственные значения.

Будем предполагать, что существует, по крайней мере, одна пара постоянных α, β, удовлетворяющих поставленным условиям. Тогда исходные уравнения примут вид

$$y_1' = ay_1^2 + p_1(y, t), \quad \begin{pmatrix} y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = y_1 A \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2(y, t) \\ p_3(y, t) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$
$$\frac{d}{dt}(y_4y_5) = 2by_1y_4y_5 + p_4(y, t), \qquad y_6' = \lambda_6 y_6 + p_6(y, t)$$

входящие сюда величины a и b, вещественны, а функции p_1, p_2, p_3, p_4, p_6 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} |p_1| \leqslant k_1|y|(|y_2| + |y_3| + |y_4|) + k_2|y|^3 \\ |p_2|, \; |p_3| \leqslant k_3(|y_2|^2 + |y_3|^2 + |y_4|^2) + k_4|y|^3 \\ |p_4| \leqslant k_5 y_4 y_5 (|y_2| + |y_3|) + k_6|y|^3|y_4| \\ |p_6| \leqslant k_7|y|^2 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Будем предполагать, что $a \neq 0$; без потери общности можно считать $a > 0$. Матрица A (с собственными значениями μ_2 и μ_3) преобразуется к нормальной форме Жордана; при этом $y_3 = y_2^*$, если $\mu_3 = \mu_2^* \neq \mu_2$. (Если $a = 0$, то в ряде случаев неустойчивость обнаруживается путем исследования слагаемых, пропорциональных y_1^3. По крайней мере для автономной системы, т. е. когда функции R_s в уравнениях (3.1) не зависят явно от t, исследование случая $a \to 0$ затрудняется тем, что при этом существует особая точка $y_1 \sim a$, y_2, $y_3 \sim a^2$, y_4, y_5, $y_6 \approx 0$, которая стремится к началу координат).

При выполнении указанных условий начало координат оказывается неустойчивой особой точкой уравнений (3.1)[1].

Для доказательства воспользуемся приведенным критерием.

Возьмем постоянную γ, подчинив ее неравенству

$$0 < \gamma < 1 \tag{3.7}$$

(дальнейшие ограничения на выбор γ будут указаны позднее).

---

[1] Как отмечено рецензентом, можно, вообще говоря, исследовать этот иллюстрирующий пример при помощи метода, предложенного **Г.** В. Каменковым в [5]. По мнению автора, метод предлагаемой работы будет более простым; вместе с тем здесь устранены довольно искусственные ограничения на временную зависимость высших слагаемых R (см. (3.1), которые входят в формулировку метода Г. В. Каменкова (см., например, [5], стр. 123—127).

Рассмотрим малую окрестность начала и положим

$$U = y_1, \quad Z_s = y_s y_s^* - c_s^2 y_1^{2+2\gamma} \quad (s = 2, \ldots, 6) \tag{3.8}$$

положительные постоянные c_s можно взять все равными единице (исключение составляет случай III, см. ниже (формула (3.23)).

Обозначим через $Z'_{s,0}$ значение Z'_s в точках, где $Z_s = 0$. Далее определим область Ω_ε условием

$$(\Omega_\varepsilon) \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \text{если } U \geqslant \varepsilon \text{ и } \max_s Z_s \leqslant 0 \tag{3.9}$$

Для точек этой области имеем (3.5), (3.6)

$$U' = ay_1^2 + O(y_1^{2+\gamma} + y_1^3) \tag{3.10}$$

$$Z'_{4,0} = Z'_{5,0} = 2d_4 c_4^2 y_1^{3+2\gamma} + O(y_1^{3+3\gamma} + y_1^{4+\gamma}) \tag{3.11}$$

$$d_4 = d_5 = b - a(1 + \gamma) \tag{3.12}$$

Кроме того,

$$Z'_{6,0} = 2\lambda_6 c_6^2 y_1^{2+2\gamma} + O(y_1^{3+\gamma}) \tag{3.13}$$

при этом согласно (3.2)

$$\lambda_6 < 0 \tag{3.14}$$

Чтобы вычислить $Z'_{2,0}$ и $Z'_{3,0}$ рассмотрим возможные типы матрицы A.

I. Собственные числа различны и комплексно сопряжены

$$A = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_2^* \end{pmatrix}, \quad Z'_{2,0} = Z'_{3,0} = 2d_2 c_2^2 y_1^{3+2\gamma} + O(y_1^{3+3\gamma} + y_1^{4+\gamma}) \tag{3.15}$$

$$d_2 = d_3 = \operatorname{Re}\mu_2 - a(1 + \gamma) \tag{3.16}$$

II. Собственные значения действительны и различны. Матрица A имеет диагональную форму

$$A = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} Z'_{2,0} &= 2d_2 c_2^2 y_1^{3+2\gamma} + O(y_1^{3+3\gamma} + y_1^{4+\gamma}) \\ Z'_{3,0} &= 2d_3 c_3^2 y_1^{3+2\gamma} + O(y_1^{3+3\gamma} + y_1^{4+\gamma}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$d_2 = \mu_2 - a(1 + \gamma), \qquad d_3 = \mu_3 - a(1 + \gamma) \tag{3.18}$$

III. Собственные значения действительны и различны. Матрица A имеет недиагональную форму

$$A = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 1 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} Z'_{2,0} &= 2d_2 c_2^2 y_1^{3+2\gamma} + O(y_1^{3+3\gamma} + y_1^{4+\gamma}) \\ Z'_{3,0} &= 2d_3 c_3^2 y_1^{3+2\gamma} + O(y_1^{3+3\gamma} + y_1^{4+\gamma}) \end{aligned} \tag{3.19}$$

В этом случае d_2 — согласно (3.18); однако величина d_3 уже не будет постоянной, а зависит от y_2 и $\operatorname{sgn} y_3$. Полагая

$$|y_2| = \theta c_2 y_1^{1+\gamma}, \qquad |\theta| \leqslant 1 \tag{3.20}$$

находим

$$d_3 = \mu_2 - a(1 + \gamma) \pm \theta c_2 / c_3 \tag{3.21}$$

Выберем теперь постоянную γ так, чтобы ни одна из величин d_s не равнялась нулю. В частности, можно потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$|d_s| \gtrsim a / 2p \tag{3.22}$$

в котором p означает число критических переменных задачи. В случае III следует также взять отношение c_2 / c_3 достаточно малым, например

$$c_2 / c_3 \leqslant a / 8 \tag{3.23}$$

Практически удобно выбирать γ в середине промежутка между нулем и единицей.

Величины Z_s разобъем на две группы в соответствии с тем, положительны или отрицательны функции $Z'_{s,0}$. Положим

$$V = \max_s Z_s, \quad (Z'_{s,0} > 0), \qquad W = \max_s Z_s \quad (Z'_{s,0} < 0) \tag{3.24}$$

Если $Z'_{s,0} < 0$ для всех s, неустойчивость сразу вытекает из теоремы Четаева о двух функциях. В противном случае надлежит воспользоваться предложенным выше критерием, условия которого очевидно выполнены. (Отображение в n-мерное пространство получается как проекция на подпространство тех y_s, для которых $Z'_{s,0} > 0$: достаточно взять действительные и мнимые части каждой пары комплексно-сопряженных координат. Подмножество $R_{\varepsilon,t}$ можно определить уравнением $y_s = 0$ таких s, для которых $Z'_{s,0} < 0$).

Хотя начало координат и неустойчиво для большинства систем рассмотренного типа (уравнения (3.1) — (3.3), легко построить примеры, для которых метод отказывается служить и вопрос об устойчивости решается рассмотрением членов третьего порядка. В качестве иллюстрации рассмотрим систему

$$x'_1 = x_1x_2 + x_1x_3 \pm x_1^3, \qquad x_2' = -x_1^2 \pm x_2^3, \quad x_3' = -x_1^3 \pm x_3^3 \tag{3.25}$$

для которой

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \pm 2(x_1^4 \pm x_2^4 + x_3^4) \tag{3.26}$$

Верхний знак в этом равенстве соответствует неустойчивости, а нижний — устойчивости.

Поступила 19 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.
2. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
3. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
4. D a h l b e r g E. Lyapunov functions for linearly indeterminate fixed points. J. Math. Analys. and Appl., 1968, vol. 22, No. 3, p. 465—489.
5. К а м е н к о в Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.