Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

И. И. Ворович, Г. А. Косушкин

(Ростов-на-Дону, Москва)

Математические вопросы нелинейной теории пологих оболочек нашли свое отражение [1] в работах [1–3]. При изучении вопроса о формах равновесия замкнутой цилиндрической оболочки в рамках нелинейной теории «среднего» изгиба [3,4] не всегда можно применять соотношения пологих оболочек. В данной работе приводится теоретическое исследование нелинейных уравнений для цилиндрической оболочки, полученных без использования гипотезы пологости. Доказывается существование обобщенного решения нелинейной задачи при произвольной нагрузке и произвольных условиях закрепления.

**§ 1. Основные соотношения. Постановка задачи.** Будем рассматривать следующий вариант соотношений нелинейной теории для цилиндрической оболочки, который легко получить из соотношений для среднего изгиба [4]:

$$\varepsilon_1 = u_x + {}^1/_2\, w_x^2, \qquad \varepsilon_2 = v_y + kw + {}^1/_2\,(w_y - kv)^2 \tag{1.1}$$

$$2\varepsilon_{12} = u_y + v_x + w_x(w_y - kv)$$

$$\varkappa_1 = -w_{xx}, \qquad \varkappa_2 = -w_{yy} + kv_y, \qquad \varkappa_{12} = -w_{xy} + kv_x$$

$$T_1 = 2B_1(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \qquad T_2 = 2B_1(\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \qquad T_{12} = B_1(1-\nu)2\varepsilon_{12}$$

$$M_1 = 2B_2(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2), \qquad M_2 = 2B_2(\nu\varkappa_1 + \varkappa_2), \qquad M_{12} = 2B_2(1-\nu)\varkappa_{12}$$

$$B_1 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}, \quad B_2 = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}, \quad B_{12} = \frac{B_1}{B_2}, \quad B_{21} = \frac{B_2}{B_1}, \quad 0 < \nu < 0.5$$

В формулах (1.1) используются следующие обозначения: $u, v, w$ — смещения точки срединной поверхности; нижний индекс $x, y$ при $u, v, w$ означает дифференцирование по $x, y$ соответственно; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ — деформации растяжения и сдвига, а $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}$ — изменения кривизн срединной поверхности оболочки; $T_1, T_2, T_{12}$ — усилия в плоскости оболочки; $N_1, N_2$ — перерезывающие силы; $M_1, M_2, M_{12}$ — изгибающие и крутящий моменты: $E, \nu$ — упругие постоянные материала; $h$ — толщина, $k$ — кривизна оболочки. Ось $x$ направлена вдоль образующей цилиндра, ось $y$ — по касательной к направляющей, а ось $z$ — по нормали к срединной поверхности.

Оболочка в плане занимает область $G$ с границей $\Gamma$.

$$G = \{(x, y) : |x| < l_1, |y| < l_2\}, \qquad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \qquad \Gamma_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2$$

$$\Gamma_1^1 = \{(x, y) : x = -l_1, |y| \leqslant l_2\}, \qquad \Gamma_1^2 = \{(x, y) : x = l_1, |y| \leqslant l_2\}$$

$$\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1 \qquad (kl_2 = \pi)$$

---

[1] См. также докторскую диссертацию И. И. Воровича.

Здесь $l_1$ — полудлина оболочки. Очевидно, $\Gamma_1^1$, $\Gamma_1^2$ — левый, правый торец оболочки соответственно.

В нормальном сечении оболочки напряженное состояние характеризуется четырьмя величинами: $T_n$ — нормальное к контуру усилие в плоскости оболочки, $S_n$ — тангенциальное, $N_n$ — перерезывающее усилие, $M_n$ — изгибающий момент. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}-(X-w_x Z_1)=0\\
\frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}+kT_2(w_y-kv)+kT_{12}w_x+k\left(\frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x}\right)-[Y-(w_y-kv)Z_1]=0 \quad (1.2)\\
\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}(T_1 w_x)+\frac{\partial}{\partial y}(T_{12}w_x)+\\
+\frac{\partial}{\partial x}[T_{12}(w_y-kv)]+\frac{\partial}{\partial y}[T_2(w_y-kv)]-kT_2-(Z+Z_1)=0
\end{gathered}$$

Здесь $X, Y, Z$ — компоненты поверхностной нагрузки, направление которой не зависит от деформации, в системе координат $x, y, z$; $Z_1$ — нормальная следящая нагрузка (гидростатическое давление). В рамках теории среднего изгиба учет компонент $X_1$, $Y_1$ непоследователен.

Пусть на множествах $\gamma_i^-$ и $\gamma_i^+$ $(i=1, 2, 3, 4)$ задаются геометрические и статические граничные условия соответственно. Очевидно $\gamma_i^+\subset\Gamma_1$, а $\bar\gamma_i\supseteq\Gamma_1\setminus\gamma_i^+$ $(i=1,2,3,4)$, так как закрепление может быть во внутренних точках области $G$. Рассматриваются следующие граничные условия на $\Gamma_1$:

$$u|_{\gamma_1^-}=0,\quad v|_{\gamma_2^-}=0,\quad w_x|_{\gamma_4^-}=0,\quad w|_{\gamma_3^-}=0 \tag{1.3}$$

$$\{T_n-(T^\circ-k_1u)\}|_{\gamma_1^+}=0,\qquad \{S_n-(S^\circ-k_2v)\}|_{\gamma_2^+}=0 \tag{1.4}$$

$$\{N_n-(N^\circ-k_3w)\}|_{\gamma_3^+}=0,\qquad \{M_n-(M^\circ-k_4w_x)\}|_{\gamma_4^+}=0$$

Здесь $k_1(y)$, $k_2(y)$, $k_3(y)$, $k_4(y)$ — характеристики упругой заделки; $T^\circ$, $S^\circ$, $N^\circ$, $M^\circ$ — внешняя нагрузка на торцах оболочки: растягивающее, сдвигающее, перерезывающее усилия и изгибающий момент соответственно. Граничные условия на $\Gamma_2$

$$u,\ v,\ w,\ w_y,\ T_n,\ S_n,\ N_n,\ M_n|_{y=-l_2}^{y=l_2}=0 \tag{1.5}$$

В дальнейшем будет изучаться краевая задача (1.2) — (1.5). После подстановки в (1.2) выражений (1.1) получим следующие уравнения равновесия в перемещениях.

$$\begin{gathered}
u_{xx}+\frac{1-\nu}{2}u_{yy}+\frac{1+\nu}{2}v_{xy}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu kw+{}^1/{}_2w_x^2+\frac{\nu}{2}(w_y-kv)^2\right]-\\
-\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[w_x(w_y-kv)\right]+\frac{[X-w_xZ_1]}{2B_1}\equiv f_1\\
\frac{1+\nu}{2}u_{xy}+\frac{1-\nu}{2}(1+4a^2)v_{xx}+(1+a^2)v_{yy}-\frac{(2-\nu)}{k}a^2w_{xxy}-\\
-\frac{a^2}{k}w_{yyy}=-\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial x}[w_x(w_y-kv)]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\nu}{2}w_x^2+kw+\right.
\end{gathered}$$

$$+\frac{1}{2}(w_y-kv)^2\Big]-k(w_y-kv)\Big[\nu u_x+\frac{\nu}{2}w_x^2+v_y+kw+$$
$$+\frac{1}{2}(w_y-kv)^2\Big]-\frac{(1-\nu)}{2}kw_x[u_y+v_x+w_x(w_y-kv)]+$$
$$+\frac{[Y-(w_y-kv)Z_1]}{2B_1}\equiv f_2$$
$$B_{21}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-(2-\nu)kv_{xxy}-k\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{w_x\left[u_x+\frac{1}{2}w_x^2+\nu v_y+\nu kw+\frac{\nu}{2}(w_y-kv)^2\right]\right\}-$$
$$-k\left[\nu u_x+\frac{\nu}{2}w_x^2+v_y+kw+\frac{1}{2}(w_y-kv)^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\{(w_y-kv)\times$$
$$\times[\nu u_x+\frac{\nu}{2}w^2{}_x+v_y+kw+\frac{1}{2}(w_y-kv)^2]\}+\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\{(w_y-kv)[u_y+$$
$$+v_x+w_x(w_y-kv)]\}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial y}\{w_x[u_y+v_x+$$
$$+w_x(w_y-kv)]\}-\frac{(Z+Z_1)}{2B_1}\equiv f_3\qquad (a^2=k^2B_{21})\tag{1.6}$$

Уравнения на границе

$$u|_{\gamma_1^-}=0,\qquad u_x+\nu v_y=-\nu kw-{}^1/_2[w_x^2+\nu(w_y-kv^2)]+$$
$$+(2B_1)^{-1}(T^\circ-k_1u)\equiv\Phi_1\quad\text{на }\gamma_1^+$$
$$v|_{\gamma_2^-}=0,\qquad u_y+(1+4a^2)v_x-\frac{4}{k}a^2w_{xy}=$$
$$=(S^\circ-k_2v)[B_1(1-\nu)]^{-1}-w_x(w_y-kv)\equiv\Phi_2\quad\text{на }\gamma_2^+$$
$$w|_{\gamma_3^-}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial x}[w_{xx}+(2-\nu)(w_{yy}-kv_y)]=(2B_2)^{-1}(N^\circ-k_3w)+$$
$$+B_{12}\{w_x[u_x+{}^1/_2w_x^2+\nu v_y+\nu kw+{}^1/_2\nu(w_y-kv)^2]\}+$$
$$+B_{12}{}^1/_2(1-\nu)\{(w_y-kv)[u_y+v_x+w_x(w_y-kv)]\}\equiv\Phi_3\quad\text{на }\gamma_3^+$$
$$w_x|_{\gamma_4^-}=0,\qquad w_{xx}+\nu(w_{yy}-kv_y)=-(2B_2)^{-1}(M^\circ-k_4w_x)\equiv\Phi_4\quad\text{на }\gamma_4^+$$
$$u,\ v,\ w,\ u_y,\ v_y,\ w_y,\ w_{yy},\ w_{yyy}\Big|_{y=-l_2}^{y=l_2}=0\tag{1.7}$$

Прежде чем исследовать задачу (1.6) — (1.7) введем некоторые вспомогательные понятия и докажем некоторые предложения.

**§ 2. Вспомогательные предложения.** Через $\omega=(u,v,w)$ будем обозначать вектор-функцию с компонентами $u, v, w$. Введем билинейную форму

$$A(\omega_1,\omega_2)=2B_1\int_G\{(u_{1,x}+\nu v_{1,y}+\nu kw_1)u_{2,x}+(\nu u_{1,x}+v_{1,y}+kw_1)(v_{2,y}+kw_2)+$$
$$+{}^1/_2(1-\nu)(u_{1,y}+v_{1,x})(u_{2,y}+v_{2,x})+\alpha[w_{1,x}w_{2,x}+(w_{1,y}-kv_1)(w_{2,y}-kv_2)]+$$
$$+B_{21}[(w_{1,xx}+\nu w_{1,yy}-\nu kv_{1,y})w_{2,xx}+(\nu w_{1,xx}+w_{1,yy}-kv_{1,y})(w_{2,yy}-kv_{2,y})+$$
$$+2(1-\nu)(w_{1,xy}-kv_{1,x})(w_{2,xy}-kv_{2,x})]\}\,dG\qquad(\alpha>0)\tag{2.1}$$

Нетрудно видеть, что если $A(\omega,\omega)=0$, то

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_{12}=\varkappa_1=\varkappa_2=\varkappa_{12}=0,\qquad w_x=w_y-kv=0$$

Это означает, что $\omega$ — перемещение оболочки, как жесткого целого.

Введем некоторые функциональные пространства. Класс функций, заданных в полосе $|x|\leqslant l_1$, периодических по $y$ с периодом $2l_2$, в зависимости от вводимой в нем метрики может приводить к разным функциональным пространствам. При этом вследствие периодичности норму можно исчислять по прямоугольнику периодичности относительно $y$ — области $G$. В отличие от обычных пространств $C(G)$, $L_p(G)$, $W_p^{(r)}(G)$ будем снабжать пространства в случае периодичности по $y$ значком градус. Важнейшие свойства вышеупомянутых классов функций полностью переносятся на случаи частичной и полной периодичности. В частности пространство $W_p^{(r)}(G^\circ)$ вполне аналогично пространству С. Л. Соболева и для него справедливы [5] такого же рода теоремы вложения [6] как для классов $W_p^{(r)}(G)$. Норму в $W_p^{(r)}$ $(G^\circ)$ обозначим через $\|\cdot\|_{r,p,G}$, а норму в $G$ $(G^\circ)$ через $|\cdot|$. Ниже поясняются несколько другие обозначения.

$$\|f\|_{r,p,G}=\|f\|_{r,p},\quad \|f\|_{0,p,\gamma_i^+}=\|f\|_{p,i},\quad |f|_{C(\gamma_i^+)}=|f|_i,\quad \|f\|^p_{0,p,G}=\int\limits_G|f|^p dG$$

В этих обозначениях

$$\|f\|_{1,2}^2=\|f\|_{0,2}^2+\|f_x\|_{0,2}^2+\|f_y\|_{0,2}^2,$$
$$\|f\|^2_{2,2}=\|f\|_{0,2}^2+\|f_{xx}\|_{0,2}^2+2\|f_{xy}\|_{0,2}^2+\|f_{yy}\|_{0,2}^2$$

Обозначим через $E$ — замыкание всех гладких в полосе $|x|\leqslant l_1$, периодических относительно $y$ с периодом $2l_2$, удовлетворяющих геометрическим граничным условиям (1.3) вектор-функций $\omega$ — замыкание по норме произведения пространств

$$W_2^{(1)}(G^\circ)\times W_2^{(1)}(G^\circ)\times W_2^{(2)}(G^\circ)$$

Норма определяется, как обычно, в прямом произведении

$$\|\omega\|_E^2=\|u\|_{1,2}^2+\|v\|_{1,2}^2+\|w\|_{2,2}^2$$

Пусть $M\subset E$ — линейное множество всех элементов $w\in E$, для которых $A(\omega,\omega)=0$. Объединяя в один класс $\omega$ те элементы $\omega'$ и $\omega''$, которые равны по модулю $M$, т. е. $\omega'-\omega''\in M$, придем к пространству классов $E^*=E/M$ — фактор-пространству пространства $E$ по подпространству $M$. Другими словами, перемещение $\omega$ определяется с точностью до перемещений оболочки как жесткого целого при связях (1.3). По определению фактор-пространства

$$\|\omega\|_{E^*}=\inf\|\omega'\|_E,\qquad \omega'\in\omega$$

Нетрудно убедиться в том, что существует и единствен «нормальный» представитель $\omega^*$ класса $\omega$, такой, что

$$\|\omega\|_{E^*}=\|\omega^*\|_E$$

Пространство $E$ — гильбертово, поэтому $E^*$ — также гильбертово; следовательно,

$$(\omega_1,\omega_2)_{E^*}=\inf(\omega_1',\omega_2'')_E,\quad \omega_1'\in\omega_1,\qquad \omega_2''\in\omega_2$$

*Лемма* 2.1. Для всех $\omega\in E^*$

$$m\Omega\leqslant\|\omega\|_{E^*}\qquad(m>0)\tag{2.2}$$
$$\Omega=|w^*|,\quad \|f\|_{0,p,a};\qquad f=w_x,\ w_y,\ u,\ v;\qquad a=G,\ \gamma$$

Здесь $\gamma$ — кусочно-гладкий контур из $\overline{G}$, $1\leqslant p<\infty$ а $m$ не зависит от выбора $\omega$, но зависит от $\{a,p\}$. Кроме того, отношение, выражаемое неравенством (2.2), обладает полной непрерывностью, т. е. из ограниченности множества $\{\omega\}$ в $E^*$ следует компактность в смысле левых частей (2.2).

*Доказательство.* Неравенства (2.2) получаются единым способом с помощью теорем вложения, поэтому проведем доказательство для примера на одном из них

$$m|w^*|\leqslant\|w^*\|_{2,2}\leqslant\|\omega^*\|_E=\|\omega\|_{E^*}$$

Покажем на этом же примере полную непрерывность отношений. Пусть дано множество $\{\omega:\|\omega\|_{E^*}\leqslant C\}$. Вследствие этого $\|\omega^*\|_E\leqslant C$, и, принимая во внимание полную непрерывность вложения $W_2^{(2)}(G^\circ)\to C(G^\circ)$, получим, что $\{w^*\}$ компактно в $C(G^\circ)$. Утверждение леммы доказано.

В пространстве $E^*$ введем скалярное произведение

$$(\omega_1, \omega_2)_H = A(\omega_1, \omega_2)$$

где форма $A$ определяется формулой (2.1). Тогда

$$\|\omega\|_H^2 = 2B_1 \int_G \{(u_x + \nu v_y + \nu k w) u_x + (\nu u_x + v_y + kw)(v_y + kw) +$$

$$+ {}^1/_2 (1 - \nu)(u_y + v_x)^2 + \alpha [w_x^2 + (w_y - kv)^2] + B_{21} [(w_{xx} + \nu w_{yy} - \nu k v_y) w_{xx} +$$

$$+ (\nu w_{xx} + w_{yy} - kv_y)(w_{yy} - kv_y) + 2(1 - \nu)(w_{xy} - kv_x)^2]\}\, dG \qquad (2.3)$$

*Лемма* 2.2. Для всех $\omega \in E^*$

$$m \|\omega\|_{E^*} \leqslant \|\omega\|_H \leqslant m_1 \|\omega\|_{E^*} \qquad (m, m_1 > 0) \qquad (2.4)$$

*Доказательство.* Очевидно, что согласно (2.3)

$$\|\omega'\|_H^2 \leqslant \text{const} \|\omega'\|_E^2$$

Переходя к точным нижним граням по всем элементам $\omega' \in \omega$, получим, что $\|\omega\|_H \leqslant m_1 \|\omega\|_{E^*}$. Докажем левую часть неравенства (2.4). Фактически нужно показать, что

$$m = \inf (\|\omega\|_H \|\omega\|_{E^*}^{-1}) > 0, \qquad \omega \in E^*$$

Допустим, что $m = 0$. В этом случае существует последовательность $\{\omega_n\}$, такая, что $\|\omega_n\|_{E^*} = 1$, $\|\omega_n\|_H \to 0$, и $\omega_n \to \omega_0$ слабо в $E^*$ при $n \to \infty$.

Оказывается, предположение, что $\omega_0 = 0$, приводит к противоречию. В самом деле, пусть $\omega_0 = 0$. Из $\|\omega_n\|_H \to 0$ получаем

$$u_{n,x}^*, \ v_{n,y}^* + kw_n^*, \ u_{n,y}^* + v_{n,x}^*, \ w_{n,xx}^*, \ w_{n,yy}^* - kv_{n,y}^*$$

$$w_{n,xy}^* - kv_{n,x}^* \to 0 \quad \text{в } L_2(G^\circ) \qquad (2.5)$$

а из того, что $\omega_n \to 0$ слабо в $E^*$, и леммы 2.1 имеем

$$|w_n^*|, \qquad \|w_{n,x}^*\|_{0,2}, \qquad \|w_{n,y}^*\|_{0,2} \to 0 \qquad (2.6)$$

На основании (2.5), (2.6) заключаем

$$v_{n,y}^*, \ w_{n,xx}^*, \ w_{n,yy}^* \to 0 \text{ в } L_2(G^\circ)$$

Для функций из $W_2^{(2)}(G)$ известна оценка смешанной производной [7], которую приводим в наших терминах

$$\|w_{n,xy}^*\|_{0,2} \leqslant \text{const} (\|w_{n,xx}^*\|_{0,2} + \|w_{n,yy}^*\|_{0,2} + \|w_{n,x}^*\|_{0,2} + \|w_{n,y}^*\|_{0,2} + \|w_n^*\|_{0,2}) \qquad (2.7)$$

В результате, из (2.6), (2.7) будет $\|w_n^*\|_{2,2} \to 0$. Согласно (2.5) отсюда следует, что $\|u_n^*\|_{1,2}$, $\|v_n^*\|_{1,2} \to 0$. Полученное означает, что $\|\omega_n\|_{E^*} \to 0$ при $n \to \infty$ ($\|\omega_n\|_{E^*} = 1$). Противоречие налицо, поэтому $\omega_0 \neq 0$.

Имеем $\omega_n = \omega_0 + \varphi_n$, где $\varphi_n = \omega_n - \omega_0$ и $\varphi_n \to 0$ слабо в $E^*$. По предположению

$$\|\omega_0 + \varphi_n\|_H^2 = \|\omega_0\|_H^2 + 2(\omega_0, \varphi_n')_H + \|\varphi_n\|_H^2 \qquad (2.8)$$

Так как

$$|(\omega_0, \varphi_n)_H| \leqslant \|\omega_0\|_H \|\varphi_n\|_H \leqslant \text{const} \|\omega_0\|_{E^*} \|\varphi_n\|_{E^*}$$

то $(\omega_0, \varphi)_H$ — линейный функционал в $E^*$ и при $\varphi_n \to 0$ слабо в $E^*$ — произведение $(\omega_0, \varphi_n)_H \to 0$. Отсюда и из (2.8) получим $\|\omega_0\|_H^2 + \|\varphi_n\|_H^2 \to 0$ при $n \to \infty$. На этот раз приходим к противоречию с тем, что $\omega_0 \neq 0$. Утверждение леммы доказано.

Согласно лемме 2.2 нормы $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_{E^*}$ эквивалентны; пространство $E^*$ с нормой $\|\cdot\|_H$ будем называть пространством $H$. Справедлива следующая лемма.

*Лемма* 2.3. Утверждение леммы 2.1 сохраняет силу, если всюду в формулировке заменить $E^*$ на $H$.

**§ 3. Обобщенное решение.** Предположим, что выполнены следующие условия:

$$X,\ Y,\ Z_1 \in L_q(G), \qquad Z \in L(G), \qquad T^0,\ k_1 \in L_q(\gamma_1^+)$$
$$S^\circ,\ k_2 \in L_q(\gamma_2^+), \qquad N^\circ,\ k_3 \in L(\gamma_3^+), \qquad M^\circ,\ k_4 \in L_q(\gamma_4^+) \qquad (q > 1) \tag{3.1}$$

Здесь $q$ — некоторое фиксированное число. Известно, что условие равновесия можно выразить при помощи принципа возможных перемещений

$$\begin{aligned}
\Lambda(\omega, \omega^\circ) \equiv \int_G \{ & T_1(u_x^\circ + w_x w_x^\circ) + T_2[v_y^\circ + kw^\circ + (w_y - kv)(w_y^\circ - kv^\circ)] + \\
& + T_{12}[u_y^\circ + v_x^\circ + w_x(w_y^\circ - kv^\circ) + w_x^\circ(w_y - kv)] - \\
& - M_1 w_{xx}^\circ - M_2(w_{yy}^\circ - kv_y^\circ) - 2M_{12}(w_{xy}^\circ - kv_x^\circ) + \\
& + (X - w_x Z_1)u^\circ + [Y - (w_y - kv)Z_1]v^\circ + (Z + Z_1)w^\circ\}\, dG - \\
- \int_{\gamma_1^+} (T^\circ - k_1 u)\, u^\circ\, d\gamma & - \int_{\gamma_2^+} (S^\circ - k_2 v)\, v^\circ\, d\gamma - \int_{\gamma_3^+} (N^\circ - k_3 w)\, w^\circ\, d\gamma + \\
& + \int_{\gamma_4^+} (M^\circ - k_4 w_x)\, w_x^\circ\, d\gamma = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $\omega^\circ$ — возможное перемещение, а криволинейные интегралы выписаны с учетом обычного правила обхода контура.

*Определение* 3.1. Назовем обобщенным решением задачи (1.6), (1.7) при условии (3.1) функцию $\omega \in E$, которая удовлетворяет уравнению 3.2) для всех $\omega^\circ \in E$.

Легко убедиться в том, что каждый член выражения (3.2) в этих условиях имеет смысл. Для этого достаточно оценить каждый член в (3.2) при помощи неравенства Гельдера и леммы 2.3.

Покажем, что уравнение (3.2) эквивалентно некоторому операторному уравнению в $H$. Действительно, для представителей $\omega^*, \omega^{\circ *}$ классов $\omega$ и $\omega^\circ$, согласно (3.2), (1.1), можем написать следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
\Lambda(\omega^*, \omega^{\circ *}) = 2B_1 \int_G \{ & (u_x^* + \nu v_y^* + \nu k w^*)\, u_x^{\circ *} + (v_y^* + kw^* + \\
& + \nu u_x^*)(v_y^{\circ *} + kw^{\circ *}) + {}^1/_2(1-\nu)(u_y^* + v_x^*)(u_y^{\circ *} + v_x^{\circ *}) + \\
& + B_{21}[(w_{xx}^* + \nu w_{yy}^* - \nu v_y^*)\, w_{xx}^{\circ *} + (\nu w_{xx}^* + w_{yy}^* - kv_y^*) \times \\
& \times (w_{yy}^{\circ *} - kv_y^{\circ *}) + 2(1-\nu)(w_{xy}^* - kv_x^*)(w_{xy}^{\circ *} - kv_x^{\circ *})] + \\
& + \alpha[w_x^* w_x^{\circ *} + (w_y^* - kv^*)(w_y^{\circ *} - kv^{\circ *})]\}\, dG + \\
+ \Big\langle 2B_1 \int_G \{ & -\alpha\, [w_x^* w_x^{\circ *} + (w_y^* - kv^*)(w_y^{\circ *} - kv^{\circ *})] + \\
& + [u_x^* + {}^1/_2 w_x^{*2} + \nu v_y^* + \nu k w^* + {}^1/_2 \nu (w_y^* - kv^*)^2]\, w_x^* w_x^{\circ *} + \\
& + {}^1/_2[w_x^{*2} + \nu(w_y^* - kv^*)^2]\, u_x^{\circ *} + [\nu u_x^* + {}^1/_2 \nu w_x^{*2} + v_y^* + kw^* +
\end{aligned}$$

$$+ {}^1/_2 (w_y{}^* - kv^*)^2] (w_y{}^* - kv^*) (w_y{}^{\circ *} - kv^{\circ *}) + {}^1/_2 [\nu w_x{}^{*2} + (w_y{}^* - kv^*)^2] (v_y{}^{\circ *} + kw^{\circ *}) +$$

$$+ {}^1/_2 (1-\nu) [u_y{}^* + v_x{}^* + w_x{}^* (w_y{}^* - kv^*)] [w_x{}^* (w_y{}^{\circ *} - kv^{\circ *}) +$$

$$+ w_x{}^{\circ *} (w_y{}^* - kv^*)] + {}^1/_2 (1-\nu) [w_x{}^* (w_y{}^* - kv^*) (u_y{}^{\circ *} + v_x{}^{\circ *})]\} dG \Big\rangle +$$

$$+ \int_G \{(X - w_x{}^* Z_1) u^{\circ *} + [Y - (w_y{}^* - kv^*) Z_1] v^{\circ *} + (Z + Z_1) w^{\circ *}\} dG -$$

$$- \int_{\gamma_1^+} (T^\circ - k_1 u^*) u^{\circ *} d\gamma - \int_{\gamma_2^+} (S^\circ - k_2 v^*) v^{\circ *} d\gamma -$$

$$- \int_{\gamma_3^+} (N^\circ - k_3 w^*) w^{\circ *} d\gamma + \int_{\gamma_4^+} (M^\circ - k_4 w_x{}^*) w_x{}^{\circ *} d\gamma = 0 \qquad (3.3)$$

Далее всюду в выражениях фигурируют только нормальные представители, поэтому значок * опускаем. Представим

$$\Lambda (\omega, \omega^\circ) = (\omega, \omega^\circ)_H + Q_1 (\omega, \omega^\circ) + Q_2 (\omega, \omega^\circ) \qquad (3.4)$$

где $Q_1 (\omega, \omega^\circ)$ — член из (3.3) в $\langle \ldots \rangle$ скобках.

*Лемма* 3.1. Функционал (3.5)

$$P_1 (\omega) = B_1 \int_G \{u_x w_x^2 + {}^1/_4 w_x^4 + v_y (w_y - kv)^2 + kw (w_y - kv)^2 +$$

$$+ {}^1/_4 (w_y - kv)^4 + \nu u_x (w_y - kv)^2 + \nu (v_y + kw) w_x^2 + {}^1/_2 \nu w_x{}^2 (w_y - kv)^2 +$$

$$+ (1-\nu) (u_y + v_x) w_x (w_y - kv) + {}^1/_2 (1-\nu) w_x^2 (w_y - kv)^2\} dG$$

слабо непрерывен в $H$.

*Доказательство*. Пусть $\omega_n \to \omega_0$ слабо в $H$, тогда по лемме 2.3

$$\| w_{n,x}^2 - w_{0,x}^2 \|_{0,2}, \quad \| (w_{n,y} - kv_n)^2 - (w_{0,y} - kv_0)^2 \|_{0,2} \to 0$$

Известно, что $(f_n, \varphi_n) \to (f_0, \varphi_0)$, если $f_n \to f_0$ в слабом, а $\varphi_n \to \varphi_0$ в сильном смысле в гильбертовом пространстве. Применяя эти соображения к (3.5), получим, что $P_1 (\omega_n) \to P_1 (\omega_0)$ при $\omega_n \to \omega_0$ слабо в $H$. Таким образом $P_1 (\omega)$ слабо непрерывен в $H$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $Q_1 (\omega, \omega^\circ)$ — дифференциал Гато от $P_1 (\omega)$. Имеет место оценка

$$| Q_1 (\omega, \omega^\circ) | \leqslant \mathrm{const} (\| \omega \|_H^3 + \| \omega \|_H^2 + \| \omega \|_H) \| \omega^\circ \|_H$$

Отсюда $Q_1 (\omega, \omega^\circ)$ — линейный по $\omega^\circ$ функционал в $H$ и по лемме Рисса справедливо представление

$$(\mathrm{grad}_H P_1 (\omega), \omega^\circ)_H = Q_1 (\omega, \omega^\circ) \qquad (3.6)$$

*Замечание*. Оператор $\mathrm{grad}_H P_1 (\omega)$ усиленно непрерывен в $H$, что следует из теоремы Э. С. Цитланадзе [8] о полной непрерывности потенциальных операторов.

*Лемма* 3.2. Справедливо представление

$$Q_2 (\omega, \omega^\circ) = (K_2 \omega, \omega^\circ) \qquad (3.7)$$

где $K_2 \omega$ — усиленно непрерывный в $H$ оператор.

Докажем сначала, что (3.7) имеет место. Легко получить такое неравенство:

$$|Q_2(\omega, \omega^\circ)| \leqslant \text{const}\,(\|\omega\|_H + \text{const})\|\omega^\circ\|_H$$

где константы положительны и не зависят от $\omega$, $\omega^\circ$. Отсюда видно, что $Q_2(\omega, \omega^\circ)$ линейный по $\omega^\circ$ функционал и лемма Рисса подтверждает (3.7). Пусть теперь $\omega_n \to \omega_0$ слабо в $H$. Учитывая (3.1) и применяя неравенство Гельдера можно написать следующее:

$$\begin{aligned} |(K_2\omega_n - K_2\omega_0, \omega^\circ)_H| &= |Q_2(\omega_n, \omega^\circ) - Q_2(\omega_0, \omega^\circ)| \leqslant \\ &\leqslant \text{const}\,\{\|w_{n,x} - w_{0,x}\|_{0,q_1} + \|w_{n,y} - w_{0,y}\|_{0,q_1} + \\ &+ \|v_n - v_0\|_{0,q_2} + \|u_n - u_0\|_{q_2,1} + \|v_n - v_0\|_{q_2,2} + \\ &+ \|w_{n,x} - w_{0,x}\|_{q_3,4} + |w_n - w_0|\}\,\|\omega^\circ\|_H \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $q_1, q_2, q_3 > 1$ — некоторые показатели. Принимая во внимание (3.8) слабую сходимость $\omega_n$, лемму 2.3 и следующее определение нормы:

$$\|K_2\omega_n - K_2\omega_0\|_H = \sup|(K_2\omega_n - K_2\omega_0, \omega^\circ)_H|, \qquad \|\omega^\circ\|_H = 1$$

получим, что $K_2\omega_n \to K_2\omega_0$ в $H$, если $\omega_n \to \omega_0$ слабо. Лемма доказана.

Подставим (3.6) и (3.7) в (3.4)

$$\Lambda(\omega, \omega^\circ) = (\omega - K\omega, \omega^\circ)_H, \qquad K = -\text{grad}_H P_1(\omega) - K_2(\omega)$$

Таким образом, уравнение (3.2) эквивалентно уравнению

$$(\omega - K\omega, \omega^\circ)_H = 0 \qquad (\omega^\circ \in H) \tag{3.9}$$

или операторному уравнению с вполне непрерывным оператором

$$\omega - K\omega = 0 \tag{3.10}$$

§ 4. **Существование обобщенного решения.** Полная непрерывность в $H$ оператора $K$ позволяет для доказательства существования обобщенного решения задачи применить метод Шаудера—Лерея. Схема использования этого метода в теории разрешимости краевых задач для пологих оболочек развита в [3], поэтому не останавливаемся на терминологии. Пусть $S(R, 0)$ — сфера радиуса $R$ с центром в нуле

$$S(R, 0) = \{\omega : \|\omega\|_H = 1\}$$

Оказывается, достаточно доказать, что вполне непрерывное векторное поле $\omega - K\omega$ гомотопно на сфере $S(R, 0)$ достаточно большого радиуса $R$ вполне непрерывному векторному полю $I\omega$, где $I$ — тождественный оператор, для которого вращение [8] равно $+1$. Для гомотопности же достаточно показать, что

$$(I - tK)\omega \neq 0 \quad \text{при } \omega, t \in S(R, 0) \times [0, 1] \tag{4.1}$$

и $R$ — некотором. Здесь $t$ — вещественный параметр. В том случае если (4.1) справедливо, из теории метода Шаудера — Лерея [8] следует, что в шаре $\|\omega\|_H < R$ существует решение уравнения (3.10). По сути в этом параграфе будет доказываться, что условие (4.1) выполняется. Установление неравенства (4.1) есть один из основных моментов доказательства. Здесь для его получения используется метод, предложенный в [3].

Введем

$$e_1 = u_x, \qquad e_2 = v_y + kw, \qquad e_{12} = u_y + v_x \tag{4.2}$$

$$\theta_1 = {}^1/_2\, w_x^2, \qquad \theta_2 = {}^1/_2\, (w_y - kv)^2, \qquad \theta_{12} = w_x\,(w_y - kv)$$
$$\mathbf{a} = (a_1,\ a_2,\ a_{12}), \qquad \mathbf{a} = \mathbf{e},\ \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\varkappa},\ \boldsymbol{\varepsilon},\ \mathbf{T},\ \mathbf{M}$$
$$\theta^+ = \theta R, \quad R > 0, \quad a_+ = R^{-1}a, \quad a = X,\ \ Y, \ldots, M^\circ$$
$$\Phi(\omega) = \Lambda(\omega,\ \omega) = (\omega - K,\ \omega,\ \omega)_H, \quad \|\omega\|_H = R$$
$$\Phi^+(R,\ \omega_+) = R^{-2}\Phi(\omega), \qquad \|\omega_+\|_H = 1$$

С учетом (3.2) напишем такое выражение:

$$\Phi(\omega) = 2\langle \mathbf{T},\ \boldsymbol{\varepsilon}\rangle + \langle \mathbf{M},\ \boldsymbol{\varkappa}\rangle - \int_G [T_1 u_x + T_{12} u_y + T_2 e_2 + T_{12} v_x]\, dG +$$
$$+ \int_G \{(X - w_x Z_1)\, u + [Y - (w_y - kv)\, Z_1]\, v + (Z + Z_1)\, w\}\, dG -$$
$$- \int_{\gamma_1^+} (T^\circ - k_1 u)\, u\, d\gamma - \int_{\gamma_2^+} (S^\circ - k_2 v)\, v d\gamma - \int_{\gamma_3^+} (N^\circ - kw)\, w d\gamma +$$
$$+ \int_{\gamma_4^+} (M^\circ - k_4 w_x)\, w_x d\gamma$$
$$\langle \mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle = \int_G (a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2a_{12} b_{12})\, dG, \qquad \mathbf{a} = \mathbf{T},\ \mathbf{M}, \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varkappa} \tag{4.3}$$

Если в формулах для $\mathbf{T}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ через $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\theta}$ величина $\boldsymbol{\theta}$ снабжается верхним индексом плюс, то этим же индексом пометим $\mathbf{T}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$. В результате

$$\Phi^+(R,\ \omega) = 2\langle \mathbf{T}^+,\ \boldsymbol{\varepsilon}^+\rangle + \langle \mathbf{M},\ \boldsymbol{\varkappa}\rangle - \int_G [T_1{}^+ e_1 + T_{12}{}^+ e_{12} + T_2{}^+ e_2]\, dG +$$
$$+ \int_G \{(X_+ - w_x Z_1)\, u + [Y_+ - (w_y - kv)\, Z_1]\, v + (Z_+ + Z_{1+})\, w\}\, dG -$$
$$- \int_{\gamma_1^+} (T_+{}^\circ - k_1 u)\, u d\gamma - \int_{\gamma_2^+} (S_+{}^\circ - k_2 v)\, v\, d\gamma -$$
$$- \int_{\gamma_3^+} (N_+{}^\circ - k_3 w)\, w\, d\gamma + \int_{\gamma_4^+} (M_+{}^\circ - k_4 w_x)\, w_x\, d\gamma \tag{4.4}$$

Обозначим через $\gamma_i \subset \gamma_i{}^+$ — множество, на котором почти везде $k_i < 0$ $(i = 1,2,3)$. Согласно лемме 2.3 найдутся такие константы $c_1{}^*$, $c_2{}^*$, $c_3{}^*$, что

$$\|u\|^2_{0,q_1,\gamma_1} \leqslant c_1{}^* \|\omega\|_H{}^2, \qquad \|v\|^2_{0,\,q_1,\,\gamma_2} \leqslant c_2{}^* \|\omega\|_H{}^2$$
$$|\omega|^2 \leqslant c_3{}^* \|\omega\|_H{}^2, \qquad \frac{1}{q} + \frac{2}{q_1} = 1$$

Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:

$$c_1 \|k_1\|_{0,\,q,\,\gamma_1} + c_2 \|k_2\|_{0,\,q,\gamma_2} + c_3 \|k_3\|_{0,\,1,\,\gamma_3} < {}^1/_2 \tag{4.5}$$

где $c_i > c_i{}^*$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, а $q$ — соответствует (3.1).

*Лемма* 4.1. Если выполняются условия (3.2), (4.5), то существует такая положительная, не зависящая от выбора $R$ и $\omega$ постоянная $\sigma$, что для всех достаточно больших $R$

$$\Phi(\omega) \geqslant \sigma R^2 \qquad (\omega \in S\,(R,\ 0)) \tag{4.6}$$

*Доказательство.* Этому утверждению эквивалентно следующее:

$$\Phi^+(R,\ \omega) \geqslant \sigma \qquad (\omega \in S\ (1,\ 0)) \tag{4.7}$$

Очевидно, достаточно доказать, что равномерно по $\omega$

$$\lim\ \Phi^+(R,\ \omega) > 0 \text{ при } R \to \infty\ (\omega \in S\ (1,\ 0)) \tag{4.8}$$

тогда найдется константа $\sigma$ и при достаточно больших $R$ будет иметь место (4.7). В самом деле, в противном случае нашлась бы последовательность $\{R_m, \omega_n\}$ такая, что

$$\Phi^+(R_m, \omega_n) \to c, \quad R_m \to \infty \quad \text{при } n,m \to \infty \quad c \leqslant 0, \quad \omega_n \in S(1,0) \quad (4.9)$$

Это противоречит (4.8), поэтому следует признать достаточность (4.8) для доказательства леммы.

Обратимся к доказательству неравенства (4.8). Предположим, что (4.8) нарушается. Это означает, что существует такая последовательность $\{R_m, \omega_n\}$, что имеет место (4.9). Выделим из многочлена $\Phi^+(R, \omega)$ старший член

$$a_4^+(R, \omega) = 8B_1 \int_G (\theta_1^+ + \theta_2^+)^2 \, dG$$

Если последовательность $\theta_1^+{}_{,n,m}$ или $\theta_2^+{}_{,n,m}$ не ограничена в $L_2(G)$, то

$$\Phi^+(R_m, \omega_n) \to +\infty$$

и (4.9) не имеет места. Отсюда последовательности $\theta_1^+{}_{,n,m}$, $\theta_2^+{}_{,n,m}$, $\theta_{12}^+{}_{,n,m}$ ограничены в $L_2(G)$, так как предположили, что (4.9) выполняется. Ограниченность $\theta_1{}^+{}_{,n,m}$ при $R \to \infty$ означает, что

$$\|\theta_{1,n,m}\|_{0,2}, \ \|\theta_{2,n,m}\|_{0,2} \to 0, \qquad n, m \to \infty$$

Вследствие этого можем считать, что $\omega_n \to \omega_0$ слабо в $H$ $(\theta_1(\omega_0) = \theta_2(\omega_0) = 0)$.

Ограниченную в $L_2(G)$ последовательность $\theta_1^+{}_{,n,m}$ можно считать слабо сходящейся, и, кроме того, вследствие (4.9) можно считать, что существует конечный предел

$$\lim \|\theta_1^+{}_{,n,m}\|_{0,2} = b, \qquad n,m \to \infty$$

Итак двойной предел последовательности $\{\|\theta_1{}^+{}_{n,m}\|_{0,2}\}$ при $n,m \to \infty$ существует, также существует предел по $n$ при каждом фиксированном $m$ и равен нулю. Применяя теорему о повторном пределе, получим

$$b = \lim_m \lim_n \|\theta_1^+{}_{,n,m}\|_{0,2} = 0, \quad n,m \to \infty$$

Подобным образом доказывается, что

$$\lim \|\theta_2^+{}_{,n,m}\|_{0,2} = \lim \|\theta_{12}^+{}_{,n,m}\|_{0,2} = 0, \qquad n,m \to \infty$$

Используем полученные выводы. Очевидно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое положительное $n_0$, что

$$\int_G a_{n,m} b_{n,m} \, dG < 10^{-2} \varepsilon \qquad \text{при } n, m > n_0(\varepsilon)$$

$$a = \theta_1^+, \ \theta_2^+, \ \theta_{12}^+, \qquad b = e_1, \ e_2, \ e_{12}$$

Раскроем выражение для $\Phi^+(R, \omega)$ в (4.9)

$$\Phi^+(R_m, \omega_n) = 2\|\omega_n\|_H^2 - \langle M_n, \varkappa_n \rangle - 2B_1 \int_G \{(e_{1,n} + \nu e_{2,n}) e_{1,n} + (\nu e_{1,n} + e_{2,n}) e_{2,n} +$$
$$+ {}^1/_2 (1-\nu) e_{12,n}^2\} \, dG + \int_{\gamma_1^+} k_1 u^2 d\gamma + \int_{\gamma_2^+} k_2 v^2 d\gamma + \int_{\gamma_3^+} k_3 w^2 d\gamma + f(R_m, \omega_n)$$

Применяя неравенство Гельдера и используя условие (4.5), можно вывести отсюда следующее:

$$\Phi^+(R_m, \omega_n) \geqslant {}^1/_2 \|\omega_n\|_H^2 + f(R_m, \omega_n), \qquad n, m > n^0(\varepsilon)$$
$$|f(R_m, \omega_n)| < \varepsilon, \qquad n, m > n_0(\varepsilon), \qquad \|\omega_n\|_H = 1$$

Полученное неравенство явно противоречит предположению (4.9), и, следовательно, отсюда логически вытекает справедливость утверждения леммы.

*Лемма* 4.2. Если выполнены условия (3.1), (4.5), то условие (4.1) тоже выполняется.

*Доказательство.* Предположим, что лемма неверна. В этом случае для любого $R$ найдутся такие $t$, $\omega$, что

$$\omega - tK\omega = 0, \qquad t \in [0,1], \qquad \omega \in S(R, 0) \tag{4.10}$$

Построим функционал

$$\Phi_1(t, \omega) = (\omega - tK\omega, \omega)_H, \qquad \Phi_1(0, \omega) = \|\omega\|^2_H, \qquad \Phi_1(1, \omega) = \Phi(\omega)$$

Принимая во внимание линейность $\Phi_1(t, \omega)$ по $t$, получим

$$\Phi_1(t, \omega) = (1 - t)\,\Phi_1(0, \omega) + t\Phi_1(1, \omega) = (1 - t)\,\|\omega\|^2_H + t\Phi(\omega)$$

Для достаточно больших $R$ вследствие леммы 4.1 должно быть

$$\Phi_1(t, \omega) \geqslant (1 - t)\,\|\omega_H\|^2 + t\sigma\,\|\omega\|^2_H = (1 - t + t\sigma)\,\|\omega\|_H^2 \geqslant \min(1, \sigma)\ \omega_H^2 \tag{4.11}$$

С другой стороны, по предположению имеет место (4.10) и

$$\Phi_1(t, \omega) = (\omega - tK\omega, \omega)_H = 0$$

Таким образом, предположение, что лемма неверна, приводит к (4.10), а это противоречит (4.11). Лемма доказана.

*Лемма* 4.3. На сфере $S(R, 0)$ достаточно большого радиуса вращения вполне непрерывного поля $(I - K)\ \omega$ равно $+1$.

Утверждение данной леммы следует из леммы 4.2 и соображений, высказанных в начале параграфа.

По существу, леммы 4.1 и 4.2 доказывают следующую теорему.

*Теорема* 4.1. Пусть выполнены условия (3.1) и (4.5). В этом случае в шаре достаточно большого радиуса $R$ существует обобщенное решение задачи (1.6), (1.7) из $H$.

Используя полученные результаты, можно изучить дифференциальные свойства решения.

*Лемма* 4.3 гарантирует согласно теоремам [8] сходимость метода Галеркина и других проекционных методов приближенного решения уравнения (3.10).

Поступила 2 VII 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Изв. АН СССР, 1956, т. 19, № 4.
3. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
4. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
5. Никольский С. М. О теоремах вложения, продолжения и приближения для дифференцируемых функций многих переменных. Усп. матем. н., 1961, т. 16, № 5, стр. 63—114.
6. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд. Ленингр. ун-та, 1950.
7. Слободецкий Л. Н. Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 2, стр. 243—246.
8. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.