Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОРРЕКЦИИ ДВИЖЕНИЯ

Г. С. Шелементьев

(Свердловск)

Рассматривается задача многоразовой коррекции возмущенной траектории управляемого объекта при наличии ограничения на управляющее воздействие и при условии наблюдения части координат. Рассматриваемая задача относится к кругу проблем, изученных в работах [1–5].

§ 1. Постановка задачи. Пусть движение управляемого объекта на заданном отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ в линейном приближении описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dx \,/\, dt = Ax + Bu \tag{1.1}$$

где x — n-мерный вектор фазовых координат объекта, отсчитываемый от заданного движения, A и B — матрицы соответствующих размерностей, u — r-мерный вектор управляющего воздействия, на интенсивность $\varkappa[u]$ которого наложено ограничение типа неравенства

$$\varkappa\,[u\,(\tau)] \leqslant \mu \qquad (\mu = \text{const} > 0) \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что величина $\varkappa[u]$ имеет смысл какой-либо нормы вектор-функции $u\,(\tau)$, $(t \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ (см., например, [5], стр. 34, 233).

Задача состоит в построении управления u, которое обеспечило бы возможно меньшее рассогласование $\varepsilon\,(\vartheta) = \|\,\{x(\vartheta)\}_m\,\|$. Здесь символ $\{x\}_m$ означает совокупность m выделенных фазовых координат x_{i_s} $(s=1,\ldots$ $\ldots, m)$, по которым оценивается отклонение реального положения объекта в момент $t = \vartheta$ от расчетного. Этот набор координат можно трактовать как m-мерный вектор $q = \{q_s\}$ в некотором пространстве $\{q\}$. Знак $\|\,q\,\|$ означает норму вектора q.

Рассмотрим задачу об управлении, минимизирующем рассогласование ε, осложненную отсутствием полной информации об исходном состоянии $x(0)$ объекта. Именно предположим, что отклонение $x(0)$ объекта от номинальной траектории в начальный момент времени $t = 0$ точно неизвестно, а задана лишь область $G(0)$ разброса возможных фазовых состояний объекта при $t = 0$.

Допустим далее, что для уточнения текущего фазового состояния объекта его движение дополнительно наблюдается, так что к текущему моменту t из интервала $(0,\ \vartheta)$ становятся известными значения пары вектор-функций $\{z(\tau),\ u(\tau)\}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$, причем значения k-мерного вектора $z(\tau)$ $(k < n)$ связаны с фазовым вектором $x(\tau)$ соотношениями

$$z(\tau) = Q(\tau)x(\tau) + \Delta(\tau) \tag{1.3}$$

Здесь $Q(\tau)$ — некоторая матрица порядка $k \times n$, $\Delta(\tau)$ — ошибка измерения, интенсивность $\chi[\Delta]$ которой стеснена ограничением

$$\chi[\Delta(\tau)] \leqslant \nu, \ (0 \leqslant \tau \leqslant t, \ \nu > 0 - \mathrm{const}) \tag{1.4}$$

И здесь примем, что интенсивность $\chi[\Delta(\tau)]$ помехи имеет смысл какой-либо нормы вектор-функции $\Delta(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$.

Допустим, наконец, что выбраны наперед некоторые значения моментов времени $t = t_j \, (t_j < \vartheta)$ $(j = 1, \ldots, l)$ такие, что управление $u(t)$ на каждом интервале $(t_j, \ t_{j+1})$ определяется на основании результатов наблюдения при $0 \leqslant \tau \leqslant t_j$.

Уточним картину рассматриваемого управляемого процесса. Пусть на основании наблюдения сигнала $\{z(\tau), \ u(\tau)\}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t_j)$ установлено, что в момент $t = t_j$ значения фазового вектора $x(t_j)$ принадлежат области $G(t_j)$. Тогда на интервале времени $t_j < t \leqslant t_{j+1}$ управление $u^{(j)}(t)$ строится следующим образом: определяется управление $u^*(t)$ $(t_j \leqslant t \leqslant \vartheta)$, которое обеспечивает

$$J(G(t_j)) = \min_u \max_x \varepsilon_u(\vartheta) = \max_x \varepsilon_{u^*}(\vartheta) \tag{1.5}$$
$$x(t_j) \in G(t_j), \qquad \varkappa[u] \leqslant \mu$$

и выбирается $u^{(j)}(t) = u^*(t)$ при $t_j < t \leqslant t_{j+1}$. Такое управление гарантирует действительный промах $\varepsilon(\vartheta) \leqslant J(G(t_j))$, причем, очевидно, $J(G(t_{j+1})) \leqslant J(G(t_j))$. По условиям задачи область $G(0)$ задана. Область $G(t_j)$ находится в результате наблюдения сигнала $\{z(\tau), u(\tau)\}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t_j)$, и тот или иной вид этой области зависит, очевидно, от тех операций наблюдения $\varphi^{(j)} = \varphi[t_j, \ \{z(\tau), \ u(\tau)\}]$, которые выполнялись над сигналами $\{z(\tau), \ u(\tau)\}$, $(0 \leqslant \tau \leqslant t_i; \ \ i = 1, \ldots, j)$ по ходу движения объекта (1.1).

Таким образом, величина промаха $J(G(t_j))$ (1.5) зависит от операций наблюдения

$$J(G(t_j)) = f(\varphi[t_1, \ \{z(\tau), \ u(\tau)\}], \ldots, \ \varphi[t_j, \ \{z(\tau), \ u(\tau)\}]) \tag{1.6}$$

и, следовательно, операции $\varphi^{(i)}$ желательно выбирать так, чтобы обеспечить минимум величины $J(G(t_j))$ по всем возможным операциям $\varphi^{(i)}$. Тогда описанная процедура управления давала бы оптимальный результат $\varepsilon(\vartheta)$. Однако процедура минимизации величины $f(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(j)})$ по операциям $\varphi^{(i)}$ при условии, что класс допустимых операций $\varphi^{(i)}$ широк, затруднительна.

Чтобы обойти эту трудность, ограничим множество допустимых операций наблюдения $\varphi^{(i)}$ следующим образом. Пусть $t = t_j$ — некоторый момент времени и $X[t, t_j]$ — фундаментальная матрица однородной системы (1.1) при $u \equiv 0$ $(X[t_j, t_j] = E)$, и пусть область $G(0)$ такова, что линейное преобразование $q = \{X[\vartheta, \ 0]x\}_m$ переводит область $G(0)$ из n-мерного пространства $\{x\}$ в некоторый прямоугольный параллелепипед $G_{\vartheta}(0)$ из m — мерного пространства $\{q\}$, причем грани этого параллелепипеда параллельны соответствующим координатным плоскостям.

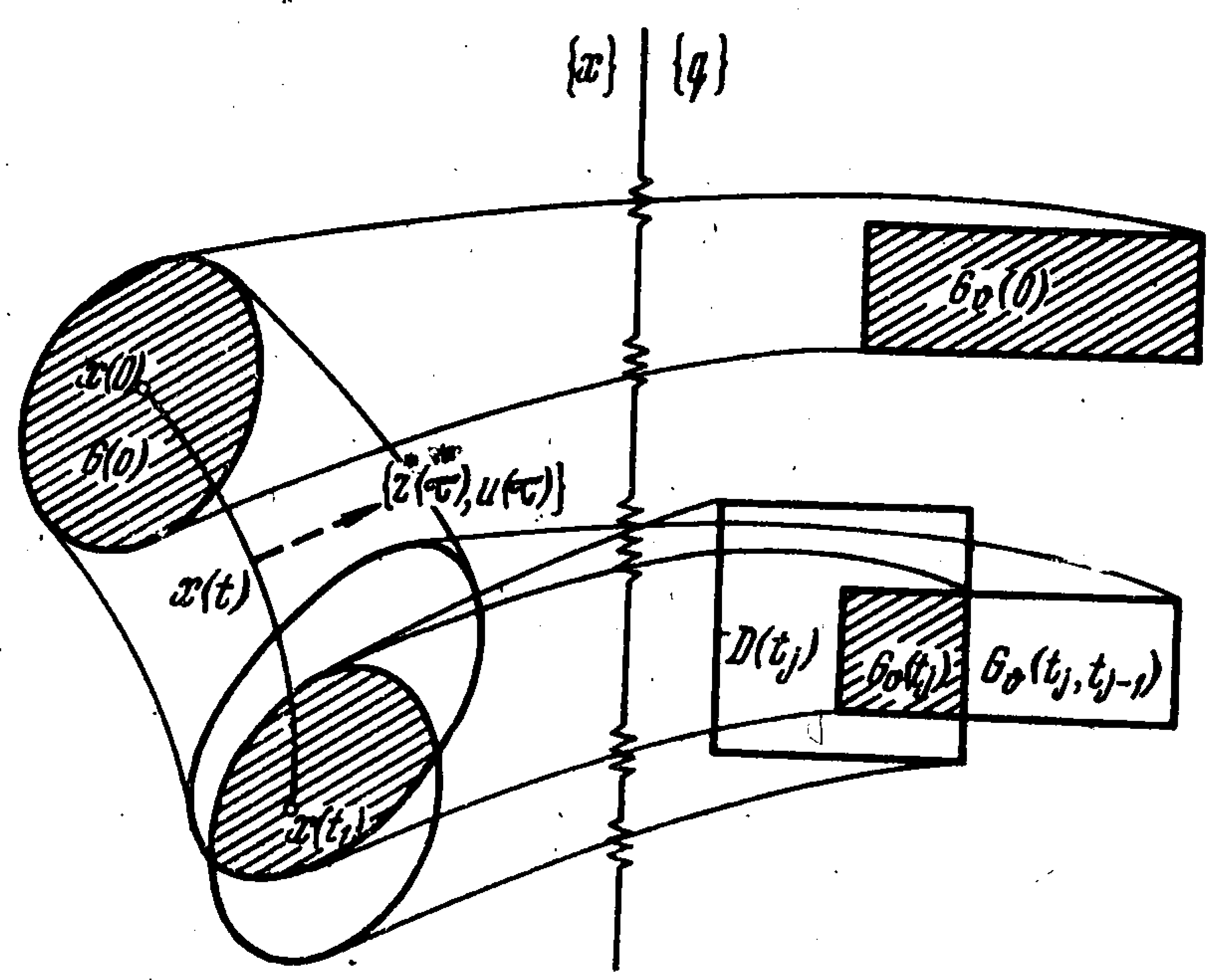
Если в исходной задаче это условие не выполняется, то можно вложить $G(0)$ в большую область $G'(0)$, которая уже будет удовлетворять данному предположению. В соответствии с этим условием будем рассматривать далее только те операции наблюдения, которые в каждый момент $t = t_j$ определяют такую область $G(t_j)$ в $\{x\}$, что ее $X[\vartheta, t_j]$-образ в $\{q\}$ $(q(t_j) = \{X[\vartheta, t_j]G(t_j)\}_m)$ представляет собой также прямоугольный параллелепипед (фиг. 1).

Круг подобных операций уже нетрудно очертить. Это будут операции $\varphi[t_j, \{z(\tau), u(\tau)\}]$, составляющие которых $\varphi_s[t_j, \{z(\tau), u(\tau)\}]$ $(s = 1,\dots, m)$ решают задачу наблюдения (см., например, [5], стр. 293) линейной функции

$$q_s(t_j) = h^{[i_s]}[\vartheta, t_j]\, x(t_j), \qquad (s = 1, \dots, m) \qquad (1.7)$$

по сигналу $\{z(\tau), u(\tau)\}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t_j)$. (Здесь $h^{[i_s]}[\vartheta, t_j]$ — вектор-строка матрицы $X[\vartheta, t_j]$, соответствующая i_s-й координате фазового вектора x.) Из теории оптимального наблюдения известно [5], что среди операций φ_s, вычисляющих значения координат $q_s(t_j)$ (1.7) вектора $q(t_j)$, можно выбрать оптимальную разрешающую операцию φ_s°, вычисляющую величину $q_s(t_j)$ (1.7) с наименьшей возможной ошибкой в самом неблагоприятном случае сигнала $\{z(\tau), u(\tau)\}$, т. е. для каждой другой операции $\varphi_s^{(j)}$, которую можно было бы использовать в момент $t = t_j$, справедливо соотношение

$$\sup_z |\varphi_s^{\circ(j)} - q_s(t_j)| = \min_\varphi \sup_z |\varphi_s^{(j)} - q_s(t_j)| \qquad (1.8)$$



Фиг. 1

Операция $\varphi^{\circ(j)}$ определяет таким образом в пространстве $\{q\}$ некоторую область $D(t_j)$, описываемую неравенствами

$$|q_s^*(t_j) - q_s(t_j)| \leqslant \delta_s(t_j) \qquad (s = 1, \dots, m)$$

где $\delta_s(t_j)$ — верхняя грань модуля ошибки вычисления действительного значения координаты $q_s(t_j)$ по всевозможным помехам $\Delta(\tau)$ (1.3), (1.4), а $q_s^*(t_j)$ — значение координаты вектора $q(t_j)$, вычисленное в момент $t = t_j$ операцией $\varphi_s^{\circ(j)}$.

При вычислении $J(G(t_j))$ (1.6) следует также учесть и результаты предыдущих измерений на участке $0 \leqslant \tau \leqslant t_i$ $(i = 1, \dots, j)$ и знание реализовавшегося управления $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_j)$. Этот учет проведем следующим образом. Именно предположим, что в результате последнего наблюдения, проведенного в момент $t = t_{j-1}$, была определена область $G_\vartheta(t_{j-1})$, представляющая собой прямоугольный параллелепипед (фиг. 1) в пространстве векторов $\{q\}$.

Так как на участке $t_{j-1} < t \leqslant t_j$ система (1.1) двигалась с управлением $u^{(j-1)}(t) = u^*(t)$, то область $G_\vartheta(t_{j-1})$ деформируется в область $G_\vartheta(t_j,\ t_{j-1})$, точки $q(t_j,\ t_{j-1})$ которой определяются равенствами

$$q(t_j,\ t_{j-1}) = q(t_{j-1}) + \left\{X[\vartheta,\ t_j] \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} X[t_j,\quad \tau]\, Bu^{(j-1)}(\tau)\, d\tau\right\}_m =$$

$$= q(t_{j-1}) + g(t_j,\ t_{j-1}), \quad q(t_{j-1}) \in G_\vartheta(t_{j-1})$$

Таким образом, область $G_\vartheta(t_j,\ t_{j-1})$ снова представляет собой прямоугольный параллелепипед, так как точки области $G_\vartheta(t_j,\ t_{j-1})$ получаются сдвигом на один и тот же вектор $g(t_j,\ t_{j-1})$. Но в таком случае, учитывая еще результат наблюдения на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant t_j$, заключаем, что областью $G_\vartheta(t_j)$ возможных значений $q(t_j)$, вычисляемых на основании сигнала $z(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t_j)$, будет служить множество $G\vartheta(t_j) = G_\vartheta(t_j,\ t_{j-1}) \cap D(t_j)$. Очевидно, область $G_\vartheta(t_j)$ представляет собой также прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям в пространстве векторов $\{q\}$.

При таком подходе хотя и не получается может быть строго оптимального результата управления, и данная схема может давать только относительно минимальный промах $J\,(G\,(t_j))$ (1.6), однако зато все встречающиеся по ходу дела вычисления оказываются реально выполнимыми. Итак, процедура построения управления в каждый момент $t = t_j$ разбивается на две вспомогательные задачи: на задачу выбора операций наблюдения $\varphi_s^\circ\,[t_j,\ \{z\,(\tau),\ u\,(\tau)\}]$, вычисляющих величины $q_s\,(t_j)$ (1.7) (т. е. в конечном итоге на задачу определения области $G_\vartheta\,(t_j)$), и на задачу определения минимального промаха $J\,(G\,(t_j))$ и того управления $u^{(j)}\,(t)$, которое обеспечивает этот промах.

§ 2. Допустим, что для момента $t = t_j$ определено множество $G_\vartheta(t_j)$ векторов $q\,(t_j = \{X\,[\vartheta,\ \ t_j]\,x\,(t_j)\}_m,\ \ (x\,(t_j) \in G\,(t_j))$, соответствующее некоторой области $G(t_j)$ возможных состояний объекта $x(t)$ при $t = t_j$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Пусть движение объекта на отрезке времени $t_j \leqslant t \leqslant \vartheta$ описывается уравнением (1.1) (1.2). Требуется среди допустимых управлений (1.2) найти такое управление $u^*(t)$, чтобы выполнялось условие

$$J = \min\nolimits_u \max\nolimits_x \varepsilon\,(\vartheta) \quad \text{при } \varkappa\,[u] \leqslant \mu,\ \ x \in G\,(t_j) \tag{2.1}$$

Данная задача таким образом является той, которую необходимо решать на каждом шаге $t = t_j$ принятия решения о коррекции. Для определения управления $u^*(t)$, решающего задачу (2.1), преобразуем выражение для промаха $J(G(t_j)\ )$ (1.6). Согласно формуле Коши значения избранных координат x_{i_s} при $t = \vartheta$ определяются соотношением

$$\{x\,(\vartheta)\}_m = \{X\,[\vartheta,\ t_j]\,x\,(t_j)\}_m + \left\{\int\limits_{t_j}^{\vartheta} X\,[\vartheta,\ \tau]\,Bu\,(\tau)\,d\tau\right\}_m \tag{2.2}$$

Так как $\varepsilon\,(\vartheta) = \left\|\,\{x(\vartheta)\}_m\,\right\|$, то выражение для промаха (2.1) с учетом (2.2) запишется в виде

$$J\,(G\,(t_j)) = \min\nolimits_u \max\nolimits_q \left\| q + \left\{\int\limits_{t_j}^{\vartheta} X\,[\vartheta,\ \tau]\,Bu\,(\tau)\,d\tau\right\}_m \right\| \tag{2.3}$$

$$\varkappa\,[u] \leqslant \mu,\ \ q \in G_\vartheta\,(t_j)$$

Заметим, что величина $w(\vartheta)$, равная

$$w(\vartheta)=\int_{t_j}^{\vartheta} X[\vartheta,\tau]\,Bu(\tau)\,d\tau$$

будет решением уравнения

$$dw/dt = Aw + Bu, \quad w(t_j)=0 \tag{2.4}$$

Обозначим

$$\max_q\|q+\{w\}_m\| = \gamma[\{w\}_m], \quad q\in G_\vartheta(t_j) \tag{2.5}$$

Тогда

$$J(G(t_j)) = \min_u \gamma[\{w(\vartheta)\}_m] \quad \text{при } \varkappa[u]\leqslant\mu,\ t_j\leqslant\tau\leqslant\vartheta \tag{2.6}$$

Таким образом, задача (2.1), (1.2) об определении управления $u^*(t)$ $(t_j \leqslant t \leqslant \vartheta)$, гарантирующем наименьший промах $J(G(t_j))$ для системы (1.1) с начальными условиями $x(t_j)$ из $G(t_j)$, свелась к задаче об управлении системой (2.4) из точки $w(t_j) = 0$ в некоторую точку $w^\circ(\vartheta)$, в которой достигается минимум функции $\gamma[\{w(\vartheta)\}_m]$.

Решение задачи (2.3) — (2.5) в данном случае облегчается удобными свойствами множества $Q_\zeta(\{w\}_m)$ точек w, удовлетворяющих условию

$$Q_\zeta(\{w\}_m) \equiv \{\{w(\vartheta)\}_m\colon\ \gamma[\{w(\vartheta)\}_m]\leqslant\zeta,\ \ \zeta=\text{const}>0\}$$

Можно проверить, что множества $Q_\zeta(\{w\}_m)$ будут выпуклыми и замкнутыми. Действительно, пусть $\{w^{(1)}\}_m$ и $\{w^{(2)}\}_m$ какие-либо точки из множества $Q_\zeta(\{w\}_m)$, для которых, следовательно, выполняются неравенства

$$\gamma[\{w^{(1)}\}_m] = \max_q\|q+\{w^{(1)}\}_m\|\leqslant\zeta$$
$$\gamma[\{w^{(2)}\}_m] = \max_q\|q+\{w^{(2)}\}_m\|\leqslant\zeta, \quad q\in G_\vartheta(t_j)$$

Возьмем точку

$$\{w^{(\lambda)}\}_m = \lambda\{w^{(1)}\}_m + (1-\lambda)\{w^{(2)}\}_m \quad (0\leqslant\lambda\leqslant1)$$

из отрезка, соединяющего точки $\{w^{(1)}\}_m$ и $\{w^{(2)}\}_m$ из $Q_\zeta(\{w\}_m)$. Тогда

$$\gamma[\{w^{(\lambda)}\}_m] = \max_q\|q+\{w^{(\lambda)}\}_m\| = \|q^\lambda+\{w^{(\lambda)}\}_m\| = \|\lambda(q^\lambda+\{w^{(1)}\}_m) +$$
$$+(1-\lambda)(q^\lambda+\{w^{(2)}\}_m)\| \leqslant \lambda\|q^\lambda+\{w^{(1)}\}_m\| + (1-\lambda)\|q^\lambda+\{w^{(2)}\}_m\| \leqslant \lambda\zeta+(1-\lambda)\zeta=\zeta,$$
$$q\in G_\vartheta(t_j)$$

Это и доказывает, что весь отрезок принадлежит множеству $Q_\zeta(\{w\}_m)$, т. е. множество $Q_\zeta(\{w\}_m)$ выпукло. Также нетрудно проверить и замкнутость множества $Q_\zeta(\{w\}_m)$.

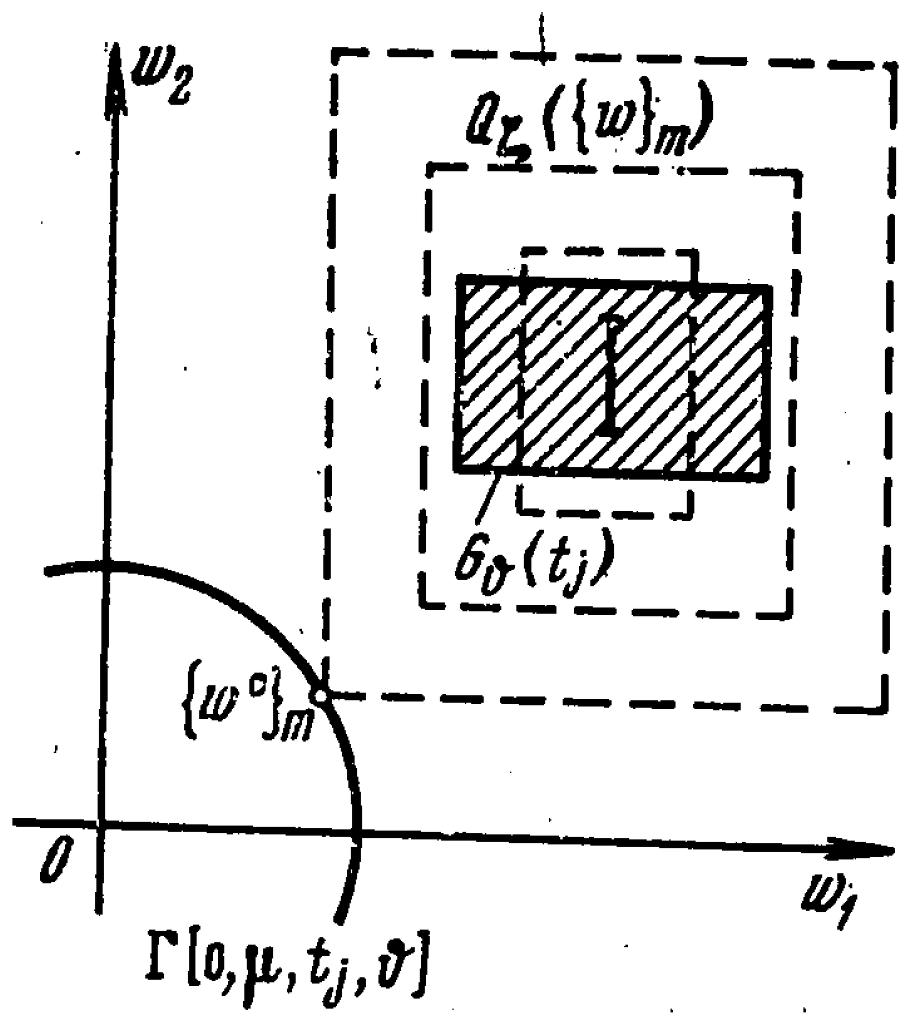
Так как множества $Q_\zeta(\{w\}_m)$ выпуклы и замкнуты, то, как показано в [5] (стр. 314), величина $\min_u \gamma[\{w\}_m] = \zeta^\circ$ есть наименьшее из чисел ζ, удовлетворяющих условию

$$\max\{\gamma_\zeta^*[k] - \mu\rho[B'S[\tau,\vartheta]k]\}\leqslant0, \qquad \|k\|=1 \tag{2.7}$$
$$\gamma_\zeta^*[k] = \min w'\cdot k \qquad \text{при } w\in Q_\zeta(\{w\}_m)$$

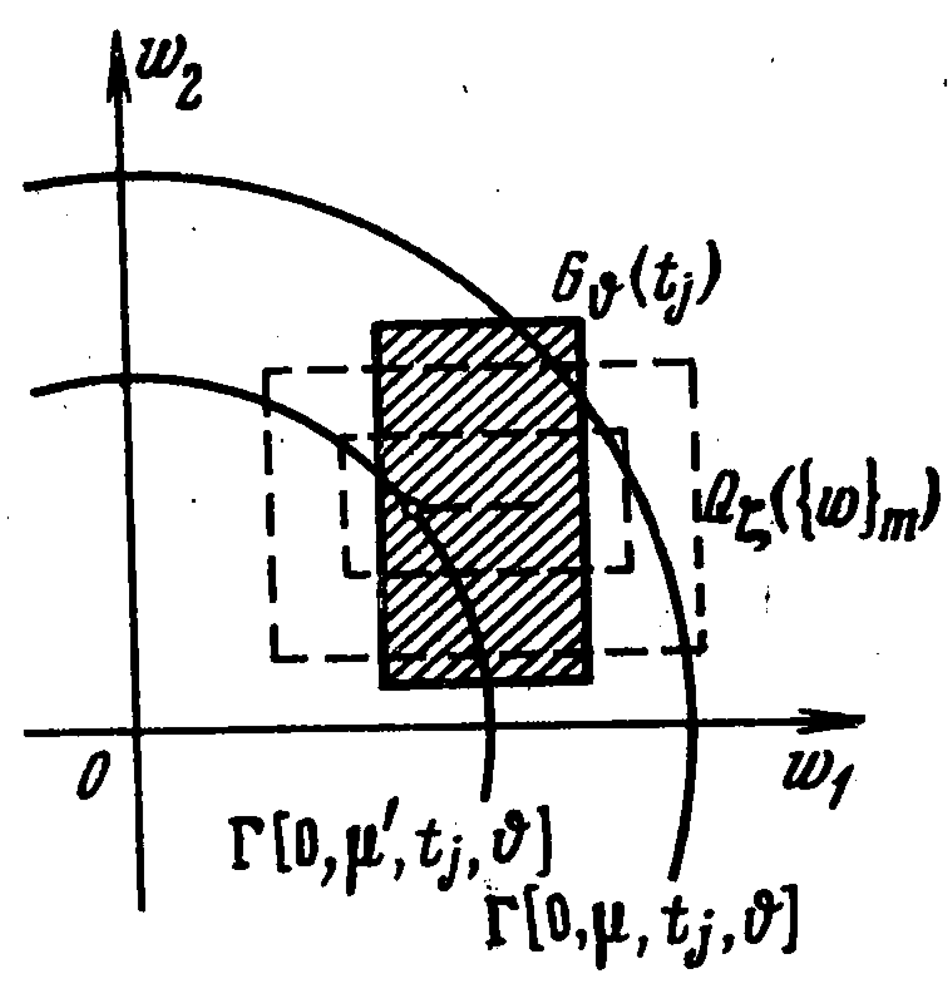
Здесь $S[\tau,\vartheta]$ — фундаментальная матрица системы $\dot s = -A's$, сопряженной системе (1.1) при $u\equiv0$, далее $\rho[h(\tau)]$ — норма в пространстве $B\{h(\tau),\ t_j\leqslant\tau\leqslant\vartheta\}$ вектор-функций $h(\tau)$, сопряженным к которому будет пространство $B^*\{u(\tau),\ t_j\leqslant\tau\leqslant\vartheta\}$ с нормой $\rho^*[u(\tau)] = \varkappa\,[u(\tau)]$ (1.2), Если условие (2.7) при $\zeta = \zeta^\circ = \min$ выполнено со знаком равенства, то оптимальное управление $u^*(t)$, которое решает задачу (2.3) — (2.5), находится из условия максимума ([5], стр. 314)

$$\int_{t_j}^{\vartheta} k^{\circ\prime} S[\tau, \vartheta] Bu^*(\tau)\, d\tau = \max_u \int_{t_j}^{\vartheta} k^{\circ\prime} S[\tau, \vartheta] Bu(\tau)\, d\tau \qquad (2.8)$$
$$\rho^*[u] \leqslant \mu$$

Это соотношение имеет следующий геометрический смысл. Обозначим символом $\Gamma[0, \mu, t_j, \vartheta]$ — область достижимости ([5], стр. 116) процесса $w(t)$ (2.4) в пространстве $\{q\}$, т. е. — область, состоящую из всех точек $q = \{w(t)\}_m$, в которые можно привести



Фиг. 2



Фиг. 3

движение $w(t)$ (2.4), к моменту $t = \vartheta$ управлением $u(t)$ $(t_j \leqslant t \leqslant \vartheta)$, подчиненным условию (1.2). При выполнении неравенства (2.7) область $\Gamma[0, \mu, t_j, \vartheta]$ будет иметь общие точки $\{w\}_m$ с множеством $Q_\zeta(\{w\}_m)$. Если в (2.7) имеет место равенство, то области $\Gamma[0, \mu, t_j, \vartheta]$ и $Q_\zeta(\{w\}_m)$ лишь касаются одна другой. При этом точка $\{w^\circ\}_m$ из $\Gamma[0, \mu, t_j, \vartheta]$, в которой достигается минимум функции $\gamma[\{w\}_m]$, лежит на границе области достижимости (фиг. 2), и управление $u^*(t)$ нацеливает движение $w(t)$ в точку $\{w^\circ\}_m$.

Если условие (2.7) выполняется со знаком неравенства, то точка, где функция $\gamma[\{w\}_m]$ достигает своего абсолютного минимума, лежит внутри области (фиг. 3) достижимости $\Gamma[0, \mu, t_j, \vartheta]$. В этом случае можно изменить μ так, чтобы снова в (2.7) выполнялось равенство и опять искать u из условия максимума (2.8).

§ 3. Решение задачи о наблюдении. Опишем кратко решение задачи об оптимальном наблюдении, в ходе которой определяются величины $\delta_s(t_j)$ и $D(t_j)$ (стр. 247). Будем считать, что вектор-функции $z(\tau)$, $\Delta(\tau)$ и $y(\tau) = Q(\tau)x(\tau)$ будут элементами $h(\tau)$ некоторого функционального пространства $B\ \{h(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t_j\}$, в котором норма $\rho[h(\tau)]$ определена равенством $\rho[h(\tau)] = \chi[h(\tau)]$ (1.4). Необходимо вычислить вектор $q = \{X[\vartheta, t_j]x(t_i)\}_m$.

Остановимся на вычислении какой-нибудь одной координаты q_s этого вектора. Будем считать s фиксированным. В пространстве $B\ \{h(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t_j\}$ можно определить всевозможные линейные ограниченные операции $\varphi_s[t_j, \{z(\tau), u(\tau)\}]$, среди которых следует отыскать операцию φ_s°, вычисляющую величину $q_s(t_j)$ с наименьшей возможной ошибкой $\omega_s(t_j) = \varphi_s^\circ[t_j, \{z(\tau), u(\tau)\}] - q_s(t_j)$, удовлетворяющей условию (1.8).

Будем следовать [5] (стр. 294). Сначала, полагая $u \equiv 0$ и $\Delta \equiv 0$, рассмотрим сигналы

$$y(\tau) = Q(\tau)X[\tau, t_j]x(t_j) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant t_j) \qquad (3.1)$$

Для этих сигналов найдем операцию φ_s°, восстанавливающую величины координат

$q_s = [\{X[\vartheta, t_j]x(t_j)\}_m]_s$. Согласно правилу минимакса ([5], стр. 285), для этого следует среди сигналов $y(\tau)$ (3.1) найти сигналы $\{y(\tau)\,|q_s(t_j)=1\}$, несущие величину $q_s(t_j)$, равную единице. Эти сигналы определяются из условия

$$\{y(\tau)\mid q_s(t_j)=1\} = [Q(\tau)X[\tau, t_j]x(t_j)]_{q_s(t_j)=1}$$

Искомая операция $\varphi_s[t_j, y(\tau)]$ должна удовлетворять условию

$$\varphi_s[t_j, \{y(\tau)\mid q_s(t_j)=1\}] = 1 \tag{3.2}$$

на любом сигнале $\{y(\tau)\mid q_s(t_j)=1\}$, несущем величину $q_s(t_j)=1$. Зная сигналы $\{y(\tau)|q_s(t_j)=1\}$ следует найти минимальный сигнал $y^\circ(\tau)$ из условия

$$\chi_s^\circ = \chi[y^\circ(\tau)] = \min_y \chi[\{y(\tau)\mid q_s(t_j)=1\}] \tag{3.3}$$

Оптимальная разрешающая операция φ_s°, согласно правилу минимакса, имеет норму

$$\chi^*[\varphi_s^{\circ(j)}] = \chi^*[\varphi_s^\circ[t_j, y(\tau)]] = 1/\chi_s^\circ \tag{3.4}$$

и выделяется среди других линейных операций φ_s тем свойством, что на минимальном сигнале $y^\circ(\tau)$ эта операция дает наибольший возможный результат по сравнению со всеми другими операциями φ_s с той же нормой (3.4), т. е.

$$\varphi_s^\circ[t_j, y^\circ(\tau)] = \max_\varphi\{\varphi_s[t_j, y^\circ(\tau)] \quad \text{при } \chi^*[\varphi_s] = 1/\chi_s^\circ\} \tag{3.5}$$

Условия (3.4) — (3.5) и определяют операцию φ_s°. При $u\equiv 0$ эта операция решает рассматриваемую задачу об оптимальном наблюдении и по сигналу $z(\tau) = y(\tau) + \Delta(\tau)$. Только в случае реального сигнала $z(\tau)$ операция φ_s°, найденная из условия (3.2) — (3.5), дает уже неизбежную ошибку $\omega_s(t_j)$, причем ([5], стр. 281)

$$\sup_\Delta|\omega_s(t_j)| = \sup_\Delta|\varphi_s^\circ[t_j, \Delta(\tau)]| = \nu\chi^*[\varphi_s^\circ] = \nu/\chi_s^\circ = \delta_s(t_j)$$

В том случае, когда наблюдается сигнал $\{z(\tau), u(\tau)\}$ при $u\not\equiv 0$, искомая операция $\varphi_s^\circ[t_j, \{z(\tau), u(\tau)\}]$, восстанавливающая величину $q_s(t_j)$ по сигналу $\{z(\tau)$ и $(\tau)\}$, легко находится, если известна операция $\varphi_s^\circ[t_j, y(\tau)]$ при $u\equiv 0$. Ввиду того, что любое движение $x(\tau)$ системы (1.1) можно найти по формуле Коши (2.2) (где вместо ϑ нужно поставить τ), имеем при $u\not\equiv 0$

$$y_*(\tau) = Q(\tau)X[\tau, t_j]x(t_j) + Q(\tau)\int_{t_j}^{\tau} X[\tau,\zeta]Bu(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= y(\tau) + Q(\tau)\int_{t_j}^{\tau} X[\tau,\zeta]Bu(\zeta)\,d\zeta$$

Учитывая линейность операции φ_s°, получим

$$\varphi_s^\circ[t_j, \{y_*(\tau), u(\tau)\}] = \varphi_s^\circ[t_j, y(\tau)] - \varphi_s^\circ[t_j, v(\zeta)] \tag{3.6}$$

$$v(\zeta) = Q(\zeta)\int_{t_j}^{\zeta} X[\zeta,\tau]Bu(\tau)\,d\tau$$

Операция (3.6) и будет оптимальной разрешающей операцией, вычисляющей координату $q_s(t_j)$ по сигналу $\{z(\tau), u(\tau)\}$ с наименьшей возможной ошибкой $\sup_\Delta|\omega_s(t_j)| = \min_\varphi$.

§ 4. **Пример.** Рассмотрим материальную точку m, движущуюся в некоторой плоскости x_1x_3 под действием силы отталкивания, пропорциональной расстоянию от точки m до начала координат ($x_1=0$, $x_3=0$). Допустим, что движение точки при этом описывается дифференциальными уравнениями

$$x_1^\bullet = x_2, \qquad x_2^\bullet = x_1 + u_1, \qquad x_3^\bullet = x_4, \qquad x_4^\bullet = x_3 + u_2 \tag{4.1}$$

Здесь $\{x_1, x_3\}$ — радиус-вектор точки, $\{x_2, x_4\}$ — ее вектор скорости, а $\{u_1, u_2\}$ — управляющее воздействие, назначение которого состоит в минимизации отклонения

$$J = \max(|x_1(\vartheta)|, \ |x_3(\vartheta)|) \tag{4.2}$$

точки от начала координат в заданный момент времени $t = \vartheta$.

Координаты и скорость точки в начальный момент времени $t = 0$ считаются при этом неизвестными, а задана лишь область

$$G_\vartheta(0) \equiv \{\{q_s\} : a_1^{(0)} \leqslant q_1 \leqslant b_1^{(0)}, \ \ a_2^{(0)} \leqslant q_2 \leqslant b_2^{(0)}\}$$

в которую может попасть точка m к моменту $t = \vartheta$ при отсутствии управления ($u \equiv 0$), и, кроме того, предполагается, что в процессе движения возможно измерение и запоминание величины и направления скорости в каждый момент времени t. Измерение скорости может производиться лишь с некоторой ошибкой, величина которой точно неизвестна. Однако априори предположим, что абсолютная величина ошибки измерения Δ_i каждой из компонент x_2 и x_4 скорости не может превзойти некоторой постоянной величины ν ($\nu > 0$), так что

$$\eta[\Delta] = \max_\tau \{\max(|\Delta_1(\tau)|, \ |\Delta_2(\tau)|)\} \leqslant \nu \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant t) \tag{4.3}$$

Требуется выбрать программу управления, которая на основании измерения только скорости точки и знания выработанного закона изменения управляющей силы u обеспечила бы к моменту $t = \vartheta$ ее сближение с началом координат. При этом предполагается, что изменение программы управления может производиться лишь в заранее заданные моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_l$ (где $t_0 = 0$ — начальное время движения точки), а величина корректирующего управления u не должна превышать заданной величины μ, т. е. во все время движения должно выполняться условие

$$||u(t)||^2 = u_1^2(t) + u_2^2(t) \leqslant \mu^2, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \qquad \mu = \text{const} \tag{4.4}$$

Пусть $t = t_j$ — некоторый момент коррекции движения, в который следует переходить на управление $u^{(j)}(t)$. Для определения управления $u^{(j)}(t)$ необходимо построить область $G_\vartheta(t_j)$. Поэтому прежде всего найдем операции $\varphi_s^\circ[t_j, \{z(\tau), u(\tau)\}]$, восстанавливающие в момент $t = t_j$ координаты $q_s(t_j)$ (1.7) вектора $q(t_j)$. Заметим, что система (4.1) (при $u \equiv 0$) вполне наблюдаема по скорости, и, следовательно, такие операции существуют.

Согласно условию задачи наблюдаемый сигнал $z(\tau)$ (1.3) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} z_1(\tau) \\ z_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ \cdots \\ x_4(\tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_1(\tau) \\ \Delta_2(\tau) \end{pmatrix}$$

Учитывая, что матрица $X[t, \tau]$, равная

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t-\tau) & \operatorname{sh}(t-\tau) \\ \operatorname{sh}(t-\tau) & \operatorname{ch}(t-\tau) \end{pmatrix}$$

— фундаментальная матрица системы (4.1) при $u \equiv 0$, получаем следующие выражения для $q_s(t_j)$ (1.7):

$$q_s(t_j) = x_{2s-1}(t_j)\operatorname{ch}(\vartheta - t_j) + x_{2s}(t_j)\operatorname{sh}(\vartheta - t_j)$$

Согласно обозначениям § 3 имеем

$$\{y(\tau) \mid q_1 = 1\} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad \{y(\tau) \mid q_2 = 1\} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_s = [\operatorname{ch}(\tau - t_j) - x_{2s-1}(t_j)\operatorname{ch}(\vartheta - \tau)] / \operatorname{sh}(\vartheta - \tau)$$

$$\beta_s = x_{2s-1}(t_j)\operatorname{sh}(\tau - t_j) + x_{2s}(t_j)\operatorname{ch}(\tau - t_j) \qquad (s = 1, 2)$$

Выберем далее величину $\eta[\Delta]$ (4.3) в качестве нормы $\chi[y(\tau)]$ в пространстве $B\{y(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant t_j\}$. Тогда сигналы $\{y^\circ|(\tau)|q_1 = 1\}$ и $\{y^\circ(\tau) \mid q_2 = 1\}$ находятся из условия

$$\begin{aligned} \chi_1^\circ &= \min_{x_1} \max_\tau [\max(|\alpha_1|, \ |\beta_2|)] \\ \chi_2^\circ &= \min_{x_2} \max_\tau [\max(|\alpha_2|, \ |\beta_1|)] \end{aligned} \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant t_j)$$

и имеют вид

$$\{y^\circ(\tau) \mid q_1 = 1\} = \begin{pmatrix}\xi\\0\end{pmatrix}, \qquad \{y^\circ(\tau) \mid q_2 = 1\} = \begin{pmatrix}0\\\xi\end{pmatrix}$$

$$\xi = \frac{\operatorname{sh}(\tau - {}^1/_2 t_j)}{\operatorname{ch}(\vartheta - {}^1/_2 t_j)}, \qquad \chi_1^\circ = \chi_2^\circ = \frac{\operatorname{sh} t_j}{\operatorname{ch}\vartheta + \operatorname{ch}(\vartheta - t_j)}$$

Операция $\varphi_s^\circ[t_j, y(\tau)]$, восстанавливающая величину q_s (в случае нормы $\chi[\Delta(\tau)] = \eta[\Delta]$ (4.3)), имеет вид

$$\varphi_s^\circ[t_j, y(\tau)] = \int_0^{t_j} y_1(\tau)\, dV_{s1}^\circ(\tau) + y_2(\tau)\, dV_{s2}^\circ(\tau)$$

Здесь $V_{si}(\tau)$ — функции с ограниченным изменением. Учитывая, что норма операции φ_s° равна

$$\chi^*[\varphi_s^\circ] = \int_0^{t_j} |dV_{s1}^\circ(\tau)| + |dV_{s2}^\circ(\tau)| = \frac{1}{\chi_s^\circ}$$

а значение операции на минимальном сигнале равно единице, получаем

$$\varphi_1^\circ[t_j, y(\tau)] = \int_0^{t_j} y_1(\tau)\, dV^\circ_{11}(\tau), \quad \varphi_2^\circ[t_j, y(t)] = \int_0^{t_j} y_2(\tau)\, dV^\circ_{22}(\tau)$$

$$V_{12}^\circ(\tau) = V_{21}^\circ(\tau) = 0 \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant t_j)$$

$$V_{11}^\circ(\tau) = V_{22}^\circ(\tau) = \begin{cases} 0 & (\tau = 0) \\ -\operatorname{ch}(\vartheta - t_j)/\operatorname{sh} t_j & (0 < \tau < t_j) \\ \operatorname{sh}(\vartheta - {}^1/_2 t_j)/\operatorname{ch} {}^1/_2 t_j & (\tau = t_j) \end{cases}$$

Компоненты $v_s(\zeta)$ вектора $v(\zeta)$ (3.6) суть

$$v_s(\zeta) = \int_{t_j}^{\zeta} \operatorname{ch}(\zeta - \tau)\, u_s(\tau)\, d\tau$$

Следовательно, операция $\varphi_s^\circ[t_j, \{z(\tau), u(\tau)\}]$, решающая задачу определения координаты $q_s(t_j)$ вектора $q(t_j)$ по сигналу $\{z(\tau), u(\tau)\}$, запишется в виде

$$\varphi_s^\circ[t_j, \{z(\tau), u(\tau)\}] = \frac{1}{\operatorname{sh} t_j}\Big[x_{2s}(t_j)\operatorname{ch}\vartheta - x_{2s}(0)\operatorname{ch}(\vartheta - t_j) -$$

$$- \operatorname{ch}(\vartheta - t_j)\int_0^{t_j} \operatorname{ch}\tau\, u_s(\tau)\, d\tau\Big] = q_s^*(t_j)$$

Эта операция дает ошибку $\omega_s(t_j)$, верхняя грань $\delta(t_j)$ модуля которой равна

$$\delta(t_j) = \frac{\nu[\operatorname{ch}\vartheta + \operatorname{ch}(\vartheta - t_j)]}{\operatorname{sh} t_j}$$

Таким образом, область $D(t_j)$ определяется неравенствами

$$D(t_j) \equiv \{\{q_s\} : q_1^*(t_j) - \delta(t_j) \leqslant q_1 \leqslant q_1^*(t_j) + \delta(t_j),$$
$$q_2^*(t_j) - \delta(t_j) \leqslant q_2 \leqslant q_2^*(t_j) + \delta(t_j)\}$$

Компоненты $g_s(t_j, t_{j-1})$ вектора $g(t_j, t_{j-1})$, на который сдвигается область $G_\vartheta(t_{j-1})$ к моменту $t = t_j$, имеют вид

$$g_s(t_j, t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \operatorname{sh}(\vartheta - t_j)\, u_s^{(j-1)}(\tau)\, d\tau$$

Следовательно, область $G_\vartheta(t_j)$ определится неравенствами

$$G_\vartheta(t_j) \equiv \{\{q_s\}: \quad a_s^{(j)} \leqslant q_s \leqslant b_s^{(j)}\}$$
$$a_s^{(j)} = \max\,(a_s^{(j-1)} + g_s(t_j,\ t_{j-1}),\ q_s^*(t_j) - \delta(t_j))$$
$$b_s^{(j)} = \min\,(b_s^{(j-1)} + g_s(t_j,\ t_{j-1}),\ q_s^*(t_j) + \delta(t_j))$$

Управление $u^*(t)$ $(t_j \leqslant t \leqslant \vartheta)$ можно находить, решая неравенство (2.7), а затем используя условие максимума (2.8). Однако здесь можно исходить из простых геометрических соотношений, а именно, вектор k° и величина ζ_j° в каждый момент $t = t_j$ легко находятся из условия касания области достижимости $\Gamma\,[0,\ \mu,\ t_j,\ \vartheta]$ и поверхностей уровня

$$\gamma\,[\{w\}_m] = \max_q\ (|\,q_1 + \{w_1^{(j)}(\vartheta)\}_m\,|,\ |\,q_2 + \{w_2^{(j)}(\vartheta)\}_m\,|), \qquad q \in G_\vartheta(t_j)$$

Область достижимости $\Gamma\,[0,\ \mu,\ t_j,\ \vartheta]$ будет здесь круг радиуса

$$r^2 = \mu\ (\mathrm{ch}\,(\vartheta - t_j) - 1)$$

Поверхностями уровня $\gamma\ [\{w\}_m] \leqslant \zeta$ здесь будут прямоугольники (фиг. 2) со сторонами

$$q_1' = b_1^{(j)} - \zeta, \quad q_1'' = a_1^{(j)} + \zeta, \quad q_2' = b_2^{(j)} - \zeta, \quad q_2'' = a_2^{(j)} + \zeta$$
$$\zeta \geqslant {}^1/_2 \max\,(\,|\,b_1^{(j)} - a_1^{(j)}\,|,\ |\,b_2^{(j)} - a_2^{(j)}\,|).$$

Вектор k°, следовательно, будет единичным вектором нормали к поверхности $\Gamma\,[0,\ \mu,\ t_j,\ \vartheta]$. Из условия максимума (2.8) получаем, что управление $u^*(t)$ на всем отрезке $t_j \leqslant t \leqslant \vartheta$ будет постоянным и равным $u^*(t) = -\,\mu k^\circ$.

При численной реализации данной схемы при значениях

$$\mu = 5,\ \nu = 0{,}2,\ \vartheta = 2,\ x\,(0) = (2,\ 1,\ 4,\ 0),\ a_1^{(0)} = 10,\ a_2^{(0)} = 14,\ b_1^{(0)} = b_2^{(0)} = 16$$

и моментах коррекции

$$t_0 = 0, \qquad t_1 = 0.5, \qquad t_2 = 1.0, \qquad t_3 = 1.25, \qquad t_4 = 1.5$$

получились следующие значения управляющих воздействий:

$$u^{(0)} = \{-3.536,\ -3.536\},\ u^{(1)} = \{-2.096,\ -4.539\},\ u^{(2)} = \{-1.462, -4.782\},\ u^{(3)} =$$
$$= \{-0.441,\ -4{,}980\},\ u^{(4)} = \{-2.618,\ -4.259\}$$

и соответствующие промахи $J\,(G\,(t_j)) = \zeta_j^0$, равные

$$\zeta_0^\circ = 6.233,\ \zeta_1^\circ = 4.879,\ \zeta_2^\circ = 4.314,\ \zeta_3^\circ = 4{,}252,\ \zeta_4^\circ = 3.975$$

Заметим, что если бы значе́ние вектора $q\,(0)$ было известно с самого начала точно (в данном случае $q\,(0) = \{11.151,\ 15.048\}$), то управление $u\,(t)$ (4.4) (в данном случае $u\,(t) = \{-2.758,\ -4.132\}$) давало бы промах $\varepsilon\,(\vartheta) = 3.531$.

Автор благодарит Н. Н. Красовского, под руководством которого была выполнена работа.

Поступила 14X1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Pfeiffer C. G. A dynamic programming analysis of multiple guidance corrections of a trajectory. AIAA Journal, 1965, vol. 3, N 9.
2. Рясин В. А. Оптимальная одноразовая коррекция в модельной задаче. Теория вероятностей и ее применения, 1966, т. 11, вып. 4.
3. Шелементьев Г. С. Об оптимальном сочетании управления и наблюдения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
4. Черноусько Ф. Л. Минимаксная задача одноразовой коррекции при погрешностях измерений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.