Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С КВАЗИЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ПРОВОДНИКОВ С ТОКАМИ

К. Ш. Ходжаев

(Ленинград)

Рассматриваются системы с квазициклическими координатами. Анализируются движения, в которых скорости, импульсы и позиционные (но не квазициклические) координаты — периодические функции времени. Предполагается, что квазициклическим координатам отвечают обобщенные силы двух родов: 1) зависящие только от времени, 2) пропорциональные квазициклическим обобщенным скоростям. Силы второго рода считаются малыми.

Показано, что при определенных требованиях к непотенциальным силам по позиционным координатам в устойчивых движениях квазициклические импульсы имеют (с точностью до малых величин) средние значения, сообщающие минимум некоторой функции этих средних значений Λ. Последняя может быть выражена через кинетический потенциал Рауса системы, через вириал сил воздействия квазициклической подсистемы на позиционную и т. п. Это дает различные варианты интегрального критерия устойчивости.

В применении к задаче о колебаниях линейных проводников с токами критерий позволяет связать средние за период значения магнитных потоков с условиями экстремума комбинации осредненных значений энергии магнитного поля, энергии подмагничивания и механического кинетического потенциала (или вириала пондеромоторных сил).

Особо рассмотрен случай, когда уравнения Рауса линейны по позиционным координатам. При этом в связи с задачами о возбуждении колебаний [1,2] проанализирована возможность представления условий существования и устойчивости через гармонические коэффициенты влияния колебательной системы и приведены специфические выражения для функции Λ.

Рассмотренные системы составляют, таким образом, второй класс систем, допускающих интегральный критерий. Ранее, в основном И. И. Блехманом и его последователями [3-5], рассматривались системы синхронизирующихся объектов со слабыми связями. Различия между этими двумя классами связаны с видом лагранжиана и обобщенных сил и предположениями о малости. Различны поэтому и формулировки критериев. В частности, системы с квазициклическими координатами в отличие от синхронизирующихся систем могут допускать интегральный критерий при существенной диссипации по позиционным координатам.

§ 1. Периодические движения в системе с квазициклическими[1] координатами. Интегральный критерий устойчивости. Пусть дана система с голономными стационарными связями, описываемая m-квазициклическими $(q_1,\ldots,q_m)$ и $n-m$-позиционными $(q_{m+1},\ldots,q_n)$ координатами, и пусть

[1] В соответствии с [6], гл. 7, п. 19 координаты называем квазициклическими, если они не входят в выражения для кинетической энергии и обобщенных сил, а отвечающие им обобщенные силы отличны от нуля.

квазициклическим координатам отвечают обобщенные силы двух родов: 1) зависящие только от времени, 2) пропорциональные квазициклическим обобщенным скоростям. Ограничимся случаем, когда силы первого рода $2\pi / \omega$-периодические, а силы второго рода малы. Рассмотрим движения, в которых все обобщенные скорости, импульсы и позиционные (но не квазициклические) координаты суть $2\pi / \omega$-периодические функции времени. Уравнения движения будут

$$p_r^{\cdot} + \mu h_r q_r^{\cdot} = U_r(t) + \mu f_r \qquad (r = 1, \ldots, m)$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_{m+r}^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_{m+r}} = Q_{m+r} \qquad (r = 1, \ldots, n-m) \tag{1.1}$$
$$L = T(q_{m+1}, \ldots, q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}) - \Pi(q_{m+1}, \ldots, q_n)$$

Здесь L — кинетический потенциал системы, p_r $(r = 1,\ldots,m)$ — квазициклические импульсы, μ — малый параметр, $Q_{m+r}(q_{m+1},\ldots,q_n, q_1^{\cdot},\ldots, q_n^{\cdot})$ — непотенциальные обобщенные силы, отвечающие позиционным координатам.

Наиболее интересен случай, когда «квазициклические» обобщенные силы второго рода суть силы вязкого трения и $\mu h_r > 0$. Более общий случай, когда эти силы задаются диссипативной функцией вида

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{r,\, s=1}^{m} h_{rs} q_r^{\cdot} q_s^{\cdot} \tag{1.2}$$

с положительно определенной формой в правой части, сводится, очевидно, к предыдущему линейной заменой только квазициклических координат.

При достаточно малых μ система (1.1) может иметь решения указанного выше вида, обращающиеся при $\mu = 0$ в решения соответствующей порождающей системы, лишь при условии

$$\langle U_r(t)\rangle = 0, \qquad \langle\cdot\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \cdot\, dt \tag{1.3}$$

которое и принимается далее; f_r в (1.1) можно, не уменьшая общности, считать постоянными.

Если из линейных алгебраических уравнений относительно $q_r^{\cdot}$ $(r = 1,\ldots,m)$

$$p_r = \partial T / \partial q_r^{\cdot} \tag{1.4}$$

найти

$$q_r^{\cdot} = g_r(p_1, \ldots, p_m, q_{m+1}, \ldots, q_n, q_{m+1}^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}) \tag{1.5}$$

и составить кинетический потенциал Рауса

$$L_R = \Big[T - \sum_{r=1}^{m} p_r q_r^{\cdot}\Big]_{q_r^{\cdot} = g_r} - \Pi \tag{1.6}$$

то, сделав в Q_{m+r} замену q_r согласно (1.5), уравнения движения можно записать в форме

$$\begin{aligned} & p_r^{\cdot} - \mu h_r \frac{\partial L_R}{\partial p_r} = U_r(t) + \mu f_r \qquad (r = 1, \ldots, m) \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial L_R}{\partial \dot{q}_{m+r}} - \frac{\partial L_R}{\partial q_{m+r}} = Q_{m+r} \qquad (r = 1, \ldots, n-m) \end{aligned} \tag{1.7}$$

В (1.7) входят только позиционные координаты, квазициклические импульсы и их производные. При $\mu = 0$ из (1.7) выделяется система m уравнений относительно квазициклических импульсов

$$p_{r0}^{\cdot} = U_r(t) \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.8}$$

допускающая семейство $2\pi / \omega$-периодических решений

$$p_{r0} = \alpha_r + V_r(t) \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.9}$$

с m произвольными постоянными $\alpha_1, \ldots \alpha_m$. В (1.9)

$$V_r^{\cdot} = U_r, \qquad \langle V_r \rangle = 0 \tag{1.10}$$

Считаем, что уравнения

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L_R}{\partial \dot{q}_{m+r}} - \frac{\partial L_R}{\partial q_{m+r}} - Q_{m+r}\right]_{p_r = p_{r0}} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n-m) \tag{1.11}$$

при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из некоторой области допускают устойчивое $2\pi / \omega$-периодическое изолированное решение (т. е. такое, в которое не входит новых постоянных)

$$q_{r+m} = q_{r+m0}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \qquad (r = 1, \ldots, n-m) \tag{1.12}$$

Тогда уравнения для определения параметров порождающего решения будут

$$P_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = -\left\langle \frac{\partial L_R}{\partial p_r} \right\rangle_0 - e_r = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.13}$$

Отвечающий при достаточно малых μ решению $\alpha_1 = \alpha_1^*, \ldots, \alpha_m = \alpha_m^*$ системы (1.13) режим устойчив, если корни $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ уравнения

$$det \left\| \left(\frac{\partial P_r}{\partial \alpha_s}\right)_* + \lambda \varkappa_r \delta_{rs} \right\| = 0 \tag{1.14}$$

при $\mu > 0$ имеют отрицательные, а при $\mu < 0$ — положительные вещественные части. Считается, что $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*$ принадлежат области, где существует (1.12).

В (1.13), (1.14) и далее индекс нуль означает подстановку $p_r = p_{r0}$, $q_{r+m} = q_{r+m0}$; звездочка — подстановку $\alpha_1 = \alpha^*_1, \ldots, \alpha_m = \alpha^*_m$; $e_r = f_r / h_r$, $\varkappa_r = 1 / h_r$, δ_{rs} — символ Кронекера.

Выясним, когда выполняются соотношения

$$P_r = -\frac{\partial}{\partial \alpha_r}\left[\langle L_R \rangle_0 + \sum_{r=1}^{m} e_r \alpha_r\right] \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.15}$$

После интегрирования по частям получим

$$\left\langle \frac{\partial L_R}{\partial p_r} \right\rangle_0 = \frac{\partial}{\partial \alpha_r}\langle L_R \rangle_0 + \sum_{s=1}^{n-m} \left\langle \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L_R}{\partial \dot{q}_{m+s}} - \frac{\partial L_R}{\partial q_{m+s}}\right]_0 \frac{\partial q_{m+s0}}{\partial \alpha_r} \right\rangle \tag{1.16}$$

Из (1.7) следует, что соотношения (1.15) справедливы при условии

$$\sum_{s=1}^{n-m} \left\langle Q_{m+s0} \frac{\partial q_{m+s0}}{\partial \alpha_r} \right\rangle = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.17}$$

Если равенства (1.17) выполняются, то матрица $\| \partial P_r / \partial \alpha_s \|$ симметрична. Ограничимся случаем, когда квазициклические обобщения силы второго рода суть силы вязкого трения. При этом можно считать $\mu > 0$, $h_r > 0$ $(r = 1,..,m)$. Используем следующий факт.

Пусть $N \times N$ матрицы A и B симметричные и B — положительно определенная. Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N$ и $\lambda_1' \leqslant \lambda_2' \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N'$ — корни уравнений $|A - \lambda E| = 0$ и $|A - \lambda' B| = 0$ соответственно; E — единичная $N \times N$ матрица. Тогда величины λ_i и λ_i' — одного знака.

Так как все $\varkappa_r > 0$, то матрица $\operatorname{diag}(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m)$ — положительно определенная, и в случае симметричной $\| \partial P_r / \partial \alpha_s \|$ об устойчивости можно судить по знакам корней $\lambda_1',\ldots,\lambda_m'$ уравнения

$$\det \| (\partial P_r / \partial \alpha_s)_* + \lambda' \delta_{rs} \| = 0 \tag{1.18}$$

При этом точка $(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_m^*)$ — стационарная точка функции

$$\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = - \langle L_R \rangle_0 - \sum_{r=1}^{m} e_r \alpha_r \tag{1.19}$$

и отвечающий значениям $\alpha_1 = \alpha_1^*,\ldots,\alpha_m = \alpha_m^*$ режим устойчив, если данная точка — минимум.

Последнее утверждение дает формулировку интегрального критерия устойчивости для систем рассматриваемого класса. Критерий обязательно справедлив, если все обобщенные силы по позиционным координатам потенциальные. Существенно, однако, что интегральный критерий возможен и при наличии непотенциальных обобщенных сил Q_{m+s}.

Пусть, например, Q_{m+s} выражаются линейными формами позиционных скоростей

$$Q_{m+s} = \sum_{r=1}^{n-m} b_{rs} \dot{q}_{m+r} \qquad (s = 1,\ldots, n - m) \tag{1.20}$$

а q_{m+s0} представляются рядами вида

$$q_{m+s0}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{\nu} q_{m+s0}^{(\nu)} (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \cos(\nu\omega t - \varphi_\nu) \tag{1.21}$$

Здесь фазовые сдвиги φ_ν гармоник (компонент) q_{m+s0} не зависят от $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и одинаковы для всех $q_{m+10}, \ldots, q_{n0}$. Тогда

$$\sum_{s=1}^{n-m} \left\langle Q_{m+s0} \frac{\partial q_{m+s0}}{\partial \alpha_r} \right\rangle = \sum_{s=1}^{n-m} \sum_{l=1}^{n-m} b_{ls} \left\langle - \sum_{\nu} \nu\omega q_{m+l0}^{(\nu)} \times \right.$$

$$\left. \times \sin(\nu\omega t - \varphi_\nu) \sum_{\nu} \frac{\partial q_{m+s0}^{(\nu)}}{\partial \alpha_r} \cos(\nu\omega t - \varphi_\nu) \right\rangle = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n - m) \tag{1.22}$$

Функции с одинаковыми фазовыми сдвигами компонент в их Фурье-разложениях назовем покомпонентно синфазными, а условия $\varphi_{m+10}^{(\nu)} = \ldots = \varphi_{n0}^{(\nu)} = \varphi_\nu$ — условиями покомпонентной синфазности. Для существования интегрального критерия в случае, когда Q_{m+s} — линейные формы $\dot q_{m+1}, \ldots, \dot q_n$, достаточно, чтобы фазовые сдвиги в разложениях позиционных координат, подсчитанных по порождающему приближению, не зависели от параметров порождающего решения, и эти координаты удовлетворяли условиям покомпонентной синфазности. Так как при этом не накладывается никаких ограничений на свойства матрицы $\|b_{rs}\|$, то интегральный критерий существует, в частности, если Q_{m+s} — силы вязкого трения.

Указанный случай не имеет аналога в задачах о синхронизации, так как там $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ суть фазовые сдвиги координат объектов [3-5]; входящие в решение в сочетаниях $\omega t+\alpha_r$, $\varphi_{m+r0}^{(v)}$ при этом обязательно зависят от $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и интегральный критерий возможен лишь при отсутствии диссипации в несущей (колебательной) системе [3-5].

Равенство

$$L_R = T_2 - \Pi - T_1 = L_2 - T_1 \tag{1.23}$$

где T_1 и T_2 определяются выражениями

$$T = T_1 + T_2 + U \tag{1.24}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{r,\, s=1}^{m} A_{rs} \dot q_r \dot q_s,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{r,\, s=1}^{n-m} A_{m+r\, m+s} \dot q_{m+r} \dot q_{m+s}, \qquad U = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n-m} A_{r\, m+s} \dot q_r \dot q_{m+s}$$

позволяет несколько конкретизировать вид функции Λ

$$\Lambda = \langle T_1 \rangle_0 - \langle L_2 \rangle_0 - 2A, \qquad A = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} e_r \alpha_r \tag{1.25}$$

Тот же вид функция Λ сохранит и в случае, когда левые части в (1.17) суть величины b_r, не зависящие от $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. При этом в (1.25) нужно лишь заменить e_r на $e_r - b_r$ (см. § 3).

Сделаем два замечания, связанных, в частности, с приложениями к задачам о возбуждении механических колебаний. Порождающее приближение и формулировка интегрального критерия не изменяются при добавлении любых членов вида $\mu\,(\ \ )\cdot$ в первые m уравнений (1.1) и любых членов порядка μ в последние $n-m$ уравнений. Вид $\langle L_R \rangle_0$ как функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ не изменяется также при появлении новых степеней свободы, отвечающих группе координат $q_{n+1}, \ldots, q_{n+l}$ таких, что выражение для кинетической энергии приобретают вид

$$T = T_1 + T_2 + U + T_*, \qquad T_* = T_*(q_{n+1}, \ldots, q_{n+l}, \dot q_{n+1}, \ldots, \dot q_{n+l})$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{r,\, s=1}^{m} A_{rs} \dot\eta_r \dot\eta_s, \qquad U = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n-m} A_{r\, m+s} \dot\eta_r \dot q_{m+s} \tag{1.26}$$

Коэффициенты форм T_1 и U зависят только от $q_{m+1}, \ldots, q_n$; T_2 берется из (1.24)

$$\eta_r = q_r + \sum_{i=1}^{l} w_{ri} q_{n+i} \qquad (w_{ri} = \mathrm{const}) \tag{1.27}$$

Предполагается, что обобщенные силы по $q_{n+1},\ldots,q_{n+l}$ не зависят от остальных обобщенных координат и скоростей; и силы $2\pi / \omega$ — периодические по явно входящему времени.

Чтобы выяснить вид уравнений Рауса в данном случае, представим выражение для кинетической энергии в форме

$$T = T_1^{(1)} + U_{1*} + T_{1*} + U^{(1)} + U_* + T_* + T_2 \tag{1.28}$$

Здесь

$$T_1^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{m} A_{rs} q_r^{\cdot} q_s^{\cdot}, \qquad U^{(1)} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n-m} A_{r,\,m+s} q_r^{\cdot} q_{m+s}^{\cdot}$$

$$U_{1*} = \sum_{r,\,s=1}^{m} A_{rs} q_r^{\cdot} q_{s*}^{\cdot}, \qquad U_* = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n-m} A_{r,\,m+s} q_{r*}^{\cdot} q_{m+s}^{\cdot}$$

$$T_{1*} = \frac{1}{2} \sum_{r,\,s=1}^{m} A_{rs} q_{r*}^{\cdot} q_{s*}^{\cdot}, \qquad q_{r*} = \eta_r - q_r \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.29}$$

Имеем

$$q_r^{\cdot} = g_r - q_{r*}^{\cdot} \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.30}$$

где g_r — функции $p_1,\ldots, p_m$, $q_{m+1},\ldots,q_n$, $q^{\cdot}_{m+1},\ldots,q^{\cdot}_n$, определяемые равенствами (1.5). Вид функций g_r остается тем же, каким он был для системы без дополнительных координат.

Выражение для кинетического потенциала Рауса будет

$$L_R = -T_1^{(1)} + T_{1*} + U_* + T_* + T_2 - \Pi \tag{1.31}$$

причем $q^{\cdot}_r$ $(r = 1,\ldots,m)$ в $T_1^{(1)}$ должны быть заменены согласно (1.30). Выполнив это и используя тождество

$$\sum_{r,\,s=1}^{m} A_{rs} g_s q_{r*}^{\cdot} + \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n-m} A_{rm+s} q_{r*}^{\cdot} q_{m+s}^{\cdot} = \sum_{r=1}^{m} p_r q_{r*}^{\cdot} \tag{1.32}$$

получим

$$L_R = L_R^{(0)} + \sum_{r=1}^{m} p_r q_{r*}^{\cdot} + T_* \tag{1.33}$$

где $L^{(0)}_R$ —кинетический потенциал Рауса для системы без дополнительных координат. Порождающие уравнения для $p_1,\ldots,p_m$, q_{m+1}, $\ldots,q_n$, получаемые из (1.7), имеют, таким образом, тот же вид и те же решения, что и для системы без дополнительных координат. Уравнения же, отвечающие дополнительным координатам, будут

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_*}{\partial q_{n+i}^{\cdot}} - \frac{\partial T_*}{\partial q_{n+i}} = - \sum_{r=1}^{m} w_{ri} p_r^{\cdot} + Q_{n+i} \qquad (i = 1, \ldots, l) \tag{1.34}$$

(их можно было выписать сразу как уравнения Лагранжа). В порождающем приближении система (1.34) не содержит $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$. Считаем, что при замене $p^{\bullet}_r = U_r$ эта система допускает изолированное устойчивое решение, в котором $q^{\cdot}_{n+10},\ldots,q^{\cdot}_{n+l0}$ суть $2\pi/\omega$ — периодические функции времени. Тогда уравнения для определения $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ и условия устойчивости будут отличаться от имевшихся в системе без дополнительных координат лишь значениями e_r, которые заменятся на

$$e_r^* = e_r + \sum_{i=1}^{l} w_{ri} \langle \dot{q}_{n+i0} \rangle \tag{1.35}$$

Хотя T_1 лишь знакопостоянная форма квазициклических и дополнительных скоростей, последнее замечание имеет физический смысл (см. § 2).

Указанные выше результаты распространяются также на ротационные движения, когда для некоторых из позиционных координат $q_{m+s} = \omega t + 2\pi / \omega$-периодическая функция; функции T, П и Q_{m+s} должны быть при этом $2\pi/\omega$-периодическими по соответствующим q_{m+s} или содержать только их разности $q_{m+r} - q_{m+s}$.

Рассмотрим еще случай, когда L_2 отвечает линейной системе. Уравнения Рауса по позиционным координатам будут

$$M u^{\cdot\cdot} + C u = Q + F, \qquad F = -\frac{\partial T_1}{\partial u} \tag{1.36}$$

Здесь $u = (q_{m+1}, \ldots, q_n)$, $Q = (Q_{m+1}, \ldots, Q_n)$, M, C — симметричные $(n - m) \times (n - m)$ матрицы с постоянными компонентами. Обозначая скобками скалярные произведения, имеем

$$L_2 = {}^1/_2 \, (M u^{\cdot}, \, u^{\cdot}) \; - {}^1/_2 \, (C u, \, u) \tag{1.37}$$

Умножим обе части уравнения (1.36), записанного в порождающем приближении, на $\partial u_0 / \partial \alpha_r$ скалярно и осредним за период. При условии, что выполняется (1.17), получим

$$\left\langle \left(M u_0^{\cdot\cdot}, \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_r} \right) \right\rangle + \left\langle \left(C u_0, \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_r} \right) \right\rangle = \left\langle \left(F_0, \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_r} \right) \right\rangle \tag{1.38}$$

Дифференцируя же обе части того же уравнения по α_r, умножая на u_0 скалярно и осредняя, находим

$$\left\langle \left(M \frac{\partial u_0^{\cdot\cdot}}{\partial \alpha_r}, u_0 \right) \right\rangle + \left\langle \left(C \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_r}, u_0 \right) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial Q_0}{\partial \alpha_r}, u_0 \right) \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial F_0}{\partial \alpha_r}, u_0 \right) \right\rangle \tag{1.39}$$

Так как матрицы M и C симметричны, то после интегрирования в первых членах (1.38) и (1.39) по частям приходим к равенствам

$$\left\langle \left(F_0, \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_r} \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \langle (Q_0, u_0) \rangle + \left\langle \left(\frac{\partial F_0}{\partial \alpha_r}, u_0 \right) \right\rangle - \\ - \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \langle L_2 \rangle_0 = \left\langle \left(F_0, \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_r} \right) \right\rangle \tag{1.40}$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_r} \langle L_2 \rangle_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (W_{Q_0} + W_{F_0}) \tag{1.41}$$

где W_Q и W_F — вириалы непотенциальных сил, отвечающих позиционным координатам, и сил воздействия «квазициклической подсистемы» на «позиционную» (колебательную), определяемые равенствами

$$W_Q = -\langle (Q, u) \rangle, \qquad W_F = - \langle (F, u) \rangle \tag{1.42}$$

Соотношения (1.41) позволяют в данном случае исключить $\langle L_2 \rangle_0$ из выражения для Λ

$$\Lambda = \langle T_1 \rangle_0 - {}^1/_2 W_{Q_0} - {}^1/_2 W_{F_0} - 2A \tag{1.43}$$

Если $Q_{m+1},\ldots,Q_n$ — линейные формы $q^{\cdot}_{m+1},\ldots,q^{\cdot}_n$, а $q_{m+10},\ldots,q_{n0}$ — покомпонентно синфазные с не зависящими от $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ фазами, то $W_{Q0} = 0$, (1.17) выполнено и

$$\Lambda = \langle T_1\rangle_0 - {}^1/_2 W_{F_0} - 2A \tag{1.44}$$

Равенства $W_{Q_0} = 0$ и (1.17) справедливы и в некоторых других случаях (см. § 3). Возможные при этом представления функции Λ в виде (1.44) в задачах о возбуждении колебаний дают следующее. Пусть u и $q_1,\ldots,q_m$ — координаты колебательной системы и возбудителей [1, 2]. Имеем в (1.24)

$$T_1 = T_1(\xi,\ q^{\cdot}_1,\ldots,q^{\cdot}_m), \qquad U = U(\xi,\ \xi^{\cdot},\ q^{\cdot}_1,\ldots,q^{\cdot}_m)$$

$$\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_k), \qquad \xi_j = (u,\ v_j) \qquad (j=1,\ldots,k) \tag{1.45}$$

Здесь $\xi_1,\ldots,\xi_k$ — параметры обратного влияния [1,2], v_j — постоянные $(n-m)$-векторы. При этом вид функций T_1 и U не зависит от вида колебательной системы [1] (т. е. числа ее степеней свободы, способа введения координат u и т. д.; данные факторы определяют лишь вид v_j). Это дает

$$F = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \xi_j^{\cdot}} - \frac{\partial T_1}{\partial \xi_j}\right)v_j, \qquad T_1 = T_1(\xi,\ \xi^{\cdot},\ p_1,\ldots,p_m)$$

$$W_F = \left\langle -\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \xi_j^{\cdot}} - \frac{\partial T_1}{\partial \xi_j}\right)\xi_j\right\rangle \tag{1.46}$$

В данном случае, следовательно, при определении Λ согласно (1.44) вид осредняемых функций от ξ, $\xi^{\cdot}$, $p_1,\ldots,p_m$ не будет зависеть от вида колебательной системы.

§ 2. Энергетические соотношения при колебаниях проводников с токами. Пусть дана система тела, включающая m линейных проводников, к которым приложены заданные внешние $2\pi/\omega$ - периодические э.д.с. Рассмотрим случай, когда можно пренебречь энергией электрического поля вне проводников, а магнитное поле — считать квазистационарным [7] при частотах $\omega,\ldots,\nu_*\omega$, где ν_* достаточно велико. (Вообще же последующее справедливо лишь с точностью до высокочастотных «хвостов» искомых функций, начиная с некоторой гармоники $\nu_* + 1$. Это связано также с тем, что не учитываются динамические эффекты в веществе и т. п.) Связь между **B** и **H** в веществе считаем линейной, а активные сопротивления проводников — малыми по сравнению с индуктивными на частоте ω.

При линейной связи между **B** и **H** уравнения, описывающие систему, можно составлять как уравнения Лагранжа, добавляя к кинетической энергии зависящую от токов часть полной свободной энергии (энергию магнитного поля) W

$$W = \frac{1}{2}\sum_{r,\,s=1}^{m} L_{rs}{}^* i_r i_s \tag{2.1}$$

Здесь $L_{rr}^* = L_{rr}^*\,(q_{m+1},\ldots,q_n)$, $L_{rs}^* = L_{rs}^*\,(q_{m+1},\ldots,q_n)$ — коэффициенты само- и взаимной индукции, $i_r = q_r^{\cdot}$ $(r = 1,\ldots,m)$ — токи в проводниках, $q_{m+1},\ldots,q_n$ — механические обобщенные координаты. Координаты (заряды) q_r — квазициклические.

Уравнения движения будут

$$\Phi_r^{\cdot} + \mu R_r i_r = U_r(t) + \mu f_r \qquad (r = 1,\ldots,m)$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot q_{m+r}} - \frac{\partial L_2}{\partial q_{m+r}} = Q_{m+r} + F_{m+r} \qquad (r = 1,\ldots,n-m) \tag{2.2}$$

Здесь введены обозначения для пондеромоторных сил

$$F_{m+r} = \frac{\partial}{\partial q_{m+r}} W(i_1,\ldots,i_m,q_{m+1},\ldots,q_n) \tag{2.3}$$

и потоков магнитной индукции через контуры проводников

$$\Phi_r = \frac{\partial}{\partial i_r} W(i_1,\ldots,i_m,q_{m+1},\ldots,q_n) \tag{2.4}$$

В (2.2) μR_r— активные сопротивления проводников, U_r и $\mu\, f_r$ — переменные и постоянные части внешних э.д.с. соответственно (последние должны быть малы, чтобы не иметь токов $i = O\,(1/\mu)$ в установившемся режиме).

Параметры порождающего решения $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ здесь имеют смысл постоянных составляющих магнитных потоков, подсчитанных с точностью до малых членов

$$\Phi_{r0} = \alpha_r + V_r(t) \qquad (r = 1,\ldots,m) \tag{2.5}$$

Величина

$$2A = \sum_{r=1}^{m} e_r\alpha_r, \qquad e_r = \frac{f_r}{R_r} \tag{2.6}$$

называется в данном случае энергией подмагничивания и имеет следующий смысл. Пусть все $U_r = 0$, а r-й контур пронизывается постоянным потоком α_r. Тогда ток в r-м контуре будет $i_r = e_r$, а энергия этой системы постоянных токов (токов подмагничивания) в данном поле равна $2A$ (поле здесь рассматривается как внешнее по отношению к токам; см. [7], гл. IV, § 32, 32.14).

Соотношение (1.25) позволяет сформулировать следующее утверждение: если в системе нет непотенциальных механических сил или если эти силы удовлетворяют условиям (1.17), то в устойчивом периодическом движении [1] постоянные составляющие магнитных потоков (с точностью до малых величин) имеют значения, сообщающие минимум функции этих составляющих, равной среднему за период значению энергии магнитного поля, из которого вычтены среднее за период значение механического кинетического потенциала и энергия подмагничивания.

В случае, когда L_2 отвечает линейной колебательной системе, в интегральном критерии механический кинетический потенциал может быть

[1] точнее — в движении, существующем при достаточно малых μ и описываемом решением, обращающимся при $\mu = 0$ в соответствующее решение порождающей системы; кроме того, в этих движениях периодические только токи и перемещения, но не заряды.

заменен согласно (1.43) на полусумму вириалов непотенциальных механических и пондеромоторных сил.

Предположим еще, что вблизи указанных проводников расположены другие линейные проводники так, что если некоторая линия магнитной индукции охватывает «первоначальный» проводник, то она охватывает и всю расположенную вблизи него группу дополнительных проводников. Считаем, что сопротивления дополнительных проводников не малы (иначе токи были бы $i = O(1/\mu)$). Тогда заряды, переносимые через сечения дополнительных проводников, будут дополнительными координатами согласно § 1. Величины η_r будут

$$\eta_r = q_r + \sum_{j=1}^{l_r} w_{rj} q_j^{(r)} \qquad (2.7)$$

Здесь l_r — число дополнительных проводников, расположенных вблизи r-го первоначального, $l_1 + \ldots + l_m = l$, $q_j^{(r)}$ — заряд, прошедший через сечение j-го проводника r-й группы, w_{rj} — рациональные числа, определяемые так. Пусть контур r = го первоначального проводника $n_1^{(r)}$ раз повторяет некоторую линию, а контур $j^{(r)}$-го проводника — $n_j^{(r)}$ раз. Тогда $w_{rj} = n_j^{(r)} / n_1^{(r)}$. (Практически $n_j^{(r)}$ —число витков.)

Влияние дополнительных проводников на движение системы независимо от способа их соединения одного с другим, подведенных к ним э.д.с. типа подключенных к ним элементов (катушек, конденсаторов, выпрямителей и т. п.) сказывается только через величины e_r^*, которые заменяют e_r в (2.6)

$$e_r^* = e_r + \sum_{j=1}^{l_r} w_{rj} \langle i_{j0}^{(r)} \rangle, \qquad i_j^{(r)} - (q_j^{(r)}). \qquad (2.8)$$

Так как всегда существуют линии индукции, охватывающие первоначальный контур, но не охватывающие дополнительные, то указанный вывод справедлив лишь при условии, что «разницу» можно описать членами порядка μ в выражении для W. В первые m уравнений (2.2) добавятся тогда члены вида $\mu\ (\quad)^{\cdot}$ и независимо от вида добавки в уравнения для механических координат порождающее решение не изменится.

§ 3. Случай уравнений Рауса, линейных по позиционным координатам. Даже если L_2 отвечает линейной системе, уравнения для определения позиционных координат в порождающем приближении будут, вообще говоря, нелинейны в силу зависимости воздействий F от позиционных координат. Имеются, однако, два случая, когда получаются линейные уравнения. Структура функции Рауса $R = L_R + \Pi$ при стационарных связях такова [6]:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n-m} (A_{m+rm+s} + N_{m+rm+s}) \dot{q}_{m+r} \dot{q}_{m+s} + $$
$$+ \sum_{r=1}^{n-m} \sum_{s=1}^{m} N_{m+rs} p_s \dot{q}_{m+r} - \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{m} A^{(rs)} p_r p_s \qquad (3.1)$$
$$(\|A^{rs}\| = \|A_{rs}\|^{-1})$$

Выражения для сил воздействия квазициклической подсистемы на позиционную будут

$$F_{m+r} = -\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n-m} N_{m+rm+s}\dot{q}_{m+s} + \frac{1}{2}\sum_{i,s=1}^{n-m}\frac{\partial_{m+im+s}}{\partial q_{m+r}}\dot{q}_{m+i}\dot{q}_{m+s} -$$

$$-\sum_{s=1}^{m} p_s \sum_{i=1}^{n-m}\dot{q}_{m+i}\left(\frac{\partial N_{m+rs}}{\partial q_{m+i}} - \frac{\partial N_{m+is}}{\partial q_{m+r}}\right) - \sum_{s=1}^{m} N_{m+rs}\dot{p}_s - \frac{1}{2}\sum_{i,s=1}^{m}\frac{\partial A^{(is)}}{\partial q_{m+r}} p_i p_s$$

$$(r = 1, \ldots, n-m) \tag{3.2}$$

Имея в виду получить в порождающем приближении линейные уравнения для позиционных координат, будем считать непотенциальные силы по позиционным координатам линейными формами $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$ с постоянными коэффициентами. Из (3.2) следует, что здесь возможны два случая.

1. *Квазигармоническая порождающая система.* Квазигармонические уравнения (т. е. линейные уравнения с периодическими коэффициентами) получатся, если $N_{m+rm+s} = \mathrm{const}$ $(r,\ s = 1, \ldots,\ n-m)$, N_{m+rs} $(r = 1, \ldots,$ $n-m;\ s = 1, \ldots, m)$ — суммы постоянных величин и линейных форм, а $A^{(rs)}$ $(r,\ s = 1, \ldots, m)$ — суммы постоянных величин, линейных и квадратичных форм позиционных координат. При этом постоянные слагаемые в $A^{(rs)}$ не влияют на вид F_r, а второй член правой части (3.2) исчезает. Система порождающих уравнений будет неоднородной, если выполняется хотя бы одно из двух: 1) N_{m+rs} содержат постоянные слагаемые, 2) $A^{(rs)}$ содержат линейные члены, и однородный, если все N_{m+rs} линейные формы, а $A^{(rs)}$ имеют вид: постоянная $+$ квадратичная форма.

Отметим здесь один специфический подслучай. Пусть в выражении кинетической энергии отсутствуют произведения квазициклических и позиционных скоростей ($U = 0$). Тогда все $N_{m+rs} = 0$, $N_{m+rm+s} = 0$. Пусть к тому же $A^{(rs)}$ не содержат линейных членов. Разбив T_1 на энергию квазициклической подсистемы при заторможенной позиционной T_1^* и «дополнительную энергию» ΔT_1

$$T_1 = T_1^* + \Delta T_1,\quad T_1^* = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{m} A_*^{(rs)} p_r p_s,\quad \Delta T_1 = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{m}\Delta A^{(rs)} p_r p_s \tag{3.3}$$

где $\Delta A^{(rs)}$ — квадратичные формы q_{m+r}, получим

$$\tfrac{1}{2} W_F = \Delta T_1 \tag{3.4}$$

Функция Λ при этом имеет вид

$$\Lambda = \langle T_1^*\rangle_0 - \tfrac{1}{2} W_{Q_0} - 2.4 \tag{3.5}$$

Если к тому же $W_{Q0} = 0$, то функция Λ будет иметь тот же вид, какой она имеет при $q_{m+1}, \ldots, q_n \equiv 0$, т. е. при заторможенной позиционной подсистеме. В этом случае, следовательно, позиционная подсистема с точностью до малых членов не влияет на движение квазициклической (но движения позиционной подсистемы существенно зависят от квазициклической). В задачах о возбуждении колебаний это означает, что обратное влияние колебаний на возбудитель несущественно, несмотря на наличие семейства порождающих решений и существенность малых членов, зависящих от позиционных координат.

Если $T_1^* = 0$ и хотя бы одно $f_r \neq 0$, то в данном случае вообще нет решений рассматриваемого типа. Если же все $f_r = 0$, то приходим к особому случаю метода малого параметра ($P_r \equiv 0$), в котором требуется рассматривать члены порядка μ^2 в искомых решениях.

2. *Порождающая система с постоянными коэффициентами.* Уравнения с постоянными коэффициентами получаются, если $N_{m+rs} = \mathrm{const}$, $N_{m+rm+s} = \mathrm{const}$, а $A^{(rs)}$ — линейные формы позиционных координат. Позиционные координаты в порождающем приближении определяются в этом случае из решения задачи о вынужденных колебаниях линейной системы под действием сил, выражаемых известными функциями времени и параметров $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$.

Эта система, однако, отлична от первоначальной колебательной системы (с кинетическим потенциалом L_2) за счет членов $N_{m+rm+s}q_m^{\cdot\cdot}{}_{+r}$. Воздействие квазициклической подсистемы на позиционную с точностью до малых величин состоит, таким образом, в том, что она, во-первых, создает $2\pi/\omega$-периодические вынуждающие силы, и, во-вторых, «изменяет» массы колебательной системы. Но изменение жесткостей и гироскопические силы в колебательной системе в данном случае не возникают.

Для задач о возбуждении механических колебаний наиболее интересен случай, когда $U = 0$ и в порождающем приближении имеем задачу о вынужденных колебаниях первоначальной колебательной системы. Если при этом выражение для T_1 можно записать так, чтобы оно содержало параметры обратного влияния (т. е. в форме, инвариантной относительно вида колебательной системы [1,2]), то уравнения для определения параметров порождающего решения и условия устойчивости можно, соответственно, записать так, чтобы они содержали как параметры гармонические коэффициенты влияния колебательной системы. Если для некоторого возбудителя это выполнено, то для определения колебаний, возбуждаемых им в любой линейной механической системе, нужно только найти для нее коэффициенты влияния и воспользоваться указанными соотношениями. Далее определяется вид функций P_r и Λ в таких случаях.

Выражение для кинетического потенциала Рауса будет [1]

$$L_R = L_2 - \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{m}\left[A_{*}^{(rs)} + \sum_{j=1}^{k}\Delta A_j^{(rs)}\xi_j\right]p_r p_s = L_2 - T_1^* - \Delta T_1 \tag{3.6}$$

Этому отвечает выражение для вынуждающих сил

$$F = \sum_{j=1}^{k} F_j v_j, \qquad F_j = -\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{m}\Delta A_j^{(rs)} p_r p_s \tag{3.7}$$

Обозначения в (3.6) и (3.7) соответствуют (1.45) и (1.46); число параметров обратного влияния k и коэффициенты $A^{(rs)}$ и $\Delta A_j^{(rs)}$ определяются только свойствами возбудителя.

Вынуждающие силы, подсчитанные в порождающем приближении, будут функциями только параметров порождающего решения $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ и времени. Они определяются подстановкой (1.9) в (3.7)

$$F_{j0} = -\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{m}\Delta A_j^{(rs)}(\alpha_r\alpha_s + 2\alpha_r V_s + V_r V_s) \tag{3.8}$$

---

[1] В ряде случаев вид L_R' отличается от принятого малыми членами, дающими несущественные добавки порядка μ в уравнения движения колебательной системы. Кроме того, член со знаком суммы в (3.6) должен представлять положительно определенную форму квазициклических импульсов. Это приводит к ограничениям на ξ_j вида $\Delta_j < \xi_j < \Delta_{j*}$, которые обычно очевидны из физического смысла задачи.

Введем в рассмотрение в соответствии с [1,2] гармонические коэффициенты влияния колебательной системы $k_\nu^{(ij)}$ и фазовые сдвиги $\psi_\nu^{(ij)}$, определяемые следующим образом. Пусть на колебательную систему действует одна заданная нагрузка вида $v_i \cos\nu\omega t$. Определим вызываемые ею чисто вынужденные ($2\pi / \nu\omega$-периодические) колебания и найдем законы изменения во времени параметров обратного влияния. Амплитуды этих величин и сдвиги их фаз относительно нагрузки обозначаются соответственно через $k_\nu^{(ij)}$ и $\psi_\nu^{(ij)}$ согласно равенствам

$$\xi_j = k_\nu^{(ij)} \cos(\nu\omega t - \psi_\nu^{(ij)}) \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{3.9}$$

Это позволяет определить в порождающем приближении параметры обратного влияния как функции времени и величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $k_\nu^{(ij)}$, $\psi_\nu^{(ij)}$

$$\xi_{j0} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\Big[\sum_{r,s=1}^{m} \Delta A_i^{(rs)} k_0^{(ij)} (\alpha_r\alpha_s + V_{rs}^{(0)}) + 2\sum_{\nu,\nu\neq 0} k_\nu^{(ij)} \sum_{r,s=1}^{m} \Delta A_i^{(rs)} \alpha_r V_{s\nu} \cos(\nu\omega t - \vartheta_{s\nu} - \psi_\nu^{(ij)})\Big] + \xi_{j0}^{(1)} \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{3.10}$$

Обозначения здесь соответствуют равенствам

$$V_s = \sum_{\nu,\nu\neq 0} V_{s\nu} \cos(\nu\omega t - \vartheta_{s\nu}) \tag{3.11}$$

$$\xi_{j0}^{(1)} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu,\nu\neq 0} k_\nu^{(ij)} \sum_{r,s=1}^{m} \Delta A_i^{(rs)} V_{rs}^{(\nu)} \cos(\nu\omega t - \vartheta_{rs}^{(\nu)} - \psi_\nu^{(ij)})$$

$$V_r V_s = V_{rs}^{(0)} + \sum_{\nu,\nu\neq 0} V_{rs}^{(\nu)} \cos(\nu\omega t - \vartheta_{rs}^{(\nu)}) \tag{3.12}$$

причем через $\xi_{j0}^{(1)}$ обозначены части ξ_{j0}, не зависящие от $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и такие, что $\langle \xi_{j0}^{(1)} \rangle = 0$.

Подставив в соотношения

$$q_{r0}^{\boldsymbol\cdot} = \sum_{s=1}^{m}\Big[A_*^{(rs)} + \sum_{j=1}^{k} \Delta A_j^{(rs)} \xi_{j0}\Big] p_{s0} \tag{3.13}$$

ξ_{j0} согласно (3.10) и осредняя, получим алгебраические уравнения для определения параметров порождающего решения

$$P_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \equiv \sum_{s,u,v=1}^{m} a_{rsuv}\alpha_s\alpha_u\alpha_v + \sum_{s=1}^{m} a_{rs}\alpha_s - c_r = 0 \quad (r = 1, \ldots, m) \tag{3.14}$$

Здесь

$$a_{rsuv} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \Delta A_j^{(rv)} \Delta A_i^{(su)} k_0^{(ij)}, \qquad c_r = e_r - \sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} \Delta A_i^{(rs)} \langle \xi_{i0}^{(1)} V_s \rangle$$

$$a_{rs} = A_*^{rs} + \sum_{u,v=1}^{m} a_{rsuv} V_{uv}^{(0)} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\sum_{u,v=1}^{m}\sum_{\nu,\nu\neq 0} \Delta A_j^{(ru)} \Delta A_i^{(sv)} \times V_{u\nu} V_{v\nu} k_\nu^{(ij)} \cos(\vartheta_{u\nu} - \vartheta_{v\nu} - \psi_\nu^{(ij)}) \tag{3.15}$$

Примем, что непотенциальные силы по координатам колебательной системы суть силы вязкого трения. Чтобы найти при этом условия существования интегрального критерия, составим производные

$$\frac{\partial P_r}{\partial \alpha_s} = \sum_{u,\, v=1}^{m} (a_{rsuv} + a_{rusv} + a_{ruvs}) \alpha_u \alpha_v + a_{rs} \tag{3.16}$$

Воспользовавшись соотношениями взаимности статических коэффициентов влияния $k_0^{(ij)} = k_0^{(ji)}$ и очевидными равенствами $\Delta A_j^{(rs)} = \Delta A_j^{(sr)}$, можно показать, что коэффициенты a_{rsuv} не изменяются, если поменять местами крайние или средние индексы, а также если одновременно переставить индексы в первой и второй парах: $a_{rsuv} = a_{vsur} = a_{rusv} = a_{srvu} = \ldots$ Например,

$$a_{rsuv} = -\frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{k} \Delta A_j^{(rv)} \Delta A_i^{(su)} k_0^{(ij)} = -\frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{k} \Delta A_j^{(su)} \Delta A_i^{(rv)} k_0^{(ji)} = a_{srvu} \tag{3.17}$$

Величина суммы в (3.16), таким образом, не меняется при перестановке индексов r, s. Тем же свойством обладают и два первых члена в выражении a_{rs} (3.15). Для последнего же члена, пользуясь свойством взаимности гармонических коэффициентов влияния $k_\nu^{(ij)} = k_\nu^{(ji)}$ и фаз $\psi_\nu^{(ij)} = \psi_\nu^{(ji)}$ и переставляя соответствущим образом индексы i, j и u, v, получим

$$a_{rs} - a_{sr} = -\frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{k} \sum_{u,\, v=1}^{m} \sum_{\nu,\, \nu\neq 0} \Delta A_j^{(ru)} \Delta A_i^{(sv)} V_{u\nu} \times$$

$$\times V_{v\nu} k_\nu^{(ij)} [\cos(\vartheta_{u\nu} - \vartheta_{v\nu} - \psi_\nu^{(ij)}) - \cos(\vartheta_{v\nu} - \vartheta_{u\nu} - \psi_\nu^{(ij)})] \quad (r, s = 1, \ldots, m) \tag{3.18}$$

так что $a_{rs} = a_{sr}$, если $\vartheta_{u\nu} = \vartheta_{v\nu}$ $(u, v = 1, \ldots, m)$. Следовательно, $\partial P_r / \partial \alpha_s = \partial P_s / \partial \alpha_r$ и $P_r = \partial \Lambda / \partial \alpha_r$ в случае, когда обобщенные силы первого рода по квазициклическим координатам покомпонентно синфазные.

Это же условие обеспечивает равенства

$$\left\langle \sum_{s=1}^{n-m} Q_{m+s0} \frac{\partial q_{m+s0}}{\partial \alpha_r} \right\rangle \equiv \left\langle -\left(B u_0^{\boldsymbol{\cdot}}, \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_r} \right) \right\rangle = b_r \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{3.19}$$

Здесь симметричная $(n - m) \times (n - m)$ матрица B характеризует трение в колебательной системе, а b_r не зависят от $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Действительно, в этом случае вынуждающие силы

$$F_0 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{r,\, s=1}^{m} \Delta A_j^{(rs)} \left[\alpha_r \alpha_s + 2\alpha_r \sum_{\nu,\, \nu\neq 0} V_{s\nu} \times \cos(\nu\omega t - \vartheta_\nu) + V_r V_s \right] v_j \tag{3.20}$$

вызывают колебания вида

$$u_0 = \sum_\nu u_\nu^{(1)} \cos(\nu\omega t - \vartheta_\nu) + u_{0\nu}^{(2)} \sin(\nu\omega t - \vartheta_\nu) + u_0^{(1)}, \quad \text{так как} \tag{3.21}$$

где ϑ_ν, $u^{(i)}{}_0$ не зависят от $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, а $u^{(0)}{}_0$—линейная форма α_r. Отсюда приходим к (3.19)

$$\left\langle\left(Bu_0^{(0)}; \frac{\partial u_0{}^{(0)}}{\partial \alpha_r}\right)\right\rangle = 0 \tag{3.22}$$

При симметричной матрице B интегрирование по частям дает

$$W_{Q0} = \langle-(Bu^{\cdot}{}_0,\ u_0)\rangle = \langle(Bu^{\cdot}{}_0,\ u_0)\rangle = 0 \tag{3.23}$$

В силу линейности ΔT_1 по ξ_j имеем соотношение между вириалом вынуждающих сил и дополнительной энергией возбудителей

$$W_{F_0} = (\Delta T_1)_0 \tag{3.24}$$

Поэтому функция Λ может быть в данном случае записана в виде (см. (1.43))

$$\Lambda = \langle T_1{}^* \rangle_0 + {}^1/_2\ \langle\Delta T_1\rangle_0 - 2A, \quad A = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\alpha_r(e_r - b_r) \tag{3.25}$$

а также в виде

$$\Lambda = \langle T_1\rangle_0 - {}^1/_2\ \langle\Delta T_1\rangle_0 - 2A \tag{3.26}$$

Соотношения (3.25) и (3.26) вместе с наиболее общим представлением функции Λ через осредненный кинетический потенциал Рауса

$$\Lambda = \langle T_1\rangle_0 - \langle L_2\rangle_0 - 2A \tag{3.27}$$

приводит в данном случае к трем формулировкам интегрального критерия устойчивости, в каждой из которых используется по две из четырех функций T_1, $T_1{}^*$, ΔT_1 и L_2.

Умножая уравнение для координат колебательной системы (1.36), записанное в порождающем приближении на u_0 скалярно, получим (ср. с (1.41))

$$\langle\Delta T_1\rangle_0 = 2\ \langle L_2\rangle_0 \tag{3.28}$$

Функция Λ представляется сейчас суммой тернарной, квадратичной и линейной форм величин $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ и имеет вид

$$\Lambda = \frac{1}{4}\sum_{r,s,u,v=1}^{m} a_{rsuv}\alpha_r\alpha_s\alpha_u\alpha_v + \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{m} a_{rs}\alpha_r\alpha_s - \sum_{r=1}^{m} c_r\alpha_r + \Lambda_1 \tag{3.29}$$

Здесь через Λ_1 обозначена часть функции Λ, не зависящая от $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ (при вычислении Λ согласно (3.25) — (3.27)).

В данном случае для справедливости интегрального критерия достаточно, чтобы или отсутствовали непотенциальные силы по координатам колебательной системы или непотенциальные силы в колебательной системе были бы силами вязкого трения, а обобщенные силы первого рода по квазициклическим координатам удовлетворяли условиям покомпонентной синфазности. Отметим, что в условиях второго подслучая компоненты вектора u_0 (координаты колебательной системы) не будут, вообще говоря, покомпонентно синфазными и равенство (3.19) обеспечивается симметрией матрицы B (при покомпонентно синфазных $q_{m+1},\ldots,q_n$ (1.17) выполняется при любой B; см. § 1).

Для вычисления коэффициентов a_{rsuv}, a_{rs} и т. д. не обязательно использовать их представления через коэффициенты Фурье (3.15). Возможен, например, следующий способ записи. Введем матричную импульсно-частотную характеристику колебательной системы $K(t) = \|K^{(ij)}(t)\|$, $i, j = 1, \ldots, k$, определяемую следующим образом [7]. Пусть на колебательную систему действует одна $2\pi/\omega$-периодическая нагрузка вида $f(t)\, v_j$. Тогда закон изменения во времени i-го параметра обратного влияния может быть определен соотношением

$$\xi_i^{(j)}(t) = \frac{\omega}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega} K^{(ji)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{3.30}$$

где $K^{(ji)}$ не зависит от $f(t)$. Это позволяет записать (3.10) в виде

$$\xi_{j0} = \frac{\omega}{2\pi} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_0^{2\pi/\omega} K^{(ji)}(t-\tau) F_{i0}(\tau)\, d\tau \tag{3.31}$$

а выражение для $\langle \Delta T_1 \rangle_0$ — в виде

$$\langle \Delta T_1 \rangle_0 = -\frac{\omega^2}{4\pi^2} \sum_{i,\, j=1}^{k} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \int\limits_0^{2\pi/\omega} F_{j0}(t) K^{(ij)}(t-\tau) F_{i0}(\tau)\, d\tau\, dt \tag{3.32}$$

Прежние выражения получаются из (3.31) и (3.32) при помощи соотношения

$$K^{(ij)}(t) = 2 \sum_{\nu,\, \nu \neq 0} k_\nu^{(ij)} \cos(\nu\omega t - \psi_\nu^{(ij)}) + k_0^{(ij)} \tag{3.33}$$

В задаче о колебаниях проводников с токами рассмотренному в п. 2 § 3 случаю отвечают системы с «чисто притягивающими» электромагнитами, т. е. такими, при схематизации которых при заданных магнитных потоках энергию поля в веществе можно считать не зависящей от перемещений, а вне вещества — пропорциональной изменению длины линий индукции; пример — колебания под действием силы притяжения двух половин тонкого ферромагнитного тора, разделенных узкими зазорами, нормальными к оси; поле создается обмотками, размещенными на торе и подключенными к источникам заданной э.д.с.

В случаях, отличных от указанных в п. 1 и 2, § 3, для позиционных координат в порождающем приближении получаются нелинейные уравнения, описывающие колебания некоторой колебательной системы под действием сил, зависящих от перемещений, времени и параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Указанные выше энергетические критерии полезны здесь, в частности, следующим. Пусть имеется возможность получить (например, численным интегрированием) функции $q_{m+10}, \ldots, q_{n0}$ при любых заданных $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. В общем случае следовало бы, перебирая значения α_r, либо определять приближенные зависимости $q_{m+s0}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, либо находить, задаваясь α_r, функции q_{m+s0} и значения $P_1, \ldots, P_m$, «подбираясь» к значениям α_s, при которых $P_r \approx 0$. Имея же функцию Λ, можно перебирать значения α_r, руководствуясь хорошо известными способами разыскания минимума, что существенно сокращает вычисления.

Поступила 25 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ходжаев К. Ш. О возбуждении вибраций. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
2. Ходжаев К. Ш. Резонансный и нерезонансный случаи в задаче о возбуждении механических колебаний. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
3. Блехман И. И. Проблема синхронизации динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
4. Нагаев Р. Ф. Общая задача о синхронизации в почти консервативной системе. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
5. Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш. Синхронные движения в системе объектов с несущими связями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
8. Розенвассер Е. Н. О применении интегральных уравнений в теории нелинейных колебаний. Тр. II Всес. съезда по теорет. и прикл. механ., 1964, вып. 2, М., «Наука», 1965.