

ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКЕ

В. В. Гогосов, В. А. Полянский, И. П. Семенова,
А. Е. Якубенко

(Москва)

Исследуются одномерные стационарные движения проводящей среды, состоящей из заряженной и нейтральной компонент, в рамках электрогидродинамики. Наличие объемного заряда и его взаимодействие с электрическим полем определяют движение среды. Исследуются два случая движения. В первом параметр Q ($Q = 4\pi q_0 L / E_0$) предполагается малым, при этом электрическое поле можно считать заданным. Для постоянного поля E_0 получено в явном виде общее решение задачи. В плоскости скорости — числа Маха построено поле интегральных кривых, позволяющее по известным значениям скорости и числа Маха в некоторой точке потока определить характер течения вниз по потоку. Во втором случае рассматривается течение в переменном электрическом поле (произвольные значения параметра Q). В плоскости скорости — электрическое поле строится диаграмма, позволяющая наглядно исследовать движение в случае переменного электрического поля. Производится исследование особых точек системы уравнений одномерного течения; обсуждается устойчивость перехода через скорость звука.

Исследование одномерных уравнений в постоянном электрическом поле при ряде упрощающих предположений проведено в работе [1].

1. Основные уравнения. Рассмотрим стационарное движение сжимаемой, невязкой, нетеплопроводной среды с объемным зарядом в электрическом поле. Будем считать, что все величины зависят только от x , а электрическое поле имеет одну компоненту, направленную вдоль оси x . Примером рассматриваемого течения может служить движение в канале постоянного сечения в случае, когда составляющую электрического поля, нормальную к стенкам канала, можно не учитывать.

Уравнения электрогидродинамики для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\rho u = m = \text{const}, \quad mu' + p' = qE, \quad m(c_p T + 0.5 u^2)' = j_0 E \quad (1.1)$$

$$E' = 4\pi q, \quad \varphi' = -E, \quad p = \rho RT, \quad j = q(u + bE) = j_0 = \text{const} \quad (1.2)$$

При этом ρ — плотность среды, u — составляющая скорости вдоль оси x ($u > 0$), p — давление, q — плотность объемного электрического заряда, E — напряженность электрического поля, T — температура, j — плотность электрического тока, c_p , R — теплоемкость при постоянном давлении и газовая постоянная, штрихом обозначаются производные по x . Для определенности будем считать $q > 0$. Исследование для $q < 0$ производится аналогичным образом.

Из уравнений (1.1) и (1.2) получим

$$u' = \frac{qEM^2(u - u_1)}{mu(M^2 - 1)}, \quad M' = \frac{qEM^3(\gamma + 1)(u - u_2)}{2mu^2(M^2 - 1)} \quad (1.3)$$

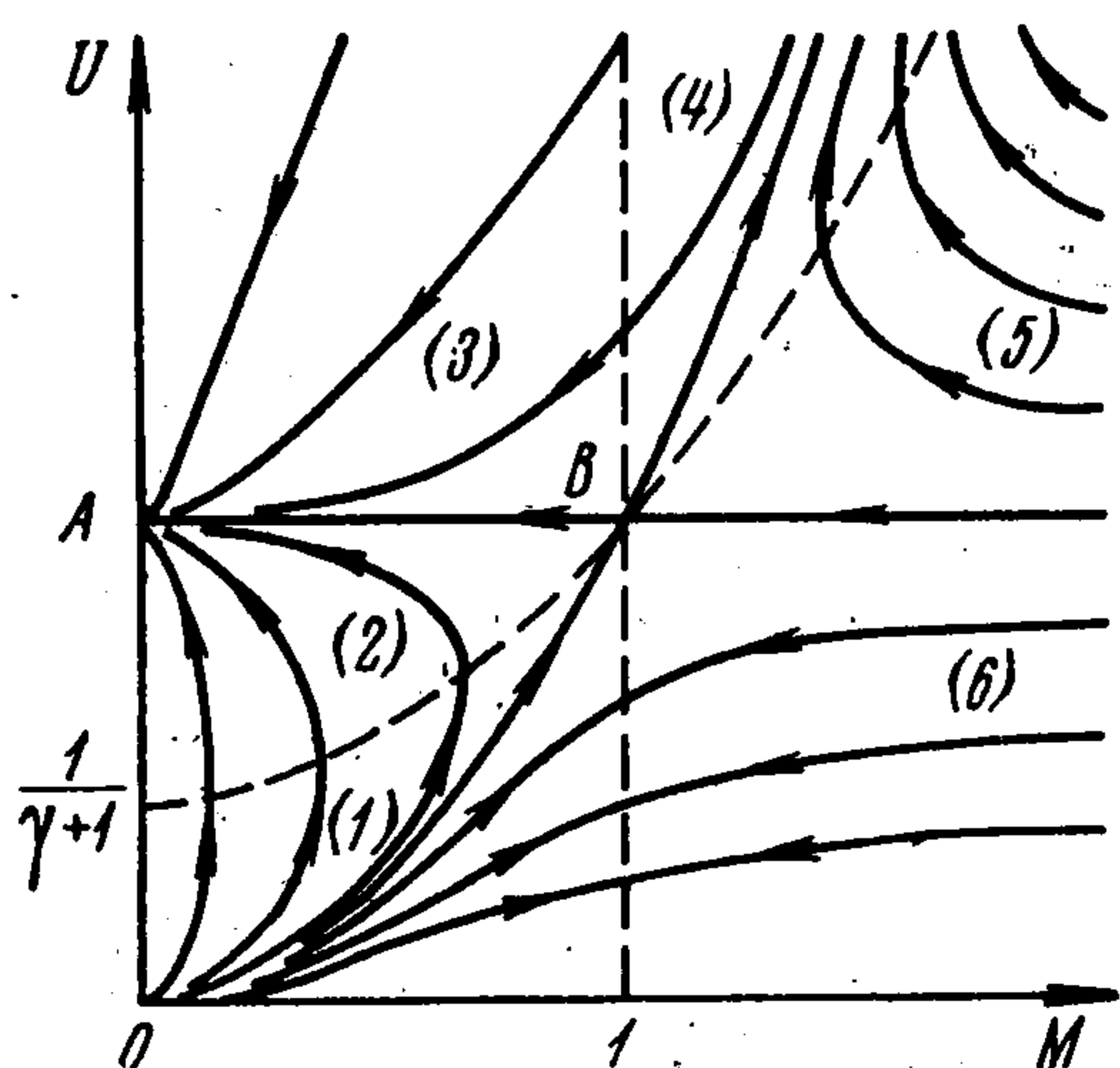
$$u_1 = (\gamma - 1)bE, \quad u_2 = u_1 \frac{1 + \gamma M^2}{\gamma + 1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad M^2 = \frac{\rho u^2}{\gamma p}$$

Здесь M — газодинамическое число Маха, b — подвижность.

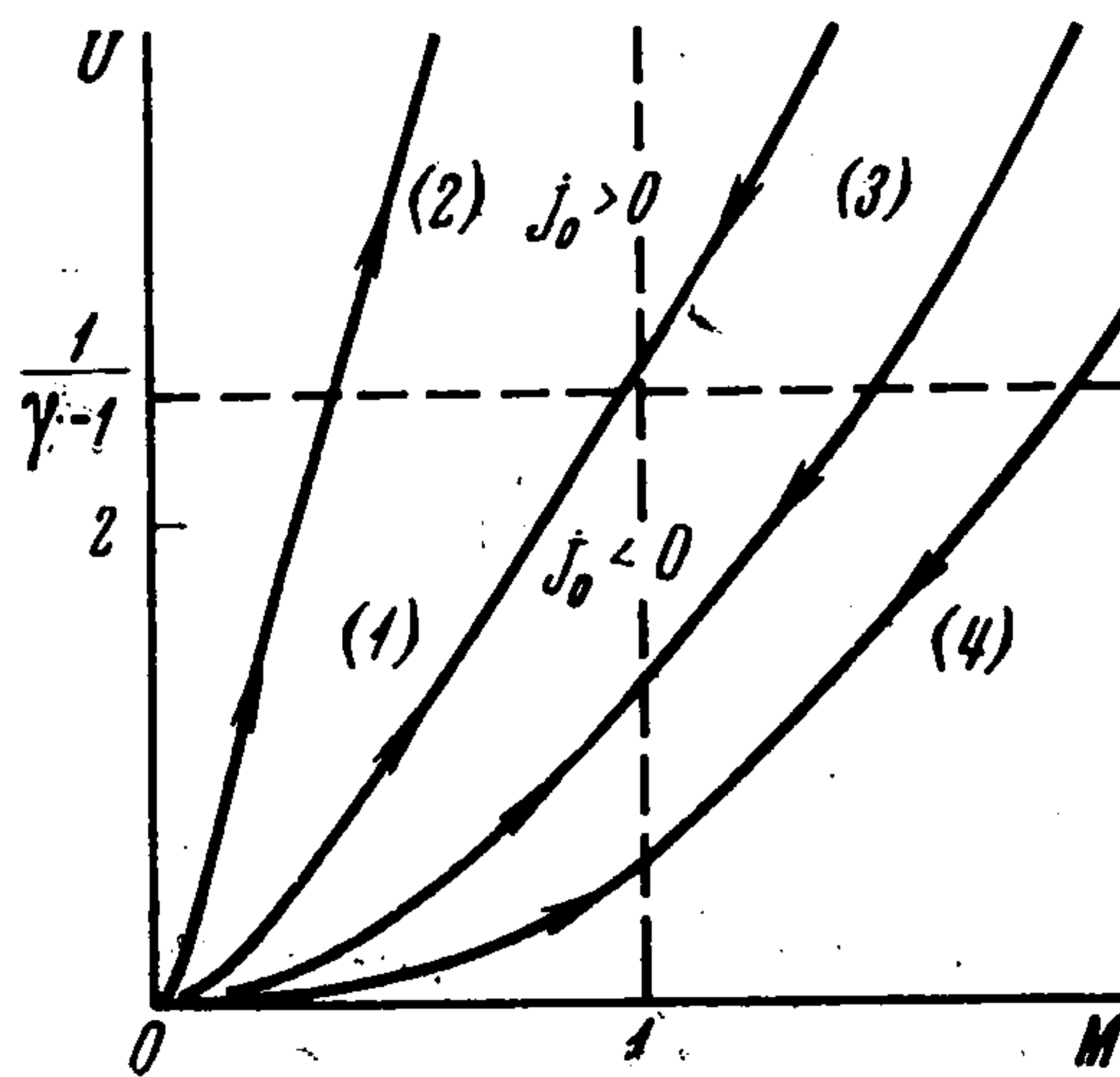
2. Течение в постоянном электрическом поле. Первое уравнение (1.2) может быть записано в виде

$$E_*' = Qq_*, \quad Q = 4\pi q_0 L / E_0, \quad E_* = E / E_0, \quad q_* = q / q_0$$

Здесь L — характерная длина. Рассмотрим случай, когда число Q мало. При этом E можно считать постоянным. Положим $E = E_0 = \text{const.}$



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда, выражая плотность заряда q из последнего уравнения (1.2), будем иметь замкнутую систему уравнений относительно u и M .

Вводя безразмерную скорость $U = u / |u_1|$ и исключая из уравнений (1.3) переменную x , получим

$$\frac{dM}{dU} = \frac{(\gamma + 1) M (U - U_2 \text{sign } E_0)}{2U (U - \text{sign } E_0)}, \quad U_2 = \frac{(1 + \gamma M^2)}{\gamma + 1} \quad (2.1)$$

Общее решение уравнений (2.1) имеет вид

$$M^2 = \frac{U |U - \text{sign } E_0|^\gamma}{|U - \text{sign } E_0|^\gamma + C}, \quad C = \frac{(U_0 - M_0^2) |U_0 - \text{sign } E_0|^\gamma}{M_0^2} \quad (2.2)$$

Здесь U_0, M_0 — значения параметров в сечении $x = 0$.

Общее решение уравнений (1.3) с учетом (2.2) дается формулой

$$x = \frac{m u_1^2}{(\gamma - 1) E_0 j_0} \left\{ \frac{1}{2} (U - U_0) [(\gamma - 1) (U + U_0) + 2] + \right. \\ \left. + C \text{sign} (U_0 - \text{sign } E_0) \left[\frac{|U - \text{sign } E_0| + 1}{|U - \text{sign } E_0|^\gamma} - \frac{|U_0 - \text{sign } E_0| + 1}{|U_0 - \text{sign } E_0|^\gamma} \right] \right\} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2) и (2.3) определяют зависимость скорости и числа Маха от x .

Полученное решение удобно исследовать в плоскости UM . На фиг. 1 и 2 построены интегральные кривые уравнения (2.1) для случаев $E_0 > 0$ и $E_0 < 0$ соответственно. Поле интегральных кривых зависит только от одного параметра γ . Перемещение вдоль интегральных кривых в направлениях, указанных стрелками, соответствует движению вниз по потоку.

Рассмотрим случай $E_0 > 0$ (фиг. 1). Прямая $U = 1$ и линии $M = 1$, $U = U_2$, проведенные пунктиром, разбивают плоскость на шесть областей. Точки $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ и $B(1, 1)$ будут особыми точками для уравнения (2.1). В п. 4. показано, что точки O и A — узлы, а точка B — седло. Особые решения в точке O есть линии $U = 0$ и $M = 0$, в точке A — линии $U = 1$, $M = 0$, в точке B — линии $U = M^2$, $U = 1$. Отметим, что линия $U = M^2$ проходит также через особую точку O , а прямая $U = 1$ соединяет особые точки A и B .

Если в некотором сечении канала значения скорости и числа Маха таковы, что соответствующие им точки в плоскости UM расположены в области 6 и в части области 1 ниже интегральной кривой $U = M^2$, то при движении вдоль канала число Маха может достигнуть значения равного единице. Такая ситуация может осуществляться лишь в конце канала. В области 4 может происходить неограниченное ускорение газа. Интегральные кривые, лежащие в областях 2 и 3 попадают в особую точку A .

Линия $U = U_2$ во всех точках, кроме особой точки B , пересекается интегральными кривыми с вертикальной касательной.

Если начальные данные лежат на линии $U = M^2$ (при $M < 1$) или на прямой $U = 1$ (при $M > 1$), то при движении вдоль канала может осуществиться непрерывный переход через скорость звука. В первом случае можно перейти из дозвукового режима в дозвуковой или сверхзвуковой, во втором случае из сверхзвукового режима в дозвуковой или сверхзвуковой. Осуществление того или иного режима зависит от граничных условий в конце канала. В п. 4 показано, что все режимы с непрерывным переходом через скорость звука в точке B устойчивы. Из формулы (2.3) можно определить расстояние от начала канала до точки, в которой осуществляется такой переход. Для первого и второго случая имеем соответственно

$$x = \frac{mu_1^2}{2j_0E_0(\gamma - 1)} (1 - U_0) [(\gamma - 1)U_0 + \gamma + 1] \quad (M_0 < 1)$$

$$x = \frac{mu_1^2}{j_0E_0(\gamma - 1)} \left(1 - \frac{1}{M_0^2}\right) \quad (M_0 > 1)$$

Рассмотрим случай, когда $E_0 < 0$. Прямые $U = 1/(\gamma - 1)$ и $M = 1$ разделяют плоскость UM на четыре области: выше прямой $U = 1/(\gamma - 1)$ плотность электрического тока положительна, ниже — отрицательна. Области 2 и 3 соответствуют генераторному режиму ($j_0E_0 < 0$, $j_0 > 0$), области 1, 4 — ускорительному режиму ($j_0E_0 > 0$, $j_0 < 0$). Так как в данной постановке $j = j_0 = \text{const}$, то переход из ускорительного режима в генераторный и наоборот невозможен. Напомним, что по предположению $q > 0$. На фиг. 2 видно, что при определенных условиях в областях 2 и 3 возможно движение, при котором $u \rightarrow -bE_0$. Из последнего уравнения (1.2) следует, что при таком движении $q \rightarrow \infty$ (величины u' , M' , E' также стремятся к бесконечности).

Если рассматривается задача об одномерном течении в канале произвольной длины, то точке, в которой достигается значение скорости $u = -bE$, должен соответствовать конец канала. При заданной длине канала корректность постановки задачи должна

обеспечиваться правильным выбором граничных условий. Вопрос о постановке граничных условий для системы (1.3) обсуждается в п. 3.

Случай $j_0 = 0$ соответствует газодинамическому течению с постоянными параметрами.

Отметим, что случай $j_0 = 0$ описывает также течение в ЭГД-генераторе при разомкнутой внешней цепи. При этом $q = 0$, $u_0 = -bE_0 = \text{const}$. Разность потенциалов $\Delta\phi$ на длине L генератора равна $\Delta\phi = -E_0L = u_0L/b$.

3. Течение с переменным электрическим полем. Рассмотрим случай произвольных значений числа Q . Два последних уравнения (1.1) можно проинтегрировать, введя в рассмотрение потенциал электрического поля ϕ и исключив заряд q при помощи первого уравнения (1.2). При этом будем иметь

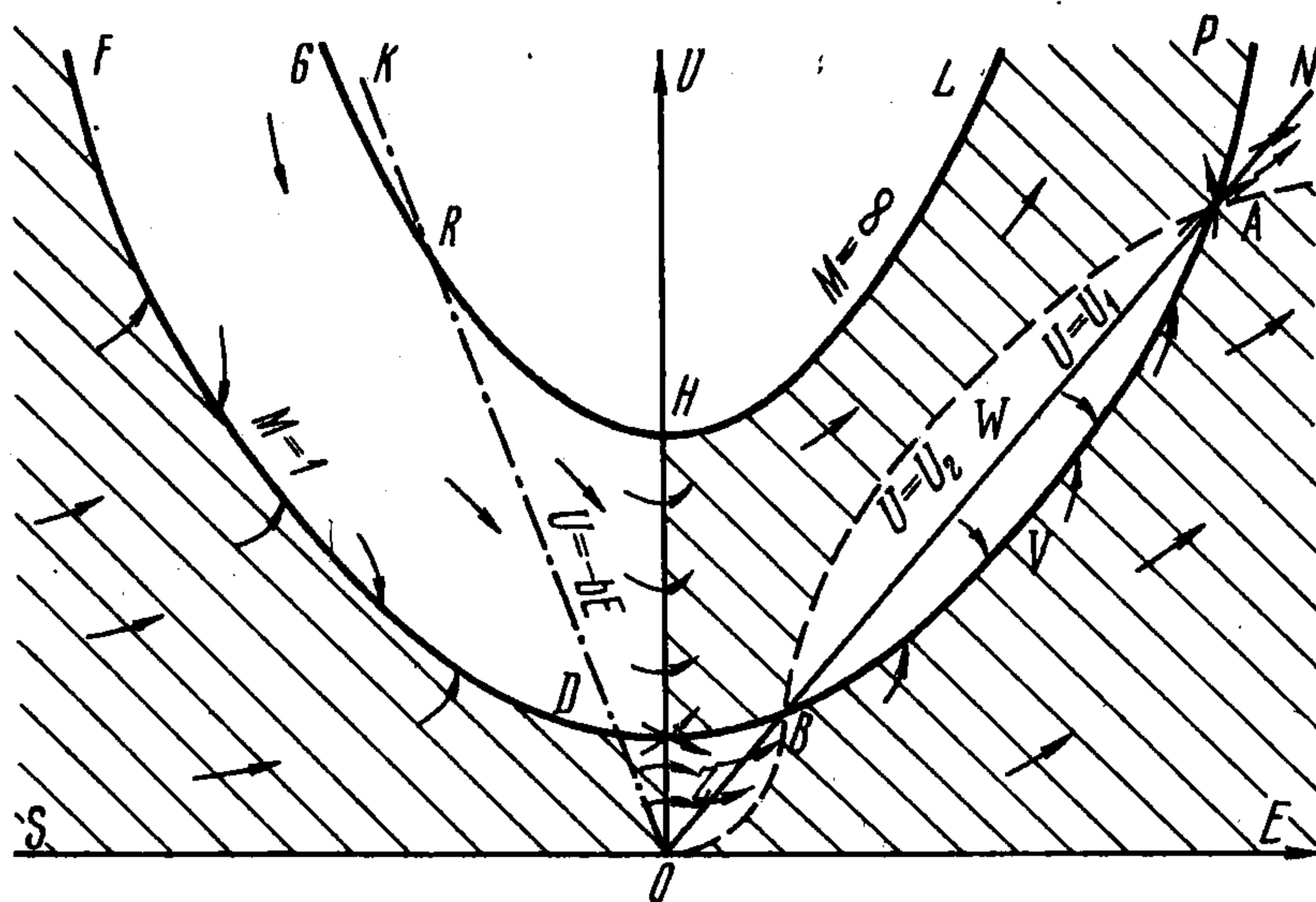
$$\rho u = m = \text{const}, \quad mu + p - E^2 / 8\pi = \Pi = \text{const} \quad (3.1)$$

$$m(c_p T + 0.5 u^2) + j_0 \phi = \varepsilon = \text{const} \quad (3.2)$$

Воспользовавшись третьим уравнением (1.2), из уравнений (3.1) и (3.2) получим

$$u^2 - \frac{2\gamma(\Pi + E^2/8\pi)}{(\gamma + 1)m} u + y = 0, \quad y = \frac{2(\gamma - 1)}{m(\gamma + 1)} (\varepsilon - j_0 \phi) \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) в пространстве uEy дает поверхность третьего порядка, на которой лежат интегральные кривые исходной системы. Физический смысл имеет только часть этой поверхности, на которой $u \geq 0$, $y \geq 0$. Движению вдоль канала соответствует перемещение по поверхности (3.3). Эта поверхность легко может быть нарисована в пространстве uEy , однако различные режимы течения в случае переменного поля удобно исследовать в плоскости uE , используя проекцию части поверхности (3.3) на плоскость $y = 0$ (фиг. 3).



Фиг. 3

Уравнения, описывающие поведение интегральных кривых на плоскости uE , имеют вид

$$\frac{du}{dx} = \frac{j_0 E [u - (\gamma - 1) b E]}{(u + b E) [\gamma (\gamma + 1) m u - \gamma \Pi - \gamma E^2 / 8\pi]}, \quad \frac{dE}{dx} = \frac{4\pi j_0}{u + b E} \quad (3.4)$$

При написании первого уравнения (3.4) использовались первое уравнение (1.3) и соотношение

$$M^2 = \frac{mu}{\gamma (\Pi + E^2 / 8\pi - mu)} \quad (3.5)$$

Формула (3.5) следует из второго уравнения (3.1). Исключая из уравнений (3.4) переменную x , получим

$$\frac{du}{dE} = \frac{E [u - (\gamma - 1) bE]}{4\pi [(\gamma + 1) mu - \gamma\Pi - \gamma E^2 / 8\pi]} \quad (3.6)$$

Ниже для определенности проводится исследование для случая, когда $\Pi > 0$. Случай $\Pi < 0$ исследуется аналогично.

На фиг. 3 построены параболы $M = 1$ (линия $ABCDF$) и $M = \infty$ (линия LHG). Уравнения этих парабол следуют из (3.5) и имеют соответственно вид

$$u = \frac{\gamma}{m(\gamma + 1)} (E^2 / 8\pi + \Pi), \quad u = (E^2 / 8\pi + \Pi) / m \quad (3.7)$$

Реальному течению в плоскости uE соответствует область, заключенная между прямой $u = 0$ и верхней параболой LHG . В области выше параболы $PABCDF$ течение сверхзвуковое ($M > 1$), ниже — дозвуковое ($M < 1$). На фиг. 3 проведены также линии $u = -bE$ (прямая OK) и $u = u_1 = (\gamma - 1) bE$ (прямая ON). Взаимное расположение парабол $M = 1$, $M = \infty$ и прямых $u = u_1$, $u = -bE$ может быть различным в зависимости от параметров γ , Π , m , b . Координаты точек пересечения прямой $u = u_1$ и параболы $M = 1$ суть

$$E_A = d + \Delta^{1/2}, \quad E_B = d - \Delta^{1/2}, \quad \Delta = d^2 - 8\pi\Pi, \quad d = 4\pi(\gamma^2 - 1) mb / \gamma$$

$$u_{A,B} = (\gamma - 1) bE_{A,B}, \quad E_{A,B} \geq 0 \quad (3.8)$$

На фиг. 3 для определенности изображен случай, когда $\Delta > 0$ — две точки пересечения. Если $\Delta = 0$, то прямая $u = u_1$ касается параболы $M = 1$, если $\Delta < 0$ — общих точек нет. Отметим, что прямая $u = u_1$ может пересекать также параболу $M = \infty$. При переходе через прямую $u = u_1$ и параболу $PABCDF$ производная du / dE меняет знак везде, кроме точек A и B ; в этих точках производная может и не менять знака. На прямой $u = u_1$ производная du / dE обращается в нуль, на параболе $PABCDF$ — в бесконечность. Точки пересечения A и B являются особыми для уравнения (3.6). Точка C , в которой обращаются в нуль числитель ($E = 0$) и знаменатель ($M = 1$) уравнения (3.6), также особая. Слева от прямой OK плотность тока $j_0 < 0$, справа $j_0 > 0$. Переход через линию OK невозможен по тем же причинам, которые были указаны в п. 2.

Линия $u = u_2 = u_1(1 + \gamma M^2) / (\gamma + 1)$ изображена на фиг. 3 пунктиром. На этой линии, везде кроме точек A и B , $dM / dE = 0$. В заштрихованных областях $dM / dE > 0$. Построенные линии разбивают плоскость uE на семь областей, в которых осуществляются различные режимы течения: при $E > 0$ области $OCBZ$, $OZBVANE$, PAN , в которых $M < 1$, и области $CBWAPLN$ и $BVAW$, в которых $M > 1$; при $E < 0$ области $FDCOS$ ($M < 1$) и $GHCDF$ ($M > 1$).

Из второго уравнения (3.4) следует, что при движении вдоль канала электрическое поле возрастает. При заданных значениях скорости и

электрического поля в некотором сечении канала поведение величин u и E потока при дальнейшем движении описывается уравнением (3.6) и показано стрелками на фиг. 3. При движении вдоль канала (движение в плоскости uE в направлениях, указанных стрелками) может быть достигнуто число Маха, равное единице (в плоскости uE стрелка упирается в параболу $M = 1$). Если при этом интегральные кривые не попадают в особые точки A, B, C , то такая ситуация реализуется только в конце канала. Непрерывный переход через значение $M = 1$ в точках, отличных от A, B, C , невозможен.

Как показано в п. 4, особые точки A и C будут седловыми особыми точками. В этих точках, вообще говоря, возможен переход из дозвукового режима в сверхзвуковой и обратно. Особая точка B в зависимости от величин γ, Π, m, b может быть либо фокусом, либо узлом. В первом случае интегральные кривые, приближаясь к точке B , обязательно пересекут линию $M = 1$ в точке, отличной от точки B , что соответствует концу канала. Во втором случае интегральные кривые могут войти в точку B , при этом может осуществиться непрерывный переход через скорость звука.

Парабола $M = \infty$ недостижима при конечных значениях скорости газа. В областях $CBWAPLN$ и $OZBVANE$ возможно неограниченное ускорение газа. В последней области ускорение происходит при $M < 1$. Генераторному режиму ($j_0 E < 0$) в плоскости uE соответствует область $ODRHC$; в остальных областях осуществляется ускорительный режим.

Заметим, что в некоторых случаях возможно построить течения, содержащие скачки уплотнения. В рассматриваемой постановке это будут, вообще говоря, газодинамические разрывы, на которых электрическое поле постоянно и выполняется условие $j_0 = \text{const}$. В пространстве uEu им соответствует переход с части поверхности (3.3), где $M > 1$ на ту часть поверхности, на которой $M < 1$.

Для решения системы (3.4) достаточно задать константы j_0, γ, b, m, Π и граничные условия на входе в канал

$$u = u_0, \quad E = E_0 \text{ при } x = 0 \quad (3.9)$$

Указанные условия позволяют решить задачу Коши (3.4), (3.9) и найти распределение скорости и электрического поля вдоль канала. При этом может оказаться, что в некотором сечении канала будет достигнуто значение числа Маха, равное единице, или значение скорости $u = -bE$. Если задача ставится таким образом, что длина канала не фиксирована, то можно считать, что этому сечению соответствует конец канала. В случае, когда длина канала задана, может оказаться, что это сечение будет достигнуто при $x < L$ (здесь L — длина канала), т. е. постановка задачи Коши некорректна. Возможны постановки задач, в которых величины E_0 и Π неизвестны. Такая ситуация возникает, например, когда выставляются граничные условия для потенциала электрического поля

$$\varphi = 0 \text{ при } x = 0, \quad \varphi = \varphi_1 \text{ (или } \partial\varphi / \partial x = 0 \text{) при } x = L$$

В тех случаях, когда задача Коши (3.4), (3.9) не имеет решения, необходимо формулировать для системы (3.4) краевую задачу, подобно тому, как это делается в газовой динамике. Можно задать, например, значения скорости и числа Маха на выходе из канала

$$U = U_L = -kbE_L, \quad M = M_L \text{ при } x = L$$

Здесь величина $k < 1$ при $j_0 < 0$ и $k > 1$ при $j_0 > 0$. При этом нужно снять соответствующее число условий в начале канала или считать часть констант Π , j_0 , m и т. д. определяемыми из решения задачи.

Аналогично дается постановка граничных условий в случае постоянного электрического поля.

4. Исследование особых точек уравнений одномерного течения. В случае постоянного электрического поля $E = E_0$ особые точки уравнений удобно исследовать в плоскости UM . В этой плоскости уравнение (2.1) имеет три особые точки, в которых одновременно обращаются в нуль числитель и знаменатель правой части (2.1). Координаты этих точек выписаны в п. 2 (точки O , A и B).

Особые точки O и A суть узлы [2]. Действительно, характеристическое уравнение в точке O имеет вид

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0, \quad \alpha = 3, \quad \beta = -2 \quad (4.1)$$

Корни многочлена (4.1) действительны и одного знака ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$). В точке A характеристический многочлен имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2/\gamma$.

Особая точка B есть седло. Действительно, характеристическое уравнение в этой точке имеет вид

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0, \quad \alpha = -2(\gamma - 1), \quad \beta = 4\gamma \quad (4.2)$$

Корни многочлена (4.2) действительны и имеют разные знаки: $\lambda_1 = 2$, и $\lambda_2 = -2\gamma$. Существуют две интегральные кривые, проходящие через эту особую точку. Уравнения этих кривых выписаны в п. 2.

Для исследования устойчивости перехода через скорость звука в особой точке B выпишем характеристическое уравнение в плоскости Mx . Нетрудно видеть, что оно имеет вид

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0, \quad \alpha = -S(\gamma - 1), \quad \beta = -\gamma S^2, \quad S = \frac{(\gamma - 1)j_0 E_0}{\gamma m u_1^2} > 0$$

Это уравнение показывает, что в плоскости Mx особая точка также есть седло ($\beta < 0$). На основании результатов работы [3] можно заключить, что непрерывный переход через скорость звука вдоль особых решений устойчив, так как величина α в характеристическом уравнении отрицательна.

В случае переменного электрического поля уравнение (3.6) в зависимости от параметров γ , Π , m , b может иметь в плоскости uE одну, две или три особые точки. На фиг. 3 изображен случай, когда существует три такие точки: A , B и C . Координаты точки C суть $E_c = 0$, $u_c = \gamma\Pi / m(\gamma + 1)$, координаты точек A и B — вычислены в п. 3 (см. (3.8)).

Точка C есть седло, так как характеристическое уравнение в этой точке имеет вид

$$\lambda^2 - \beta^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm \beta, \quad \beta = [4\pi(\gamma + 1)mu_c]^{1/2}$$

Существуют две интегральные кривые, проходящие через точку C (фиг. 3), вдоль которых возможен непрерывный переход из дозвукового режима течения в сверхзвуковой или дозвуковой и из сверхзвукового в дозвуковой или сверхзвуковой. Особые точки A и B различны в случае, когда дискриминант $\Delta > 0$ (см. (3.8)). Характеристическое уравнение в точке A записывается в виде

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0, \quad \alpha = -(\gamma - 1)E_A, \quad \beta = -\gamma E_A \Delta^{1/2} \quad (4.3)$$

Корни многочлена (4.3) действительные и имеют разные знаки.

Следовательно, особая точка A есть седло. Через эту точку проходят две интегральные кривые, вдоль которых возможен непрерывный переход из сверхзвуковой области течения в дозвуковую или сверхзвуковую и из дозвуковой области в сверхзвуковую или дозвуковую.

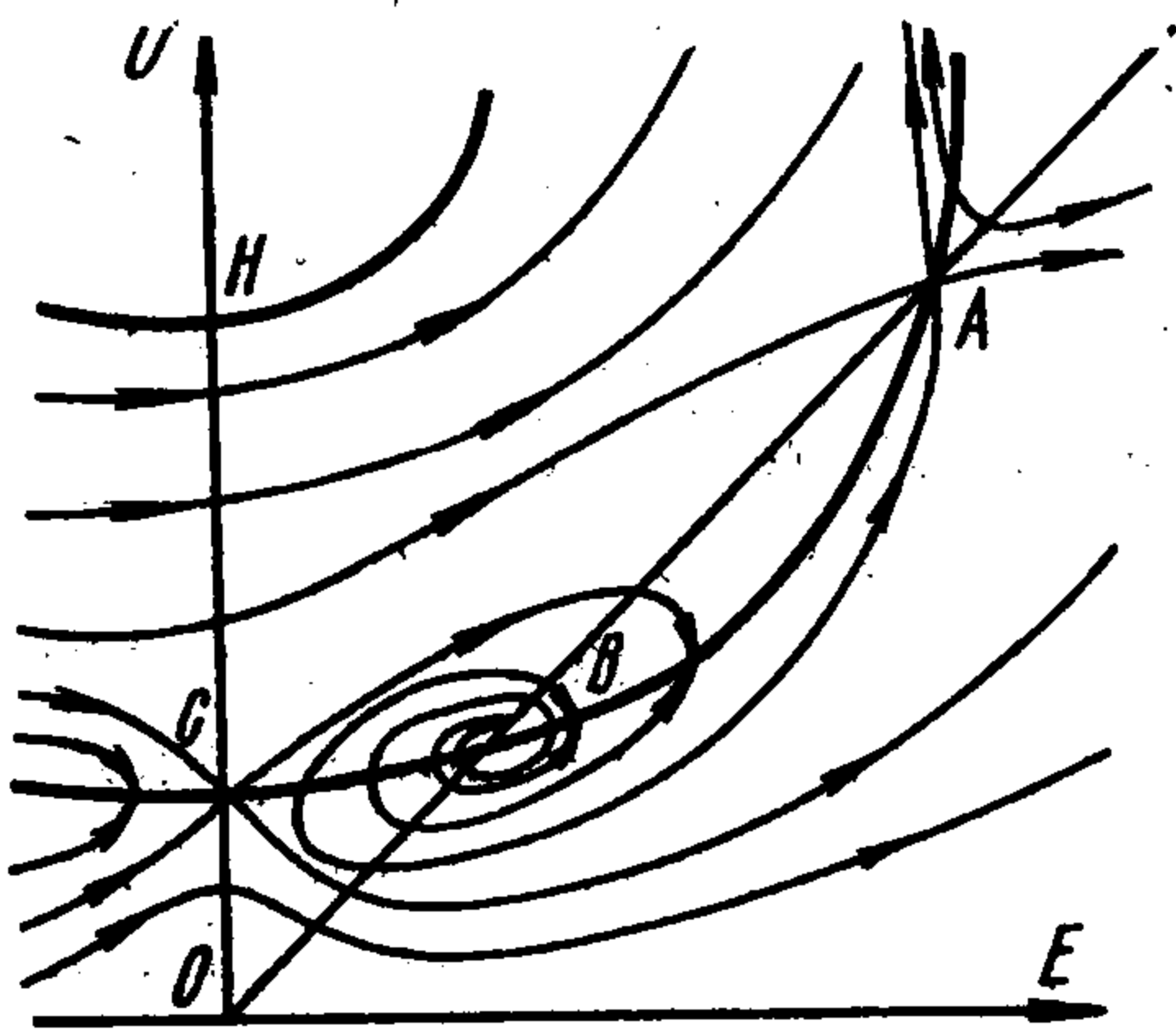
Особая точка B в зависимости от значений параметров γ , Π , m , b может быть либо узлом, либо фокусом. Характеристическое уравнение в точке B имеет вид

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0, \quad \alpha = -(\gamma - 1) E_B, \quad \beta = -\gamma E_B \Delta^{1/2} \quad (4.4)$$

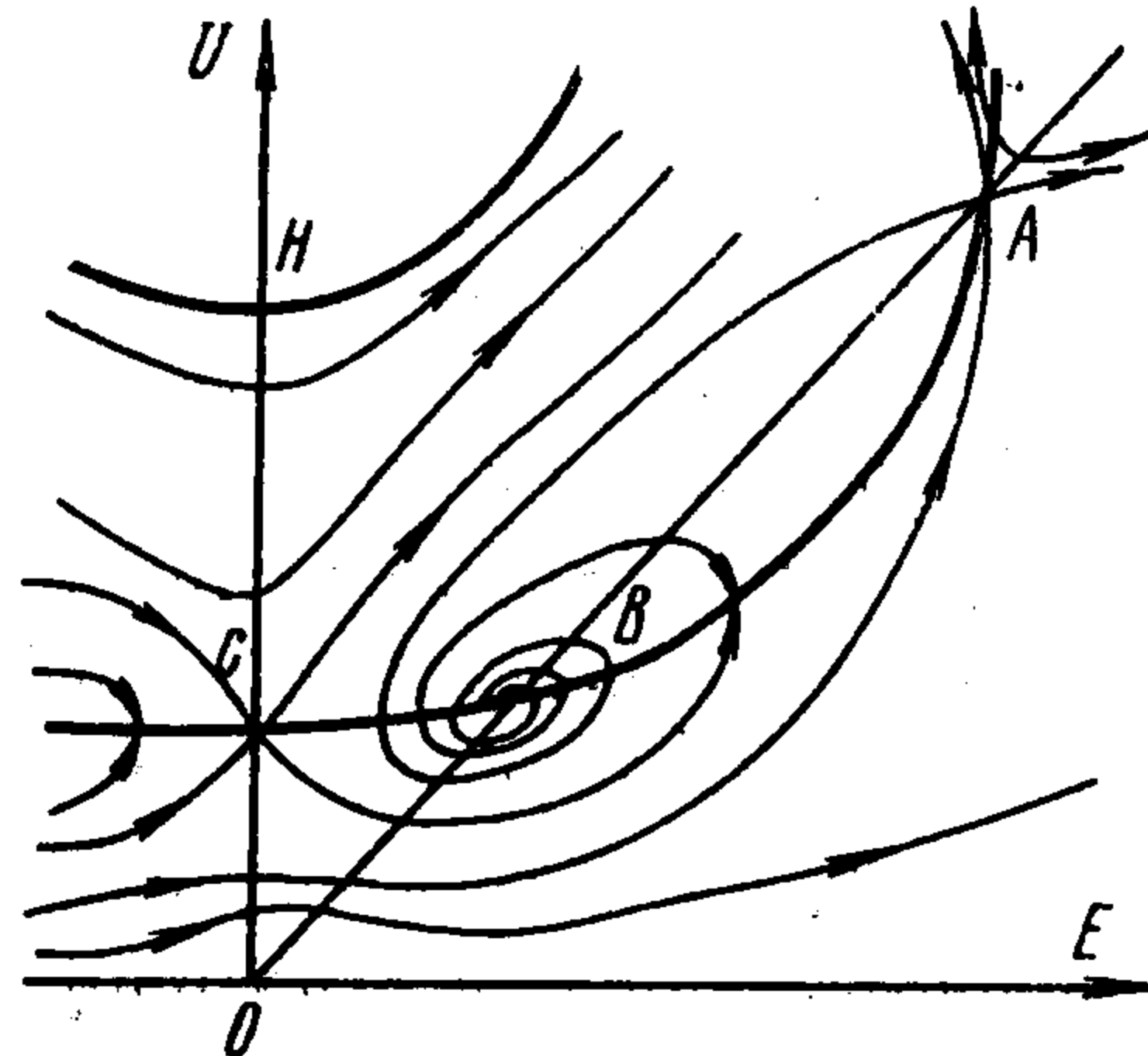
Нетрудно показать, что точка B будет фокусом, когда

$$\frac{c}{d^2} < \frac{8\gamma(\gamma^2 + 1)}{(\gamma + 1)^4}, \quad d = \frac{4\pi(\gamma^2 - 1)mb}{\gamma}, \quad c = 8\pi\Pi$$

На фиг. 4, 5 показаны два из возможных случаев расположения интегральных кривых, когда точка B есть фокус. При этом непрерывный переход через скорость звука в точке B невозможен, т. к. при приближении к этой точке будет достигнута линия $M=1$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Если $1 > c/d^2 > 8\gamma(\gamma^2 + 1)/(\gamma + 1)^4$, особая точка B будет узлом, в котором возможен непрерывный переход через скорость звука. Анализ исключительных направлений показывает, что при этом возможен только непрерывный переход из сверхзвуковой области в дозвуковую.

Для исследования устойчивости переходов через скорость звука в особых точках A и B необходимо выписать характеристическое уравнение в этих точках в плоскости Mx . Это уравнение легко написать, воспользовавшись соотношением (3.5) и разложением в ряд величины электрического поля вблизи особой точки: $E = E_{A,B} + 4\pi q_{A,B} \cdot (x - x_{A,B})$. Здесь $E_{A,B}$, $q_{A,B}$, $x_{A,B}$ — значения указанных параметров в особой точке. В плоскости Mx имеет

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0, \quad \alpha = -\frac{q_{A,B}}{mb}, \quad \beta = \frac{\gamma\alpha^2}{(\gamma - 1)^2 E_{A,B}} \left[E_{A,B} - 4\pi \frac{(\gamma^2 - 1)mb}{\gamma} \right]$$

Из характеристического уравнения следует, что и в плоскости Mx особая точка A будет седлом, а особая точка B может быть либо узлом, либо фокусом. Так как величина α в характеристическом уравнении отрицательна, то непрерывный переход через скорость звука в точках A и B устойчив [3].

В случае $\Delta < 0$ особых точек A и B не существует. В случае $\Delta = 0$ точки A и B сливаются и, как показывает анализ уравнения (3.6), эта точка суть вырожденное седло.

Анализ одномерного движения в электрогидродинамике при больших электрических числах Рейнольдса проведен в работе [4].

Поступила 12 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурдин М., Баррето Э., Хан М. Характеристики электрогазодинамических генераторов. В сб.: «Прикладная магнитная гидродинамика». М., «Мир», 1965.
2. Трикоми Ф. Д. Дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
4. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Исследование электрогидродинамических течений при больших электрических числах Рейнольдса. ПМТФ, 1969, № 1.