

ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА СТЫКЕ ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН

Д. П. Коузов

(Ленинград)

Рассматривается двумерная стационарная дифракционная задача. Жидкая среда заполняет нижнюю полуплоскость, акустические процессы в ней возбуждаются источником точечного типа, расположенным на некоторой глубине. Поверхность жидкости покрыта двумя смыкающимися полубесконечными пластинами. Механические свойства обеих пластин считаются различными. Строится точное математическое решение задачи для случая, когда режим на стыке пластин не является фиксированным. Это решение (названное общим) содержит некоторое количество произвольных постоянных. Указан способ нахождения этих постоянных для заданного режима на стыке пластин. Специфика последней задачи состоит в том, что формальное применение гранично-контактных операторов к общему решению порождает расходящиеся интегралы от выражений с алгебраическим ростом на бесконечности.

Рассмотрения проводятся в некоторых абстрактных терминах. Выражения для граничных и гранично-контактных операторов не конкретизируются. Поэтому результаты работы сохраняют силу при различных употребляемых приближениях теории пластин. Равным образом, возможно использование найденного решения и для других встречающихся граничных ситуаций (например, в случаях, когда один из участков поверхности жидкости оставлен свободным или покрыт мембраной).

1. Постановка задачи. Сжимаемая жидкость заполняет нижнюю полуплоскость ($-\infty < x < +\infty$, $0 < y < +\infty$). На поверхности жидкости ($y = 0$) расположены две полубесконечные пластины, занимающие соответственно положительную и отрицательную части оси x (фиг. 1). Ищется поле, возбужденное в описанной системе точечным источником гармонических колебаний, находящимся в некоторой точке (x_0, y_0) . Множитель $e^{-i\omega t}$, задающий зависимость процессов от времени, всюду опускается.

Условимся описывать акустические процессы в жидкости в терминах давления $P(x, y)$. Названная задача состоит в отыскании решения неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta P + k^2 P = \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (-\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty) \quad (1.1)$$

при граничных условиях

$$L_1 P = 0 \quad (x > 0), \quad L_2 P = 0 \quad (x < 0) \quad (1.2)$$

Здесь

$$L_\alpha P = \left[m_{\alpha 1} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} + m_{\alpha 2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] P(x, 0) \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.3)$$

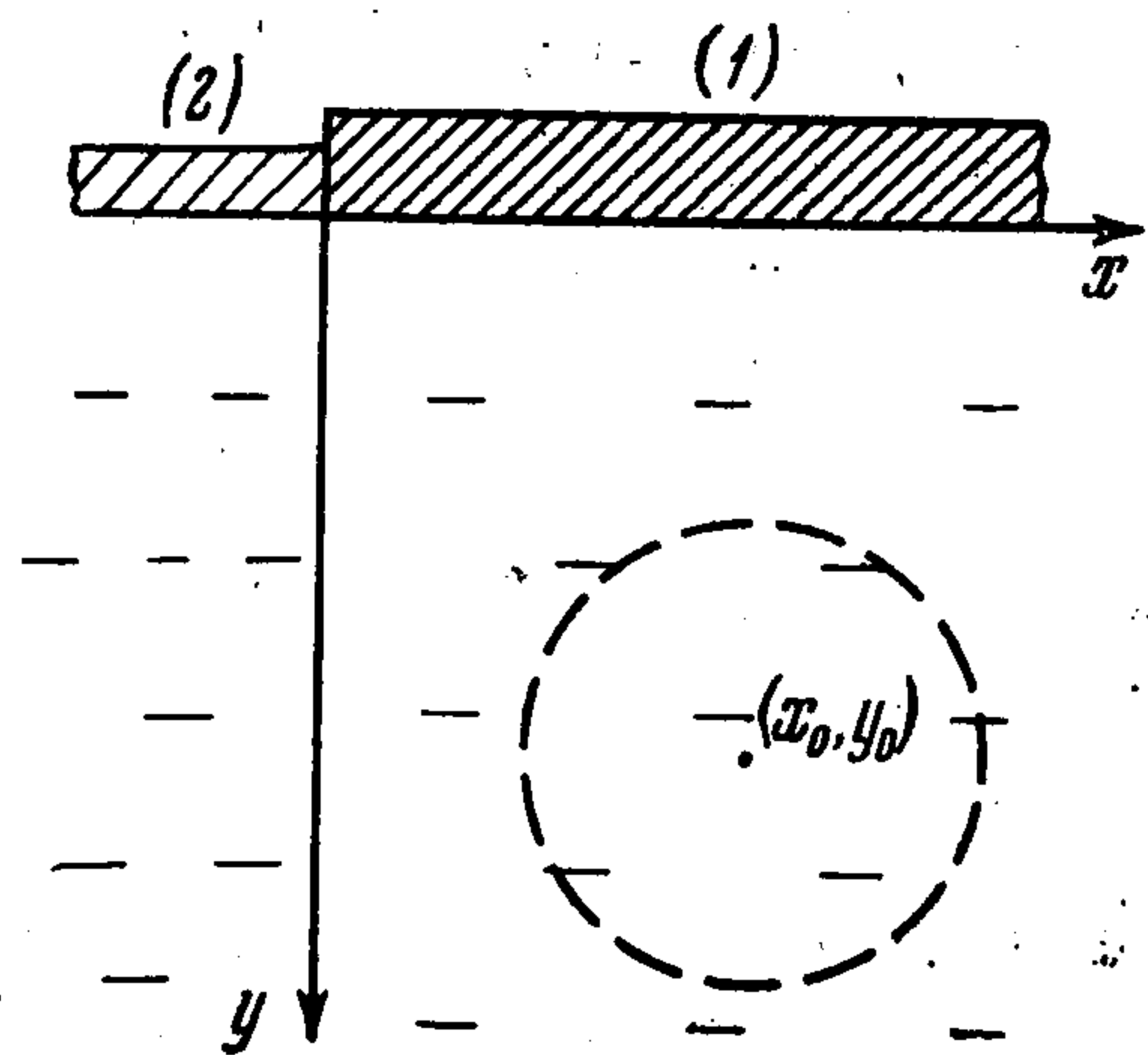
Операторы $m_{\alpha 1}$ и $m_{\alpha 2}$ суть полиномы аргумента $-\partial^2 / \partial x^2$.

Коэффициенты этих полиномов выражаются через механические параметры задачи и в частности, вообще говоря, зависят от волнового числа k . При этом предполагается выполненным следующее ограничение на характер этой зависимости [1].

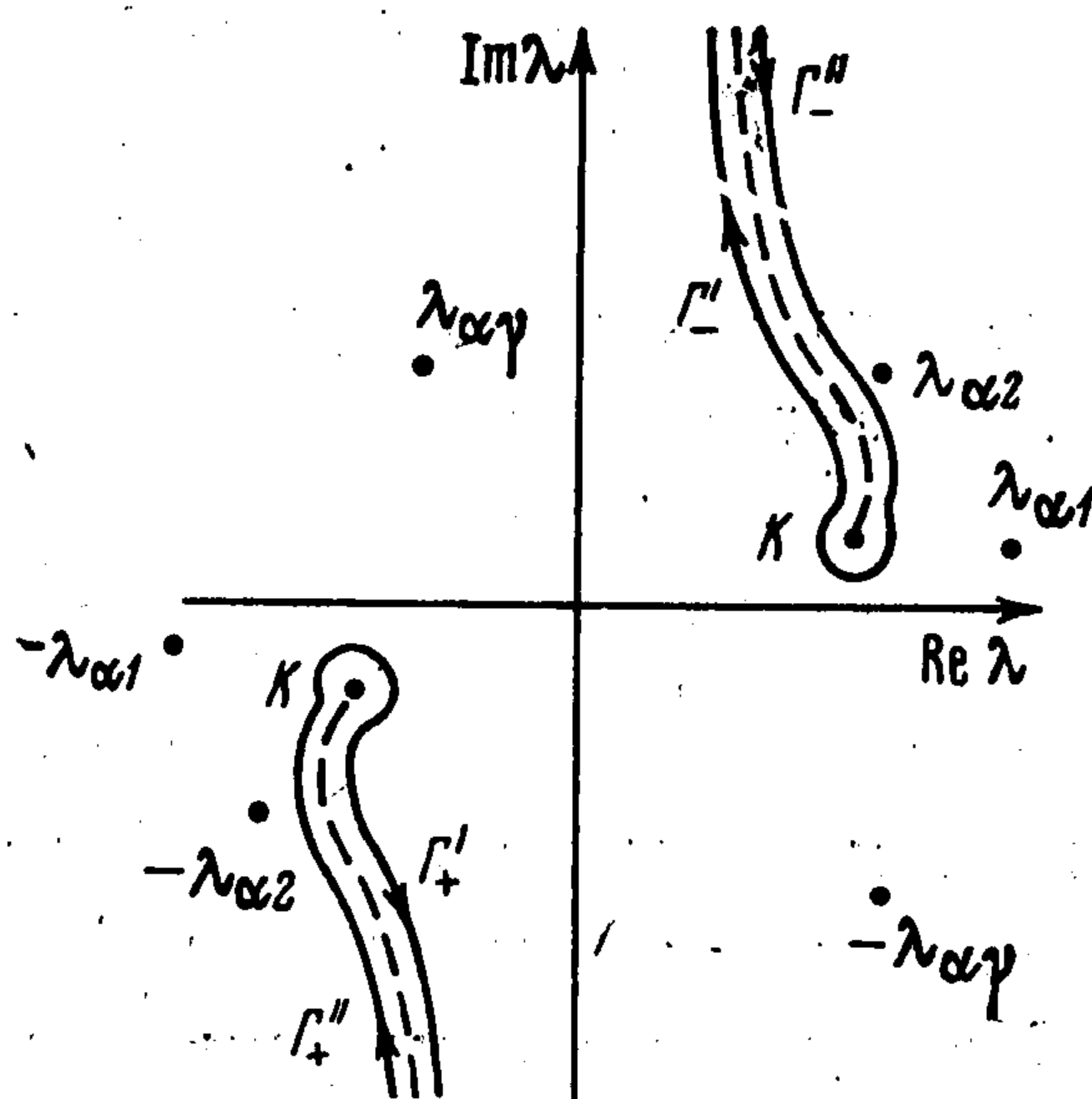
Алгебраические функции $l_\alpha(\lambda)$ не имеют при $\text{Re} k \geq 0, \text{Im} k > 0$ вещественных корней на основном листе римановой поверхности комплексной переменной λ

$$l_\alpha(\lambda) = -\sqrt{\lambda^2 - k^2} m_{\alpha 1}(\lambda^2) + m_{\alpha 2}(\lambda^2) \quad (1.4)$$

Выбор основного листа для $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ здесь и всюду в дальнейшем осуществляется следующим образом. Из точки $\lambda = k$ вверх проводится разрез (пунктирная линия на фиг. 2). Контур этого разреза не должен проходить через корни $l_\alpha(\lambda)$, а в остальном является произвольным. Разрез из точки $\lambda = -k$ проводится вниз с соблюдением центральной



Фиг. 1



Фиг. 2

симметрии чертежа относительно начала координат. Считается, что на основном листе $\lim_{\text{Re}} \sqrt{\lambda^2 - k^2} = +\infty$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{\text{Re}} \sqrt{\lambda^2 - k^2} = +\infty \text{ при } \lambda \rightarrow \pm\infty$$

На дополнительном листе имеем, соответственно

$$\lim_{\text{Re}} \sqrt{\lambda^2 - k^2} = -\infty \text{ при } \lambda \rightarrow \pm\infty$$

Ряд примеров для конкретных значений операторов L_α приведен в [1]. Упомянем лишь один из них, относящийся к числу наиболее употребительных

$$L_\alpha = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\mu_\alpha \omega^2}{D_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\rho \omega^2}{D_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.5)$$

Здесь μ_α — поверхностная плотность пластины, D_α — цилиндрическая жесткость пластины, ρ — плотность жидкости. Соотношение (1.5) соответствует случаю, когда на поверхности жидкости располагается пластина, которая способна испытывать лишь изгибные деформации, подчиняющиеся уравнению Кирхгофа. Предполагается, что давление

$$P(x, y) \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (\text{Im} k > 0, \text{Re} k \geq 0)$$

экспоненциально. Случай вещественных k рассматривается как предельный переход $\text{Im}k \rightarrow +0$ в названном решении (принцип предельного поглощения). В начале координат $P(x, y)$ считается непрерывным.

Решение, подчиняющееся перечисленным требованиям, следуя [2], будем называть общим. Оно строится в п. 2. Общее решение содержит n (число n определяется в п. 2) произвольных постоянных. Такое нарушение требования единственности вызвано тем, что пока не указан режим в начале координат. Этот режим зададим при помощи n дополнительных гранично-контактных требований

$$R_{1\beta}P + R_{2\beta}P = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

$$R_{1\beta}P = \lim_{x \rightarrow +0} \left[s_{1\beta 1} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + s_{1\beta 2} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] P(x, 0)$$

$$R_{2\beta}P = \lim_{x \rightarrow -0} \left[s_{2\beta 1} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + s_{2\beta 2} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] P(x, 0) \quad (1.7)$$

Операторы $s_{\alpha\beta 1}$ и $s_{\alpha\beta 2}$ суть полиномы аргумента $-id/dx$. В дальнейшем (п. 4) на алгебраические свойства функций $r_{\alpha\beta}(\lambda)$

$$r_{\alpha\beta}(\lambda) = -\sqrt{\lambda^2 - k^2} s_{\alpha\beta 1}(\lambda) + s_{\alpha\beta 2}(\lambda) \quad (1.8)$$

будет наложено некоторое ограничение.

Приведем примеры гранично-контактных условий для случая, когда L_α определяется соотношением (1.5). (Здесь $n = 4$.)

А. Между пластинами имеет место бесконечно тонкая трещина [3]

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial^3 P(x, 0)}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial^4 P(x, 0)}{\partial x^3 \partial y} = 0 \quad (1.9)$$

В. Спай пластин [4]

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial P(x, 0)}{\partial y} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial P(x, 0)}{\partial y}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial^2 P(x, 0)}{\partial x \partial y} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial^2 P(x, 0)}{\partial x \partial y} \quad (1.10)$$

$$D_1 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial^3 P(x, 0)}{\partial x^2 \partial y} = D_2 \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial^3 P(x, 0)}{\partial x^2 \partial y}, \quad D_1 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial^4 P(x, 0)}{\partial x^3 \partial y} = D_2 \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial^4 P(x, 0)}{\partial x^3 \partial y} \quad (1.11)$$

С. Спай пластин подкреплен ребром жесткости [5]. Здесь выполнены соотношения (1.10), а (1.11) заменены более сложными

$$D_1 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial^3 P(x, 0)}{\partial x^2 \partial y} - D_2 \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial^3 P(x, 0)}{\partial x^2 \partial y} + i\omega Z_M \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial^2 P(x, 0)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$D_1 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial^4 P(x, 0)}{\partial x^3 \partial y} - D_2 \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial^4 P(x, 0)}{\partial x^3 \partial y} + i\omega Z_Q \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial P(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad (1.12)$$

Выражения импедансов Z_M и Z_Q приведены в [5].

2. Построение общего решения. Построим решение удовлетворяющее всем требованиям задачи, кроме гранично-контактных условий.

Запишем поле P в виде суммы трех слагаемых

$$P = P_0 + P_1^* + P_2^* \quad (2.1)$$

Здесь P_0 представляет собой поле точечного источника для безграничной жидкой среды

$$P_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-x_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2}|y-y_0|} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \quad (2.2)$$

Функции $P_1^*(x, y)$ и $P_2^*(x, y)$ будут искомыми. Будем считать, что они порознь удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца, а также требованиям непрерывности в начале координат и затухания на бесконечности. Подчиним эти функции следующим граничным условиям:

$$L_1(P_1^* + P_0) = 0 \quad (x > 0), \quad L_2 P_1^* = 0 \quad (x < 0) \quad (2.3)$$

$$L_1 P_2^* = 0 \quad (x > 0), \quad L_2(P_2^* + P_0) = 0 \quad (x < 0) \quad (2.4)$$

Очевидно, что для суммарного поля P будут при этом выполнены все условия задачи.

Обратимся сначала к нахождению P_1^* . Будем искать P_1^* в виде разложения по плоским волнам

$$P_1^* = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\lambda) e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y} d\lambda \quad (2.5)$$

При этом P_1^* автоматически удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, а при надлежащем $p_1(\lambda)$ с учетом оговоренного выше (п.1) выбора ветви радикала $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ обладает также нужным поведением при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$.

Потребуем от $p_1(\lambda)$ следующей оценки при $\lambda \rightarrow \pm \infty$

$$p_1(\lambda) = o(1/\lambda^{1+\varepsilon}) \quad (0 < \varepsilon < 1/2) \quad (2.6)$$

Условие (2.6) будет достаточным для обеспечения непрерывности $P_1^*(x, y)$ в начале координат.

Пользуясь граничными условиями (2.3) и выполняя формально дифференцирование под знаком интеграла, придем к следующим интегральным уравнениям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[l_1(\lambda) p_1(\lambda) - \frac{l_1^{\circ}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{-i\lambda x_0 - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y_0} \right] e^{i\lambda x} d\lambda = 0 \quad (x > 0) \quad (2.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l_2(\lambda) p_1(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (x < 0) \quad (2.8)$$

Здесь

$$l_{\alpha}^{\circ}(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2} m_{\alpha_1}(\lambda^2) + m_{\alpha_2}(\lambda^2) \quad (2.9)$$

Значения $l_{\alpha}^{\circ}(\lambda)$ на основном листе римановой поверхности совпадают со значениями $l_{\alpha}(\lambda)$ на втором листе.

Интегралы в левых частях равенств (2.7) и (2.9) будут, вообще говоря, расходящимися, так как возникшие в результате дифференцирования алгебраические множители $l_{\alpha}(\lambda)$ могут вызвать рост модуля подынтегрального выражения на бесконечности. Истолкование подобных расходящихся интегралов приведено в [2].

Уравнения (2.7) и (2.8) тождественно удовлетворены при выполнении соотношений

$$\begin{aligned} l_1(\lambda) p_1(\lambda) - \frac{l_1^{\circ}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k_2}} e^{-i\lambda x_0 - \sqrt{\lambda^2 - k_2} y_0} &= \Phi_1^+(\lambda) \\ l_2(\lambda) p_1(\lambda) &= \Phi_1^-(\lambda) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где функции Φ_1^+ (Φ_1^-) суть аналитические в верхней (нижней) полуплоскости комплексной переменной λ . При этом допускается их возрастание в названных плоскостях со скоростью не выше степенного.

Исключая $p_1(\lambda)$, приходим к неоднородной краевой задаче Римана [6]. Задача состоит в отыскании двух функций Φ_1^+ и Φ_1^- , аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, по линейному соотношению между ними, выполненному на вещественной оси

$$\frac{l_1(\lambda)}{l_2(\lambda)} \Phi_1^-(\lambda) - \Phi_1^+(\lambda) = \frac{l_1^{\circ}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{-i\lambda x_0 - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y_0} \quad (2.11)$$

Обозначим через n_{α} наивысший порядок производной, входящей в L_{α} . При этом для $l_{\alpha}(\lambda)$ будет иметь на бесконечности следующая оценка:

$$l_{\alpha}(\lambda) = O(\lambda^{n_{\alpha}}) \quad (|\lambda| \rightarrow \infty) \quad (2.12)$$

Представим $l_{\alpha}(\lambda)$ в виде произведения двух множителей $l_{\alpha}^{\pm}(\lambda)$, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях

$$l_{\alpha}(\lambda) = l_{\alpha}^+(\lambda) l_{\alpha}^-(\lambda) \quad (2.13)$$

Будем считать при этом, что для $l_{\alpha}^{\pm}(\lambda)$ имеет место оценка

$$l_{\alpha}^{\pm}(\lambda) = O(\lambda^{1/2 n_{\alpha}}) \quad (|\lambda| \rightarrow \infty) \quad (2.14)$$

Процесс такого разбиения на множители (называемый факторизацией) будет описан ниже (п. 3).

Используя (2.13), можно переписать (2.11) следующим образом:

$$\frac{l_1^-(\lambda)}{l_2^-(\lambda)} \Phi_1^-(\lambda) - \frac{l_2^+(\lambda)}{l_1^+(\lambda)} \Phi_1^+(\lambda) = \frac{l_2^+(\lambda) l_1^{\circ}(\lambda)}{l_1^+(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{-i\lambda x_0 - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y_0} \quad (2.15)$$

Введем кусочно-аналитическую функцию $\Psi_1(\lambda)$

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_2^+(\tau) l_1^{\circ}(\tau)}{l_1^+(\tau) \sqrt{\tau^2 - k^2}} e^{-i\tau x_0 - \sqrt{\tau^2 - k^2} y_0} \frac{d\tau}{\tau - \lambda} \quad (2.16)$$

Ее значение в верхней (соответственно нижней) полуплоскости обозначим Ψ_1^+ (Ψ_1^-).

В силу формул Сохоцкого при переходе через вещественную ось имеет место скачок

$$\Psi_1^+(\lambda) - \Psi_1^-(\lambda) = \frac{l_2^+(\lambda) l_1^0(\lambda)}{l_1^+(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{-i\lambda x_0 - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y_0} \quad (\text{Im} \lambda = 0) \quad (2.17)$$

С учетом (2.17) соотношению (2.15) можно придать такой вид:

$$\frac{l_1^-(\lambda)}{l_2^-(\lambda)} \Phi_1^-(\lambda) + \Psi_1^-(\lambda) = \frac{l_2^+(\lambda)}{l_1^+(\lambda)} \Phi_1^+(\lambda) + \Psi_1^+(\lambda) \quad (\text{Im} \lambda = 0) \quad (2.18)$$

Согласно теореме об аналитическом продолжении через контур левая и правая части равенства (2.18) задают некоторую единую функцию $F_1(\lambda)$, аналитическую на всей комплексной плоскости λ . Ввиду наличия степенной оценки ее роста на бесконечности функция эта будет полиномом, степень которого обозначим $n - 1$

$$F_1(\lambda) = g_{n-1}^{(1)}(\lambda) \quad (2.19)$$

На основании (2.6) (2.12) и (2.13) нетрудно получить для n следующее выражение

$$n = n_1 + n_2 - E\left(\frac{1}{2}(n_1 + n_2 - 1)\right) \quad (2.20)$$

Символ $E(\xi)$ означает целую часть числа ξ . Коэффициенты полинома $g_{n-1}^{(1)}(\lambda)$ будут произвольными. Их число должно совпадать с числом линейно независимых гранично-контактных условий.

Для иллюстрации приведем примеры определения числа гранично-контактных условий на основании дифференциальных порядков граничных операторов.

1) На поверхности жидкости располагаются две пластины (причем учитываются лишь изгибные колебания: L_1 и L_2 задаются формулой (1.5))

$$n_1 = 5, \quad n_2 = 5, \quad n = 4$$

2) С одной стороны от начала координат поверхность жидкости свободна ($L_2 = 1$) с другой — покрыта пластиной.

$$n_1 = 5, \quad n_2 = 0, \quad n = 2$$

3) Жесткая граница ($L_2 = \partial / \partial y$) стыкуется с пластиной

$$n_1 = 5, \quad n_2 = 1, \quad n = 2$$

Вернемся к решению задачи. С учетом (2.5), (2.10) и (2.19) приходим к следующему выражению для $P_1^*(x, y)$:

$$P_1^* = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{n-1}^{(1)}(\lambda) - \Psi_1^-(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y} d\lambda \quad (2.21)$$

Функция $\Psi_1^-(\lambda)$ задается формулой (2.16), причем считается, что контур интегрирования обходит полюс $\tau = \lambda$ сверху.

Аналогичным образом решается задача и для $P_2^*(x, y)$

$$P_2^* = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_{n-1}^{(2)}(\lambda) + \Psi_2^+(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} e^{i\lambda x - V\sqrt{\lambda^2 - k^2} y} d\lambda \quad (2.22)$$

$$\Psi_2^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_1^-(\tau) l_2^0(\tau)}{l_2^-(\tau) \sqrt{\tau^2 - k^2}} e^{i\tau x_0 - V\sqrt{\tau^2 - k^2} y_0} \frac{d\tau}{\tau - \lambda} \quad (2.23)$$

В (2.23) при получении $\Psi_2^+(\lambda)$ обход полюса $\tau = \lambda$ осуществляется снизу. Объединяя решения обеих задач, приходим к следующему окончательному выражению для P :

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + Q \quad (2.24)$$

Здесь

$$P_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_1^-(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} e^{i\lambda x - V\sqrt{\lambda^2 - k^2} y} d\lambda \quad (2.25)$$

$$P_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_2^+(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} e^{i\lambda x - V\sqrt{\lambda^2 - k^2} y} d\lambda \quad (2.26)$$

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_{n-1}(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} e^{i\lambda x - V\sqrt{\lambda^2 - k^2} y} d\lambda \quad (2.27)$$

Отраженно-дифрагированные поля P_1 и P_2 удовлетворяют граничным условиям (2.3) и (2.4) и имеют в начале координат непрерывные производные до $n - 1$ порядка.

Дифрагированное поле Q удовлетворяет однородным краевым условиям

$$L_1 Q = 0 \quad (x > 0), \quad L_2 Q = 0 \quad (x < 0) \quad (2.28)$$

и несет в себе разрывы производных суммарного поля P в начале координат. Отметим, что вид выражения для Q (2.27) не зависит от характера падающего поля P_0 . В частности, к тому же выражению для Q можно прийти, например, при построении общего решения задачи дифракции плоской волны [2].

3. Факторизация $l_\alpha(\lambda)$. Условимся считать, что степень полинома $m_{\alpha 1}(\lambda^2)$, которую обозначим $2\nu_\alpha$, не меньше степени полинома $m_{\alpha 2}(\lambda^2)$. Таким образом, слагаемое $\sqrt{\lambda^2 - k^2} m_{\alpha 1}(\lambda^2)$ определяет поведение $l_\alpha(\lambda)$ на бесконечности и имеет место равенство

$$n_\alpha = 2\nu_\alpha + 1 \quad (3.1)$$

Способом, аналогичным нижеизложенному, можно было бы рассмотреть и случай, когда n_α будет четным числом. Наш выбор связан с тем, что ситуация, определяемая (3.1), будет более актуальной. Если отвлечься от случая свободной поверхности ($L_2 = 1$, $n_2 = 0$), в котором факторизация осуществляется тривиально ($l_2^\pm(\lambda) = 1$), то в остальных обычно применяемых граничных условиях порядок дифференциальных операторов L_α оказывается числом нечетным.

На двулистной римановой поверхности функция $l_\alpha(\lambda)$ имеет $4\nu_\alpha + 2$ корня, попарно различающихся знаком. Обозначим эти корни $\pm \lambda_{\alpha\gamma}$ ($\gamma = 1, 2, \dots, 2\nu_\alpha + 1$), отнеся знак плюс к корням, расположенным в верхней полуплоскости. Предположим, что на основном листе находится N_α пар корней $l_\alpha(\lambda)$. Этим корням соотнесем номера от 1 до N_α .

Не ограничивая общности, можно считать коэффициент при наивысшей степени λ в $m_{\alpha 1}(\lambda^2)$ равным единице. Введем функции $\varphi_\alpha(\lambda)$, связанные с $l_\alpha(\lambda)$ соотношением

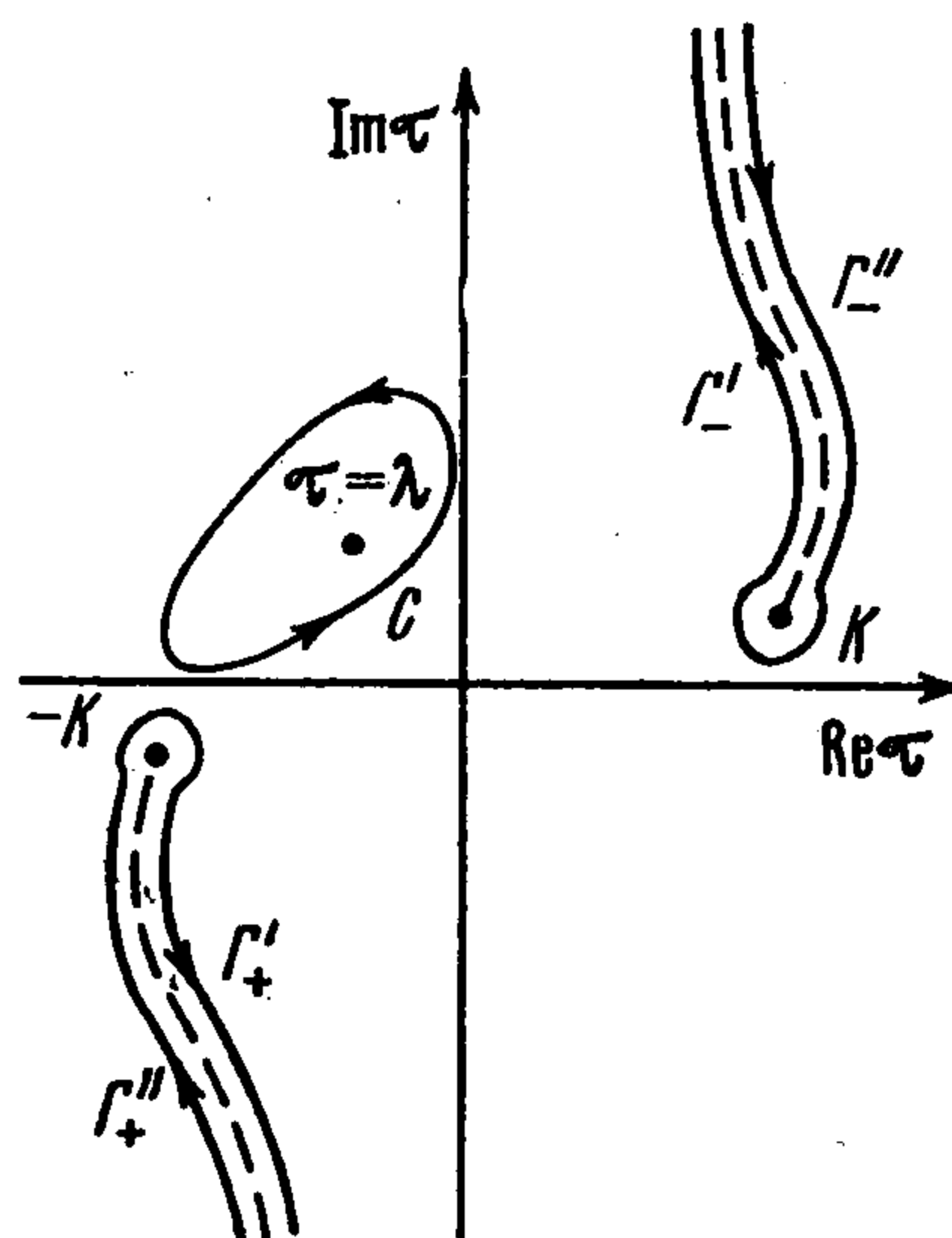
$$l_\alpha(\lambda) = -\varphi_\alpha(\lambda)(\lambda^2 - k^2)^{\nu_\alpha + \frac{1}{2}} - N_\alpha \prod_{\gamma=1}^{N_\alpha} (\lambda^2 - \lambda_{\alpha\gamma}^2) \quad (3.2)$$

Функции $\varphi_\alpha(\lambda)$ не имеют корней на основном листе римановой поверхности и стремятся к единице при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Поэтому $\ln \varphi_\alpha(\lambda)$ на этом листе может быть определен однозначно на основании требования

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \ln \varphi_\alpha(\lambda) = 0 \quad (3.3)$$

Представим $\ln \varphi_\alpha(\lambda)$ интегралом Коши

$$\ln \varphi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln \varphi_\alpha(\tau)}{\tau - \lambda} d\tau \quad (3.4)$$



Фиг. 3

Здесь C — произвольный контур на дневном листе плоскости τ , обходящий точку $\tau = \lambda$ в положительном направлении (фиг. 3). Растягивая этот контур, можно прийти к представлению

$$\varphi_\alpha(\tau) = \varphi_\alpha^+(\tau) \varphi_\alpha^-(\tau), \quad \ln \varphi_\alpha^\pm(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^\pm} \frac{\ln \varphi_\alpha(\tau)}{\tau - \lambda} d\tau \quad (3.5)$$

Здесь $\Gamma_\pm = \Gamma_\pm' + \Gamma_\pm''$ суть контуры, охватывающие нижний (соответственно верхний) разрез на плоскости τ . В силу (3.3) интегралы (3.5) будут сходящимися. По этой же причине в пределе обращаются в нуль интегралы по дугам, соединяющим между собой контуры Γ_+ и Γ_- .

Функции φ_α^+ и φ_α^- будут аналитическими вне тех контуров, на которых они задаются интегралами. Функция $\varphi_\alpha^+(\lambda)$ аналитична вне разреза уходящего вниз из точки $\lambda = -k$ и, в частности, в верхней полуплоскости. Аналогичным образом $\varphi_\alpha^-(\lambda)$ аналитична вне контура Γ_- . На бесконечности все они стремятся к единице.

Интегралы по контурам Γ_\pm могут быть сведены к интегралам лишь по одному из берегов разреза

$$\ln \varphi_\alpha^\pm(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pm'} \ln \left[-\frac{l_\alpha(\tau)}{l_\alpha^\circ(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau - \lambda} \quad (3.6)$$

Здесь Γ_+' означает левый берег разреза, проведенного из точки $\tau = -k$, а Γ_-' — правый берег разреза для $\tau = k$. Оба контура проходятся в направлении от точек $\tau = \pm k$ до ∞ . Для противоположных берегов разреза использовано обозначение Γ_\pm'' . Ветвь логарифма в подынтегральном выражении (3.6) выбирается таким образом, чтобы для

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \ln \left[-\frac{l_\alpha(\tau)}{l_\alpha^\circ(\tau)} \right] = 0 \quad (\tau \in \Gamma_\pm') \quad (3.7)$$

Факторизация множителей при $\varphi_\alpha(\lambda)$ в (3.2) достигается элементарным путем. В результате имеем

$$l_\alpha^\pm(\lambda) = \pm (\lambda \pm k)^{\nu_\alpha + 1/2 - N_\alpha} \prod_{\gamma=1}^{N_\alpha} (\lambda \pm \lambda_{\alpha\gamma}) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pm} \ln \left[-\frac{l_\alpha(\tau)}{l_\alpha^\circ(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau - \lambda} \right\} \quad (3.8)$$

Аналогичным образом могут быть факторизованы функции $l_\alpha^\circ(\lambda)$

$$l_\alpha^\circ(\lambda) = l_\alpha^{\circ+}(\lambda) l_\alpha^{\circ-}(\lambda) \quad (3.9)$$

$$l_\alpha^{\circ\pm}(\lambda) = (\lambda \pm k)^{N_\alpha - \nu_\alpha - 1/2} \prod_{\gamma=N_\alpha+1}^{2\nu_\alpha+1} (\lambda \pm \lambda_{\alpha\gamma}) \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pm''} \ln \left[-\frac{l_\alpha(\tau)}{l_\alpha^\circ(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau - \lambda} \right\} \quad (3.10)$$

Выпишем некоторые соотношения, полезные при различных преобразованиях решения, найденного в п. 2

$$\begin{aligned} l_\alpha(\lambda) l_\alpha^\circ(\lambda) &= - \prod_{\gamma=1}^{2\nu_\alpha+1} (\lambda^2 - \lambda_{\alpha\gamma}^2), & l_\alpha^+(-\lambda) &= e^{\pi i(\nu_\alpha - 1/2)} l_\alpha^-(\lambda) \\ l_\alpha^\pm(\lambda) l_\alpha^{\circ\pm}(\lambda) &= \pm \prod_{\gamma=1}^{2\nu_\alpha+1} (\lambda \pm \lambda_{\alpha\gamma}), & l_\alpha^{\circ+}(-\lambda) &= e^{\pi i(\nu_\alpha + 1/2)} l_\alpha^{\circ-}(\lambda) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Первое из этих соотношений получается элементарно, последующие три являются следствием формул (3.8) и (3.10).

На основании формул Сохоцкого для интегралов типа Коши в (3.8) и (3.10) можно получить также следующие соотношения обхода для функций $l_\alpha^\pm(\lambda)$ и $l_\alpha^{\circ\pm}(\lambda)$:

$$\overline{l_\alpha^\pm(\lambda)} \Big|_{\lambda \in \Gamma_\pm''} = \frac{l_\alpha^\circ(\lambda)}{l_\alpha(\lambda)} l_\alpha^\pm(\lambda) \Big|_{\lambda \in \Gamma_\pm}, \quad l_\alpha^{\circ\pm}(\lambda) \Big|_{\lambda \in \Gamma_\pm''} = \frac{l_\alpha(\lambda)}{l_\alpha^\circ(\lambda)} l_\alpha^{\circ\pm}(\lambda) \Big|_{\lambda \in \Gamma_\pm} \quad (3.12)$$

4. Гранично-контактные условия. Непосредственное применение гранично-контактных операторов $R_{\alpha\beta}$ к полю P встречает известное затруднение, так как, вообще говоря, порождает расходящиеся интегралы от выражений, имеющих алгебраический рост на бесконечности. Ниже будет показано, как выразить $R_{\alpha\beta}P$ при помощи интегралов, сходящихся в обычном смысле. При этом относительно операторов $R_{\alpha\beta}$ придется сделать некоторое ограничивающее предположение.

Выделим из P падающую волну P_0 и отраженную волну от правой пластины P_{01} . Нетрудно получить следующее представление:

$$P = P_0 + P_{01} + Q_1 \quad (4.1)$$

$$P_{01} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_1^\circ(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} l_1(\lambda)} e^{i\lambda(x-x_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2}(y+y_0)} d\lambda \quad (4.2)$$

$$Q_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_+(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y} d\lambda \quad (4.3)$$

Здесь

$$q_+(\lambda) = q_{n-1}(\lambda) - \Psi_1^+(\lambda) + \Psi_2^+(\lambda) \quad (4.4)$$

представляет собой функцию, аналитическую в верхней полуплоскости.

Непосредственное применение $R_{1\beta}$ к P_0 и P_{01} не встречает затруднения, так как после предельного перехода $y = 0$, $x \rightarrow \pm 0$ под интегралом сохраняется экспоненциальный множитель $\exp(-\sqrt{\lambda^2 - k^2}y_0)$, обеспечивающий сходимость интеграла. Обратимся теперь к $R_{1\beta}Q_1$. Имеем

$$R_{1\beta}Q_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_{1\beta}(\lambda) q_+(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} e^{+i0\lambda} d\lambda \quad (4.5)$$

Здесь использовано обозначение

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{\pm i0\lambda} d\lambda \quad (4.6)$$

Будем деформировать контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, пока он не займет положение Γ . При этом будут пересечены полюса подынтегрального выражения, расположенные в корнях $l_1^-(\lambda)$

$$R_{1\beta}Q_1 = \frac{i}{2} \sum_{\text{Im } \lambda > 0} \text{Res} \frac{r_{1\beta}(\lambda) q_+(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_-} \frac{r_{1\beta}(\lambda) q_+(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} e^{+i0\lambda} d\lambda \quad (4.7)$$

При помощи соотношений обхода (3.12) интеграл по Γ_- можно заменить интегралом лишь по одному из берегов разреза

$$R_{1\beta}Q_1 = \frac{i}{2} \sum_{\text{Im } \lambda > 0} \text{Res} \frac{r_{1\beta}(\lambda) q_+(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_-} q_+(\lambda) \frac{l_1^+(\lambda)}{l_2^+(\lambda)} \frac{r_{1\beta}(\lambda) l_1^{\circ}(\lambda) - r_{1\beta}^{\circ}(\lambda) l_1(\lambda)}{l_1^{\circ}(\lambda) l_1(\lambda)} e^{+i0\lambda} d\lambda \quad (4.8)$$

Здесь

$$r_{\alpha\beta}^{\circ}(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2} s_{\alpha\beta 1}(\lambda) + s_{\alpha\beta 2}(\lambda) \quad (4.9)$$

Наложим на $R_{\alpha\beta}$ следующее ограничение:

$$r_{\alpha\beta}(\lambda) l_{\alpha}^{\circ}(\lambda) - r_{\alpha\beta}^{\circ}(\lambda) l_{\alpha}(\lambda) = O(\lambda^{n_{\alpha}}) \quad (|\lambda| \rightarrow \infty) \quad (4.10)$$

Иными словами, функция $|r_{\alpha\beta}(\lambda) l_{\alpha}^{\circ}(\lambda) - r_{\alpha\beta}^{\circ}(\lambda) l_{\alpha}(\lambda)|$ растет на бесконечности не быстрее $|l_{\alpha}(\lambda)|$.

Названное ограничение устанавливает некоторую необходимую связь между гранично-контактными операторами $R_{\alpha\beta}$ и соответственными (т. е. для одного значения α) граничными операторами L_{α} . Надобность в соотношении, связывающем эти операторы с точки зрения физики, совершенно естественна. В любой конкретной задаче при заданном L_{α} существует весьма узкий выбор для возможных значений $R_{\alpha\beta}$. Соотношение (4.10) устанавливает лишь некоторое простейшее необходимое (но не достаточное) ограничение на круг допустимых значений $R_{\alpha\beta}$. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что (4.10) выполнено для всех примеров, приведенных в п. 1.

Выражение $r_{1\beta}(\lambda) l_1^{\circ}(\lambda) - r_{1\beta}^{\circ}(\lambda) l_1(\lambda)$ меняет знак при переходе с левого берега разреза (Γ_-) на правый (Γ_-''). Прочие множители подынтегрального выражения (с учетом (3.10)) при обходе точки $\lambda = k$ не меняются. Поэтому интеграл по Γ_-' в (4.8) равен половине интеграла по полной петле Γ_- от того же выражения. Возвращаясь

далее к интегрированию по вещественной оси, приходим к окончательному выражению

$$R_{\alpha 1} Q_1 = \frac{i}{4} \sum_{\text{Im } \lambda > 0} \text{Res} \frac{q_+(\lambda) l_1^+(\lambda)}{l_2^+(\lambda)} \frac{r_{1\beta}(\lambda) l_1^\circ(\lambda) - r_{1\beta}^\circ(\lambda) l_1(\lambda)}{l_1(\lambda) l_1^\circ(\lambda)} + \\ + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_+(\lambda) l_1^+(\lambda)}{l_2^+(\lambda)} \frac{r_{1\beta}(\lambda) l_1^\circ(\lambda) - r_{1\beta}^\circ(\lambda) l_1(\lambda)}{l_1(\lambda) l_1^\circ(\lambda)} d\lambda \quad (4.11)$$

В первом слагаемом суммирование распространяется по корням $l_1(\lambda) l_1^\circ(\lambda)$ (см. (3.11)), расположенным в верхней полуплоскости.

В силу (4.10) интеграл в (4.11) абсолютно сходится, поэтому в (4.11) произведен предельный переход и опущен фактор $e^{+i0\lambda}$.

Аналогичным образом рассматривается предельный переход $x \rightarrow -0$ в $R_{\alpha\beta} P$. Здесь поле P предварительно преобразуется к виду

$$P = P_0 + P_{02} + Q_2 \quad (4.12)$$

$$P_{02} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_2^\circ(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} l_2(\lambda)} e^{i\lambda(x-x_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2}(y+y_0)} d\lambda \quad (4.13)$$

$$Q_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_-(\lambda)}{l_2^+(\lambda) l_1^-(\lambda)} e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y} d\lambda \quad (4.14)$$

$$q_-(\lambda) = q_{n-1}(\lambda) - \Psi_1^-(\lambda) + \Psi_2^-(\lambda) \quad (4.15)$$

При этом оказывается

$$R_{2\beta} Q_2 = -\frac{i}{4} \sum_{\text{Im } \lambda < 0} \text{Res} \frac{q_-(\lambda) l_2^-(\lambda)}{l_1^-(\lambda)} \frac{r_{2\beta}(\lambda) l_2^\circ(\lambda) + r_{2\beta}^\circ(\lambda) l_2(\lambda)}{l_2(\lambda) l_2^\circ(\lambda)} + \\ + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_-(\lambda) l_2^-(\lambda)}{l_1^-(\lambda)} \frac{r_{2\beta}(\lambda) l_2^\circ(\lambda) - r_{2\beta}^\circ(\lambda) l_2(\lambda)}{l_2(\lambda) l_2^\circ(\lambda)} d\lambda \quad (4.16)$$

Поступила 8 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. К о у з о в Д. П. О решении уравнения Гельмгольца для полуплоскости при граничных условиях, содержащих производные высокого порядка. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
2. К о у з о в Д. П. Дифракция плоской гидракустической волны на стыке двух упругих пластин. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
3. К о у з о в Д. П. Дифракция плоской гидрокустической волны на трещине в упругой пластине. ПММ, т. 27, 1963, вып. 6.
4. И в а н о в И. В., К р а с и л ь н и к о в В. Н. Отражение изгибно гравитационных волн от места сая двух ледовых полей. Сб. «Дифракция и излучение волн». Изд-во Ленингр. ун-та, 1965, вып. 4.
5. К о н о в а л ю к И. П., К р а с и л ь н и к о в В. Н. Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от пластины. Сб. «Дифракция и излучение волн». Изд-во Ленингр. ун-та, 1965, вып. 4.
6. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.