Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О НЕОБХОДИМОМ И ДОСТАТОЧНОМ КРИТЕРИИ ХРУПКОЙ ПРОЧНОСТИ

В. В. Новожилов

(Ленинград)

В качестве необходимого условия для оценки прочности упругого тела, ослабленного разрезом, предлагается критерий (2.1). Показано, что вытекающая из него формула для критической длины трещины практически совпадает с результатом Гриффитса. Обосновывается концепция, рассматривающая трещины-разрезы в упругих телах (поверхности скачков нормальных перемещений) как нетривиальные состояния равновесия физически нелинейной упругой среды. Показано, что теория трещин [1] по существу рассматривает задачу именно в такой постановке, линеаризируя ее приемом энергетического баланса. Отмечается, что получаемый этим путем критерий устойчивости трещины не только необходим, но и достаточен. Впрочем, оказывается, что в рассматриваемой задаче необходимый и достаточный критерий дают практически совпадающие результаты.

1. Рассмотрим известную задачу теории упругости: растяжение плоскости с эллиптическим вырезом нормальными напряжениями $\sigma_{yy}(x, \pm\infty) = \sigma$, действующими перпендикулярно большой оси эллипса.

Максимальные нормальные напряжения возникают в данном случае в точках $|x| = {}^1/_2 l$. При использовании линеаризированных уравнений классической теории упругости они определяются формулой

$$\max(\sigma_{yy}) = \sigma\left[1 + \left(\frac{2l}{\rho}\right)^{1/2}\right] \qquad \left(\rho = \frac{l^2}{2h}\right) \tag{1.1}$$

где ρ — наименьший радиус кривизны эллипса, l, h — его большая и малая оси.

Условием хрупкого разрушения общепринято считать неравенство

$$\sigma_{\max} \geqslant \sigma_c \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_{\max}$ — наибольшее положительное нормальное напряжение в теле, σ_c — предел прочности на разрыв.

Применив этот критерий к рассматриваемой задаче, приходим к выводу, что при заданных напряжениях на бесконечности σ и радиусе кривизны ρ условием прочности тела, ослабленного эллиптической трещиной, будет неравенство

$$l < l_* = \frac{(\sigma_c - \sigma)^2}{2\sigma^2}\rho \tag{1.3}$$

где l_* — критическая длина трещины. Полагая в (1.3), $\rho = 0$, т. е. переходя к случаю трещины, имеющей вид разреза, получаем

$$l_* = 0 \tag{1.4}$$

Таким образом, из линейной теории упругости и критерия (1.2) следует вывод, что наличие трещины разреза должно приводить тело к разрушению при сколь угодно малых конечных напряжениях σ, как бы ни была мала длина трещины. Однако из энергетических соображений Гриффитс [1] показал, что и в случае трещины разреза разрушение должно происходить (аналогично случаю эллиптической трещины с конечным поперечным размером) только, если длина трещины превосходит некоторое критическое значение. В качестве энергетического критерия разрушения тела, имеющего разрез, Гриффитс предложил неравенство

$$dU > dR \tag{1.5}$$

где dU — уменьшение упругой энергии тела, происходящее за счет увеличения длины трещины на dl (при $\sigma = \mathrm{const}$), а dR — работа, которую надо затратить, чтобы разорвать тело по dl. При соблюдении (1.5) трещина неограниченно расширяется, а в случае

$$dU = dR \tag{1.6}$$

находится в критическом состоянии. Для задачи о растяжении плоскости, ослабленной разрезом, ориентированным поперек направления растяжения, линейная теория упругости дает

$$dU = 2\pi l \frac{\sigma^2}{E} dl \tag{1.7}$$

Что же касается dR, то Гриффитс предположил, что работа, потребная для разрыва тела по единице площади, есть постоянная величина 2γ, являющаяся физической константой, характеризующей прочность материалов на разрыв. При энергетической постановке задачи эта константа будет аналогом константы σ_c, используемой при решении задачи в напряжениях. В рассматриваемом частном случае

$$dR = 2dl \tag{1.8}$$

Подставив (1.8) в (1.7) приходим к формуле

$$l_g = \frac{4E\gamma}{\pi\sigma^2} = \frac{A}{\sigma^2}, \quad A = \frac{4E\gamma}{\pi} \tag{1.9}$$

Константа A зависит от механических свойств материала тела.

Таким образом, два разных и, по-видимому, оба правильных способа рассуждения, основывающиеся на одном и том же теоретическом решении задачи о распределении напряжений у трещины-разреза, дают существенно не одинаковые результаты. При этом применение более общего критерия (1.2), справедливого для отверстий любой формы, приводит в рассматриваемом частном случае к явно неправдоподобному и не подтверждаемому опытами выводу, тогда как частный критерий (1.8), придуманный специально для трещин разрезов, дает правдоподобный и подтверждаемый опытами результат. Правильный путь истолкования этого парадокса был намечен уже самим А. Гриффитсом и затем более подробно развит Эллиотом [3].

Дело в том, что в окрестности концов разреза бесконечно велики, согласно линейной теории упругости, не только напряжения, но и их градиенты, ввиду чего изменением напряжений в районах их максимальных значений нельзя пренебрегать даже на расстояниях порядка атомного радиуса. Ниже эта идея получает дальнейшее развитие.

2. Разрушение твердых тел есть процесс дискретный: нельзя, например, отделить половину атома от половины атома, сохранив связь между остальными их половинами. «Квантом» разрушения будет нарушение связи всего лишь у одной пары атомов. Здесь и в дальнейшем, имея в виду грубость последующих рассуждений, опирающихся на аппарат линейной теории упругости, нет смысла вдаваться в особенности строения атомных решеток. Последние трактуются как совокупности прилегающих один к другому атомных слоев, причем атомы каждого последующего слоя располагаются над атомами предыдущего слоя, т. е. рассматриваются идеальные (не плотно упакованные) кубические решетки.

Если учесть сказанное, то критерий разрушения (1.2) в области больших градиентов напряжений следует написать в интегральной форме

$$\max\left(\int_0^{2a}\sigma_{yy}\,dx\right)\geqslant 2a\sigma_c \tag{2.1}$$

где σ_{yy} — нормальное напряжение, перпендикулярное атомному слою, x — расстояние, отсчитываемое вдоль прямолинейной цепочки атомов в направлении быстрейшего изменения напряжений, a — атомный радиус.

Необходимость критерия (2.1) очевидна. Если данное неравенство не выполняется, то разрушение произойти не может, так как приложенные к телу внешние силы оказываются не в состоянии преодолеть максимального значения межатомных сил даже у одной пары атомов. Покажем, что применение этого критерия к задаче о растяжении плоскости, ослабленной трещиной-разрезом, приводит к формуле, практически совпадающей с результатом Гриффитса (1.9). Распределение вдоль оси x нормальных напряжений σ_{yy} вблизи конца трещины определяется асимптотической формулой [4]

$$\sigma_{yy}=\sigma\left(1+\frac{1}{2}\frac{l^{1/2}}{x^{1/2}}\right) \tag{2.2}$$

Здесь ось y перпендикулярна трещине, ось x направлена вдоль трещины с началом отсчета на рассматриваемом ее конце. На основании (2.2)

$$\int_0^{2a}\sigma_{yy}\,dx=2a\sigma\left[1+\left(\frac{l}{2a}\right)^{1/2}\right] \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.1), получаем:

$$\sigma_c-\sigma=\sigma\left(\frac{l_*}{2a}\right)^{1/2},\quad \text{или}\quad l_*=\frac{2(\sigma_c-\sigma)^2}{\sigma^2}a \tag{2.4}$$

Согласно имеющимся оценкам [5]

$$^1/_4 E\geqslant\sigma_c\geqslant {}^1/_{13}E \tag{2.5}$$

Здесь σ_c — предел прочности на разрыв бездефектной атомной решетки. Поэтому в (2.5) в большинстве случаев допустимо пренебрегать σ по сравнению с σ_c, после чего (величина B есть физическая константа)

$$l_*\approx\frac{2a\sigma_c^2}{\sigma^2}=\frac{B}{\sigma^2},\qquad B=2a\sigma_c^2 \tag{2.6}$$

Формула (2.6) по виду совпадает с формулой Гриффитса (1.9). Покажем, что и постоянные A, B, входящие в эти формулы, достаточно близки. Действительно, согласно (1.9) и (2.6)

$$\frac{A}{B}=\frac{2}{\pi}\frac{E\gamma}{a\sigma_c^2}\approx\frac{2}{\pi} \tag{2.7}$$

Так как, согласно оценке Е. Орована [7]

$$\gamma\approx\frac{\sigma_c^2 a}{E} \tag{2.8}$$

Учитывая приближенность выражения (2.8) (оно выведено в предположении, что зависимость силы взаимодействия двух атомов от изменения расстояния между ними аппроксимирована полусинусоидой), можно сказать, что формулы (1.9) и (2.6) практически совпадают.

Отсюда видно, что формула Гриффитса выводится не только энергетическим путем, но и из критерия прочности по напряжениям, при естественном обобщении этого критерия на случай больших градиентов напряжений.

3. Как известно, распределение напряжений в окрестности трещины-разреза может быть получено путем предельного перехода из решения задачи о распределении напряжений в окрестности эллиптической трещины при $\rho\to 0$. Отсюда и формула (2.6) должна получаться путем аналогичного предельного перехода из формулы для критической длины эллиптической трещины, если при ее выводе использовать критерий прочности не в «точечной» форме (1.2), а в «дискретной форме» (2.1). Небезынтересно выполнить соответствующее уточнение результата (1.3). Согласно формулам Г. В. Колосова, распределение напряжений вдоль оси x

$$\sigma_{yy}=2\varphi'(x)+x\varphi''(x)+\psi'(x) \tag{3.1}$$

Отсюда

$$\int\sigma_{yy}\,dx=\varphi(x)+\psi(x)+x\varphi'(x)+\text{const} \tag{3.2}$$

В задаче о растяжении плоскости с эллиптическим вырезом [6]

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\sigma\left[x+C\left(\frac{1}{\xi}-m\xi\right)\right],\quad \psi(x)=-C\sigma(1+m^2)\frac{\xi}{1-m\xi^2} \tag{3.3}$$

$$\xi=\frac{1}{2m_1C}\left[x-\sqrt{x^2-{}^1/_4\,(l^2-h^2)}\right],\quad C=\frac{l+h}{2},\quad m_1=\frac{l-h}{l+h}$$

Подставив (3.3) в (3.2), полагая при этом, что $a/l\ll 1$, $h/l\ll 1$ и выполнив интегрирование в пределах ${}^1/_2\ll x\ll {}^1/_2\,l+2a$, имеем

$$\int\limits_{{}^1/_2 l}^{{}^1/_2 l+2a}\sigma_{yy}\,dx\approx 2a\sigma\left[1+\left(\frac{2l}{\rho+4a}\right)^{1/2}\right] \tag{3.4}$$

После подстановки (3.4) в (2.1) приходим к следующей формуле для критической длины эллиптической трещины:

$$l_*\approx\frac{(\sigma_c-\sigma)^2}{2\sigma^2}(\rho+4a) \tag{3.5}$$

Эта формула более точна, чем (1.3), поскольку в (3.5) учтена дискретность процесса разрушения.

Для достаточно узких трещин $\sigma \ll \sigma_c$ приближенно

$$l_* \approx \frac{\sigma_c^2}{2\sigma^2}(\rho + 4a) \tag{3.6}$$

Из (3.5) при $a \ll \rho$ получается (1.3), а при $\rho \ll a$ имеем (2.6), как это и следовало ожидать. Познавательная ценность выражения (3.6) состоит в том, что оно позволяет истолковать формулу Гриффитса не только как результат справедливый для трещин-разрезов, но и как приближенное решение для «телесных» трещин с достаточно малыми радиусами кривизны их концов, причем видна оценка погрешности при переходе от (3.6) к (2.6).

Между прочим, Коттрелл [8] для примирения формулы Гриффитса с критерием прочности по напряжениям постулировал, что выражением (1.1) можно пользоваться только при $\rho \geqslant \rho^*$, а при $\rho < \rho^*$, σ_{max} следует считать не зависящим от ρ и равным $\sigma_{max}(\rho^*)$. Величину эффективного радиуса кривизны конца трещины ρ^* Коттрелл определил, потребовав, чтобы для трещин с $\rho < \rho^*$ (включая и трещины-разрезы) критическая длина трещины совпадала с ее значением по Гриффитсу. При этом оказалось, что $\rho^* \approx 3a$. Полученный путем иных соображений результат (3.5) оправдывает предложение Коттрелла. В самом деле, выражение (3.5), основывающееся на обобщенном критерии прочности (2.2), может быть формально получено из выражения (1.3), выведенного исходя из «точечного» критерия прочности (1.2), при замене в последнем радиуса кривизны конца трещины ρ на

$$\rho^* = \rho + 4\,a \tag{3.7}$$

причем для трещины-разреза

$$\rho^* = 4a \tag{3.8}$$

что практически совпадает с рекомендацией Коттрелла.

4. В адрес предложенного выше вывода формулы Гриффитса из критерия прочности по напряжениям может быть выдвинуто возражение, что механика сплошных сред не имеет права рассматривать размеры порядка атомного диаметра как конечные величины.

Однако это же возражение в равной мере относится и к энергетической теории Гриффитса, а также и ко всем другим существующим теориям, рассматривающим трещины как разрезы, поскольку все они, хотя и в завуалированной форме, но содержат атомный радиус как характерный параметр задачи. В самом деле, согласно (2.6) и (2.8)

$$\gamma = \alpha E a \tag{4.1}$$

Здесь α — безразмерный коэффициент. В качестве его среднего значения обычно принимают

$$\alpha \approx 0.1 \tag{4.2}$$

Разделив γ на E, получаем константу размерности длины

$$\beta = \gamma \,/\, E \approx 0.1a \tag{4.3}$$

Таким образом, и в теории Гриффитса, хотя в скрытой форме, но содержится чуждая механике сплошных сред физическая константа — атомный радиус. Присутствует она и в δ_* теории трещин М. Я. Леонова и В. В. Панасюка [1, 9, 10], где существенную роль играет равенство

$$2\ \gamma = \sigma_c \delta_* \tag{4.4}$$

В случае идеально хрупкого разрушения γ и σ_c в (4.4) определяются формулами (4.1) и (2.6). Приняв (4.2) в качестве среднего значения для α и положив $\sigma_c \approx 0.1E$, получаем

$$\delta_* \approx a \tag{4.5}$$

т. е. δ_* в данном случае практически совпадает с атомным радиусом.

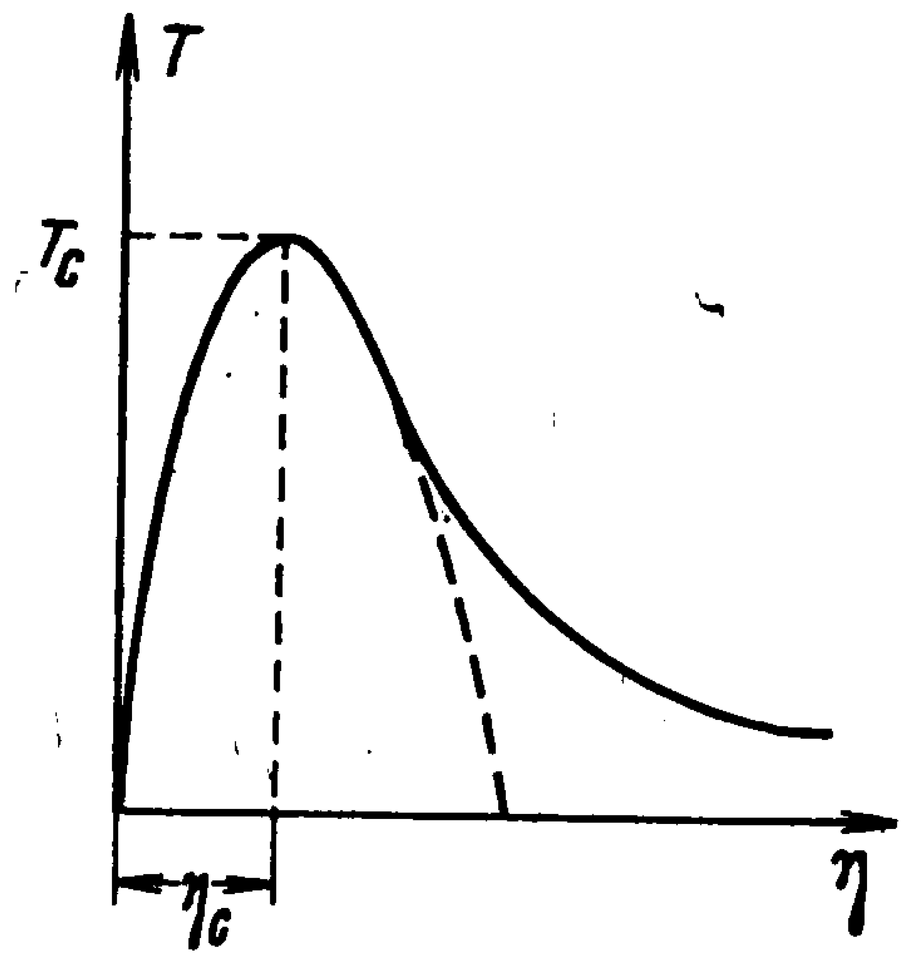
Появление этой физической константы во всех теориях хрупкого разрушения, рассматривающих трещины как идеальные разрезы, неизбежно, так как при такой постановке задачи необходимо иметь, помимо длины трещины, хотя бы еще одну характерную величину размерности длины. Ее нет ни в условиях задачи, ни в классической теории упругости и ввести ее можно только, учтя дискретность структуры твердых тел. В идеальных атомных решетках единственным характерным размером является радиус атома, и поэтому именно он входит в теорию трещин-разрезов как физическая константа, дополняющая константы теории упругости. К этому следует добавить, что и проблема квазихрупкого разрушения (т. е. вопрос о распространении трещин-разрезов в упруго-пластических телах) не может быть решена без привлечения физической константы размерности длины. Поскольку ни в теории упругости, ни в теории пластичности таких констант нет, ее следует искать среди характеристик, связанных с дискретностью структуры твердых тел (размеры зерен, среднее расстояние между дефектами решетки, атомный радиус). Но это уже не предмет излагаемого исследования.

5. Как было отмечено, критерий (2.1) необходим. Если неравенство (2.1) не выполнено, то разрушение заведомо не может произойти, так как в этом случае напряжения недостаточны для того, чтобы максимальное значение силы взаимодействия было превзойдено хотя бы у одной пары атомов.

При малых градиентах напряжений, когда изменением последних можно пренебречь в пределах многих атомных рядов, критерий (2.1) будет не только необходимым, но и достаточным условием для макроскопического разрушения тела. Но в случае больших градиентов напряжений (какие имеют место, например, в задачах о концентрации напряжений вблизи узких щелей и разрезов) достаточность критерия (2.1) становится сомнительной, так как он обеспечивает преодоление максимальной силы взаимодействия всего лишь между двумя атомными рядами. Будучи заключены среди других атомных рядов, сохраняющих устойчивость, эти два ряда окажутся ограниченными в своих перемещенных, и выход их из строя казалось бы, не должен повлечь за собой макроскопическое разрушение тела. Ситуация напоминает известную из теории несущей способности статически неопределимых систем, для которых потеря устойчивости или разрушения отдельных их элементов еще не означает разрушения системы в целом.

Из сказанного следует, что критерий (2.1), будучи применен к задаче о трещинах-разрезах, должен давать нижнюю границу для разрушающего напряжения σ и, соответственно, для критической длины трещины. Более точная оценка прочности тела, ослабленного щелью, требует исследования напряжений в этой задаче не на основании закона Гука, а с учетом истинной картины взаимодействия атомов в окрестности концов щели.

6. Обозначим через $T = 2a\sigma$ силу взаимодействия между двумя рядами атомов, отнесенную к единице длины. Зависимость T от изменения расстояния между рядами η имеет вид, показанный на фиг. 1.



Фиг. 1

Одной из подходящих математических форм этой зависимости будет выражение

$$T = 2a\sigma = E\eta e^{-\eta/\eta_c} \qquad (6.1)$$

где η_c — значение η, соответствующее $T_{\max} = 2a\sigma_c$, причем

$$T_{\max} = E\eta_c e^{-1}, \qquad \sigma_c = \frac{E\eta_c}{2a} e^{-1} \qquad (6.2)$$

У кривой $T \sim \eta$ есть восходящий $(\eta \leqslant \eta_c)$ и нисходящий $(\eta > \eta_c)$ участки, причем имеется существенное различие в характере деформирования, в зависимости от того, находятся ли напряжения σ на первом или втором участке.

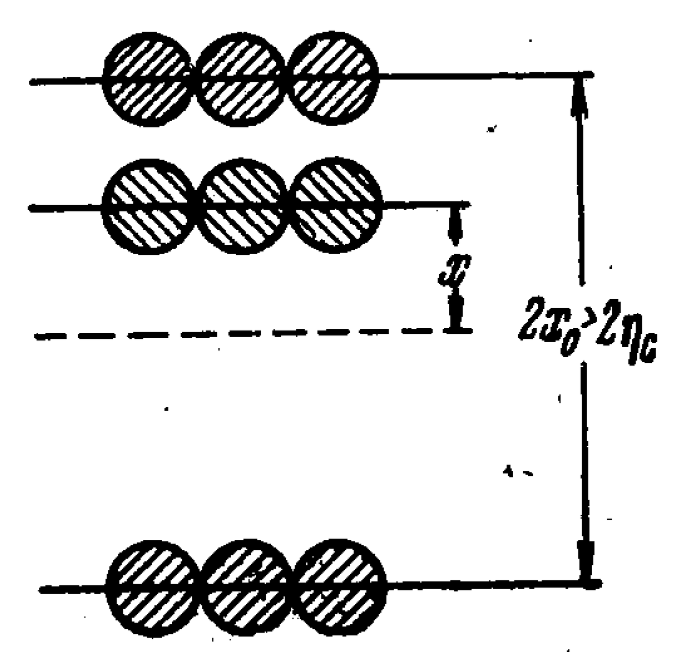
На первом участке при увеличении деформации (расхождения между атомными рядами) напряжения возрастают, а на втором, наоборот, — убывают. Равновесие атомов в каждой точке восходящего участка устойчиво, а равновесие атомов в каждой точке нисходящего участка неустойчиво, так как в последнем случае при малом отклонении из положения равновесия в сторону возрастания деформации атомы начинают неограниченно расходиться при сохранении величины напряжения.

Рассмотрим следующую ситуацию (фиг. 2): пусть расстояние между двумя плоскими атомными слоями, положение которых считается фиксированным, равно $2x_0 > 4a + 2\eta_c$ и пусть между этими слоями расположен еще один, параллельный им атомный слой, подверженный только силам, действующим на него со стороны двух фиксированных слоев. Принимая, что эти силы подчинятся закону (6.1), нетрудно установить, что, кроме тривиального положения равновесия $x_1 = 0$, промежуточный слой имеет еще два симметричных относительно плоскости $x = 0$ положения равновесия

$$x_2 = + x_*, \quad x_3 = - x_* \qquad (6.3)$$

где x_2, x_3 — корни трансцендентного уравнения

$$x = (x_0 - 2a)\,\mathrm{th}\frac{x}{\eta_c} \qquad (6.4)$$



Фиг. 2

При этом тривиальное положение равновесия неустойчиво, а два других положения равновесия устойчивы.

Из этих рассуждений вытекает, что атомный слой не может одновременно находиться в состоянии взаимодействия, соответствующем нисходящему участку кривой $T \sim \eta$ с двумя смежными фиксированными атомными слоями — он обязательно притянется к одному из них. Тем самым взаимодействие, соответствующее нисходящей ветви кривой $T \sim \eta$, практически не может существовать одновременно у нескольких смежных атомных слоев, а может иметь место только между двумя смежными атомными слоями при дополнительном условии, что участки атомных слоев, между которыми возникло такое состояние, ограничены в перемещениях. Последнее может быть обеспечено только в том случае, если указанные участки имеют конечные размеры и окружены атомными слоями, сохранившими устойчивость. Расхождение двух атомных слоев в какой-либо их области на расстояние $\eta > \eta_c$ следует рассматривать как образование в теле щели, края которой будут вновь образовавшимися границами тела. При математическом решении задачи указанные участки внутри тела надлежит считать плоскими разрезами, к берегам которых приложены силы взаимодействия, подчиненные закону

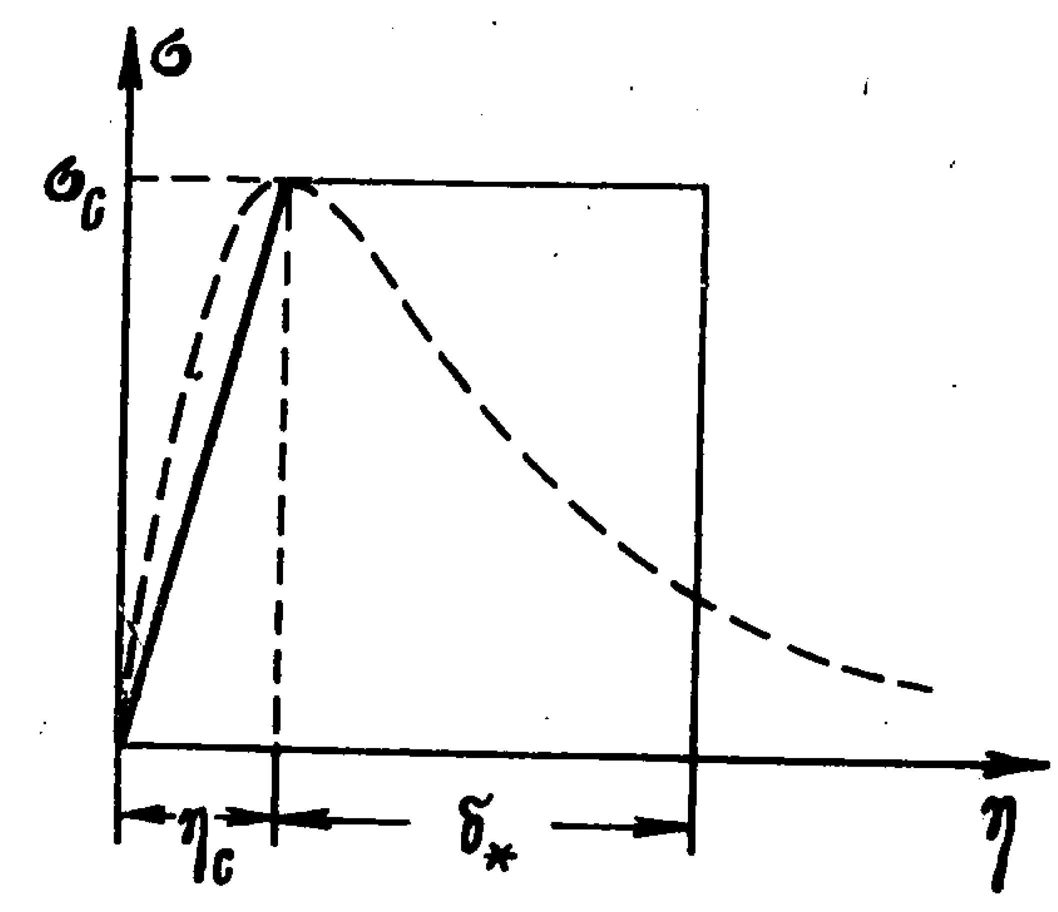
$$\sigma = \sigma_c \left[1 + \frac{2v}{\eta_c}\right] e^{-2v/\eta_c} \tag{6.5}$$

где $2v$ — расстояние между берегами щели.

Изложенное выше позволяет взглянуть на теорию трещин - разрезов с необычной точки зрения, а именно: рассматривать их как нетривиальные решения задач теории упругости, возможность которых вытекает из нелинейности соответствующих уравнений. Приняв вместо линейного закона связи между атомами нелинейный закон вида (6.1), естественно, утрачиваем единственность решения. Рассматривая, например, растяжение плоскости силами на бесконечности $\sigma_{yy} = \sigma$, помимо тривиального устойчивого решения

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = \sigma$$

будем иметь еще дополнительные устойчивые решения и притом бесчисленное их множество. Этим решениям соответствует образование в теле скачков перемещений на некоторых плоских участках внутри тела, т. е. образование щелей. Форма и размеры этих щелей могут быть определены путем решения сформулированной выше нелинейной задачи. С этой точки зрения образование в упругом теле трещины есть явление типа потери устойчивости в большом, аналогичное, например, хлопку* сферической оболочки. Форма и размеры вмятины, образующейся при хлопке, вполне определенны, но место образования ее неопределенно — вмятина может появиться в любой точке оболочки. Неопределенно и число вмятин — в принципе их может возникать несколько.



Фиг. 3

Аналогичная неопределенность сохраняется и в задаче о равновесии упругой плоскости, где так же, как и в предыдущем примере, место образования трещины и количество образующихся трещин остаются неопределенными.

7. Сформулированная выше нелинейная проблема отыскания неоднозначных решений задачи о растяжении упругой плоскости, у которой взаимодействие атомов подчиняется закону вида (6.1), весьма трудна и вряд ли может быть решена строго. Удачное приближенное ее решение дано в работах М. Я. Леонова и В. В. Панасюка, подробно освещенных в монографии [1].

Хотя цитированные авторы и не придают своим результатам той трактовки, какая была дана выше, полагая, что разрез существует в теле заранее и что длина его наперед задана, тем не менее, по существу ими рассматривается именно вопрос о неоднозначных решениях задачи растяжения физически нелинейной упругой плоскости.

В [10] кривая фиг. 1 заменяется кривой фиг. 3, согласно которой при $\eta \leqslant \eta_c$ справедлив закон Гука, а при $\eta > \eta_c$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_c & (\eta_c \leqslant \eta \leqslant \eta_c + \delta_*) \\ 0 & (\eta > \eta_c + \delta_*) \end{cases} \tag{7.1}$$

причем δ_* выбирается из требования равенства площадей истинной и приближенной кривых, т. е. из условия

$$2\gamma = \sigma_c \delta_* \tag{7.2}$$

В этом упрощении нетрудно узнать широко применяющуюся при решении нелинейных задач идею энергетического баланса. Хотя при таком упрощении график $T \sim \eta$ остается нелинейным, тем не менее рассматриваемая задача становится линейной, так как во всех точках внутри тела действует закон Гука, а силы, приложенные к берегам разреза, превращаются в не зависящую от перемещений берегов постоянную нагрузку.

Задаваясь длиной разреза l и требуя, чтобы на его концах напряжения были равны $\sigma_{yy} = \sigma_c$, можно определить область значений l, в которой поставленная задача имеет решение. Все необходимые выкладки удается довести до конца, и из них вытекают следующие основные результаты.

Ширина участков вблизи концов разреза, на которых действуют постоянные напряжения $\sigma_{yy} = \sigma_c$, определяется приближенным выражением

$$\Delta \approx \frac{\pi^2}{16} \frac{\sigma^2}{\sigma_c^2} l \tag{7.3}$$

которое, если учесть формулы (1.9), (2.8), приводится к виду

$$\Delta = \frac{\pi}{4} \frac{E\gamma}{\sigma_c^2} \frac{l}{l_g} \tag{7.4}$$

Критическое значение длины разреза (т. е. предельное значение этой длины, за которым решение рассматриваемой нелинейной задачи не существует) получается практически совпадающим с критической длиной

Гриффитса l_g (при условии, что $l \gg \delta_*$, каковое для макроскопических щелей всегда выполняется, так как согласно оценке (4.5) величина δ_* будет порядка атомного радиуса). Отсюда (если даже принять во внимание, что формула (2.8) несколько занижает γ, поскольку ее вывод основывается на замене нисходящей ветви кривой $T \sim \eta$ отрезком синусоиды, показанным на фиг. 1 пунктиром) Δ будет величиной, не превосходящей атомный диаметр.

Распределение нормальных напряжений σ_{yy} у конца трещины $x = {}^1/_2 l + \Delta$, находящейся в критическом состоянии, определяется формулой

$$\sigma_{yy}(\xi, 0) = \frac{1}{2}\sigma_c\left[1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{\Delta^* - \xi}{\Delta^* + \xi}\right)\right] \tag{7.5}$$

$$\Delta^* = \frac{\Delta}{l}, \quad \xi = \frac{x - {}^1/_2 l - \Delta}{l} \tag{7.6}$$

Эта формула может быть выведена из более громоздкого выражения (1.13) работы [10], если считать Δ^* и ξ величинами пренебрежимо малыми по сравнению с единицей. Полагая $\xi = \Delta^*$ в (6.5), имеем

$$\sigma_{yy}(\Delta^*, 0) = {}^1/_2\ \sigma_c \tag{7.7}$$

Отсюда видно, что напряжения σ_{yy} быстро убывают по мере удаления точки от нового конца разреза и уже на расстоянии порядка атомного диаметра становятся в два раза меньше своего максимального значения.

Таким образом, согласно изложенному решению трещина приобретает тенденцию к распространению, когда преодолеваются атомные связи у ее концов на участках порядка атомного диаметра, т. е. когда разобщаются две пары атомных рядов. Но именно это условие и было принято в качестве необходимого критерия разрушения при выводе формулы (2.6). Отсюда становится понятно, почему результаты теории [10] совпадают с (2.6) и (1.9). Количественные оценки (4.5) и (6.4) для δ_* и Δ показывают, что изобразить конец трещины в районе действия сил сцепления в виде кривой линии в сплошной среде (это делается во многих работах по трещинам) невозможно, так как устье «клюва» $\delta_* \approx a$, а длина клюва $\lambda \approx 2a$.

Рассмотренное выше решение, в отличие от решения, полученного из критерия (2.1), будет не только необходимым, но и достаточным, так как в нем учитывается совместная работа всей системы атомов тела в окрестности трещины, причем принимается во внимание возможность выхода из строя части элементов этой системы, чему соответствует взаимодействие некоторых атомов по закону нисходящего участка кривой $T \sim \eta$. По существу в приведенном решении оценивается несущая способность тела, имеющего разрез, тогда как критерий (2.1) позволяет получить лишь условие выхода из строя наиболее слабых элементов системы, образуемой совокупностью атомов. То, что количественно оба решения оказываются весьма близкими, говорит о том, что в данной задаче необходимое условие прочности оказывается практически и достаточным. Предвидеть это заранее было невозможно. Если бы, например, формула (7.3) давала бы значение Δ порядка 10 a, то критическая длина трещины согласно достаточному критерию получилась бы в несколько раз больше, чем у Гриффитса.

8. В теории хрупкого разрушения тел, ослабленных разрезами, аппарат механики сплошной среды при дополнительных упрощениях, присущих линейной теории упругости, применяется к задачам, в которых:

закон Гука несправедлив, причем физическая нелинейность весьма существенна; деформации и углы поворота сравнимы с единицей;

размеры порядка атомного диаметра приходится считать конечными величинами.

Но даже не это будет главным источником погрешности в данной теории, а то, что в ней полностью пренебрегаются пластические деформации, неизбежно возникающие у концов трещины даже у весьма хрупких материалов.

Ввиду всего сказанного рассчитывать на количественную достоверность приведенных выше формул не приходится. Именно поэтому инженерная теория распространения трещин развивается преимущественно как феноменологическая теория. Рациональность данного направления наиболее четко обоснована в работах Г. Ирвина [11].

Однако интенсивно продолжаются и теоретические исследования, основывающиеся на идеализированных моделях и стремящиеся выявить связь между условиями распространения трещины и физическими константами, характеризующими материал тела. Польза таких исследований состоит в углублении представлений о сравнительной роли различных факторов, влияющих на поле напряжений в окрестности концов трещины и на условия ее распространения.

Изложенные в данной работе соображения проливают свет на некоторые особенности теории трещин-разрезов и позволяют сделать следующие выводы.

1. Формулу Гриффитса (1.9) можно вывести из решения классической теории упругости (2.2) и критерия прочности (1.2) при его естественном обобщении на случай больших градиентов напряжений (2.1);

2. Теория распространения трещин-разрезов (в любом ее варианте) не может обойтись без физической константы размерности длины. В случае хрупкого разрушения такой константой будет атомный радиус;

3. Из (3.5) вытекает, что формулу Гриффитса (1.9) можно рассматривать как результат, справедливый не только для трещин-разрезов, но и как приближенную формулу для трещин с конечными расстояниями между берегами при условии, что радиус конца трещины ρ является величиною порядка a.

4. Условие разрушения (2.1) не только необходимо, но и достаточно, судя по тому, что вытекающая из него картина межатомных сил в окрестности концов трещины совпадает с картиной, следующей из теории [10], дающей приближенную оценку несущей способности тела, ослабленного трещиной;

5. Трещины-разрезы могут быть интерпретированы как нетривиальные решения задачи о растяжении упругой плоскости, если связь между напряжениями и деформациями нелинейна, имея вид (6.1). При этом образование трещины оказывается явлением типа потери устойчивости в большом.

Поступила 14 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.
2. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc., London. ser. A, 1920, vol. 221, p. 163—198.
3. Ellioth H. A. An analysis of the conditions for rupture due to Griffith cracks. Proc. Phys. Soc., ser. A., 1947, vol. 59, No 232, p. 208—223.
4. Sneddon I. N. The distribution of stress in the neigborhood of a crack in elastic solids, Proc. Roy. Soc., ser A, 1946, vol. 187, No 1009.
5. Gilman J. J. Strength of ceramic crystals. Phys. and Chem. Ceram. New York — London, London and Breach, 1963.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 3, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.
7. Tetelman A. S., Mc Evily A. J. Fracture of structural materials. New York, Willey, 1967.
8. Cottrell A. H. Mechanical properties of matter. New York, Wiley, 1964.
9. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развиток найдрiбнiших трiщин в твердому тiлi. Прикладна механiка, 1959, № 4.
10. Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения. ПМТФ, 1961, № 3.
11. Irwin G. K., Fracture. Handbuch der Physik, Bd. 6, Springer, Berlin, 1958.