

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТОНКОГО УПРУГОГО СЛОЯ

В. М. Александров

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается контактная задача о вдавливании штампа в упругий слой конечной толщины h , лежащий без трения или жестко сцепленный с недеформируемым основанием. Силы трения между штампом и поверхностью слоя предполагаются отсутствующими, вне штампа поверхность слоя не нагружена. Область контакта Ω штампа со слоем будем предполагать односвязной¹ и фиксированной.

В работах [1-3] получено асимптотическое решение указанной выше задачи в предположении, что относительная толщина слоя достаточно велика, т. е. велик безразмерный параметр $\lambda = h/a$, $a = 1/2 \max R_{PQ}$ при любых P и $Q \in \Omega$.

В работе [4] изложена схема построения асимптотического решения указанной задачи в предположении, что относительная толщина слоя мала.

В данной работе на базе основной идеи работы [4] дана более общая и удобная схема построения асимптотического решения задачи при малой относительной толщине слоя. Результаты представлены в виде простых формул, пригодных для практического использования.

§ 1. Основное интегральное уравнение задачи. Введение безразмерного параметра, характеризующего малость относительной толщины слоя. Как известно [1-3], указанная выше задача методами операционного исчисления приводится к решению интегрального уравнения

$$\iint_{\Omega} q(P) K\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega = 2\pi h \Delta \delta(Q), \quad Q \in \Omega \quad (1.1)$$

$$\Delta = G(1-\nu)^{-1}, \quad R = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$$

относительно функции распределения контактных давлений $q(P)$. Функция $\delta(Q)$ — осадка точек поверхности слоя под штампом — определяется формой основания штампа и степенью внедрения его в слой; G и ν — упругие постоянные слоя; (ξ, η) — координаты точки P ; (x, y) — точки Q .

Ядро интегрального уравнения (1.1) имеет вид

$$K(t) = \int_0^{\infty} L(u) J_0(ut) du \quad (1.2)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя, а функция $L(u)$ имеет вид

$$(a) \quad L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}$$

$$(б) \quad L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 1 + \kappa^2 + 4u^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu \quad (1.3)$$

Случаи (а) и (б) здесь и далее соответствуют случаям слоя, лежащего без трения или жестко сцепленного с недеформируемым основанием.

¹ Односвязность предположена лишь для простоты. Излагаемый ниже асимптотический метод решения может быть использован и в случае многосвязной области Ω .

Будем далее предполагать, что

1) функция $\delta(Q)$ достаточно гладкая в Ω ;

2) решение $q(P)$ интегрального уравнения (1.1) для задач (а) и (б) существует в классе $L(\Omega)$ (класс абсолютно суммируемых по области функций) и единственно;

3) осадка точек поверхности слоя $\gamma(Q)$ вне области контакта Ω принадлежит $L(\Omega^*)$ Ω^* — дополнение Ω до всей плоскости.

Для физически реальных случаев рассматриваемых задач функция $\delta(Q)$ должна быть еще строго положительной в Ω и такой, чтобы $q(P) \geq 0$ в Ω .

Опишем некоторые общие свойства функций $L(u)$ вида (1.3).

В плоскости комплексного переменного $z = u + iv$ функции $L(z)$ будут нечетными и мероморфными (отношение двух квазиполиномов), на оси $v = 0$ функции $L(z)$ действительны, имеют единственный однократный нуль $u = 0$ и не имеют полюсов. Счетное множество их комплексных нулей z_n и полюсов ζ_n находится на четырех, симметрично расположенных относительно мнимой и вещественной осей, ветвях. Все z_n и ζ_n различны¹, их модули возрастают с ростом n . При больших n имеют место простые асимптотические формулы

$$z_n = c_1 \ln n + ic_2 n, \quad \zeta_n = d_1 \ln n + id_2 n \quad (c_1, c_2, d_1, d_2 = \text{const}) \quad (1.4)$$

Учитывая все выше сказанное, можем представить функции $L(z)$ вида (1.3) в форме

$$L(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2 + \delta_n^2)}{(z^2 + \gamma_n^2)}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} L(z) z^{-1} = A = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta_n}{\gamma_n} \right)^2 \quad (1.5)$$

$$\delta_n = -iz_n, \quad \gamma_n = -i\zeta_n$$

Здесь z_n и ζ_n — соответственно нули и полюса, лежащие в полуплоскости $v > 0$.

Легко показать, что при больших значениях u функции $L(u)$ вида (1.3) ведут себя следующим образом:

$$L(u) = 1 + O(e^{-2u}) \quad (1.6)$$

Более того, можно показать, что в плоскости комплексного переменного z на любой правильной [5] системе контуров C_k имеет место оценка

$$L(z) = O(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

если $|\arg z| \leq 1/2\pi - \varepsilon$ и $|\arg z - \pi| \leq 1/2\pi - \varepsilon$; на мнимой оси ($u=0$)

$$L(z) = O(z^{-1}) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty \quad (1.8)$$

Используя (1.5), (1.7) и (1.8), можем представить мероморфные функции $L(z)$ вида (1.3) в виде суммы их главных частей [5]

$$L(u) = \frac{2u}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m s_m}{u^2 + \gamma_m^2}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} L(u) u^{-1} = A = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s_m}{\gamma_m} \quad (1.9)$$

¹ Для задачи (а) нули функции $L(z)$ — кратные, чисто мнимые, т. е. правая и левая ветви сливаются в одну на мнимой оси.

Можно показать, что ряд (1.9) равномерно сходится при всех $0 \leq u \leq D < \infty$. Постоянные s_m имеют вид

$$s_m = \pi i \left\{ \left[\frac{\xi_m}{L(\xi_m)} \right]' \right\}^{-1} \quad (s_m \sim \xi_m^{-1} \text{ при } m \rightarrow \infty) \quad (1.10)$$

Перейдем теперь к вопросу о безразмерном параметре, характеризующем малость относительной толщины слоя.

Заметим, что безразмерный параметр λ , введенный в работах [1—3], пригоден лишь для характеристики слоя большой относительной толщины, ибо из малости этого параметра в общем случае не следует малость относительной толщины слоя. Отсюда вытекает необходимость введения еще одного безразмерного геометрического параметра.

Проведем в точке A контура L нормаль (фигура), она пересечет контур L в ряде точек B, C, D . Измерим длины отрезков нормали от точки A до точек пересечения. Минимальную из всех возможных длин указанных отрезков нормалей для любых точек $A \in L$ обозначим через $2a_0$.

Введем теперь новый параметр μ соотношением

$$\mu = h [\text{Inf}(a_0, \rho_0)]^{-1} \quad (1.11)$$

где ρ_0 — минимальный радиус кривизны контура L . Отметим, что для выпуклой области Ω всегда $a_0 \geq \rho_0$.

Введенный параметр μ пригоден лишь для характеристики слоя относительно малой толщины.

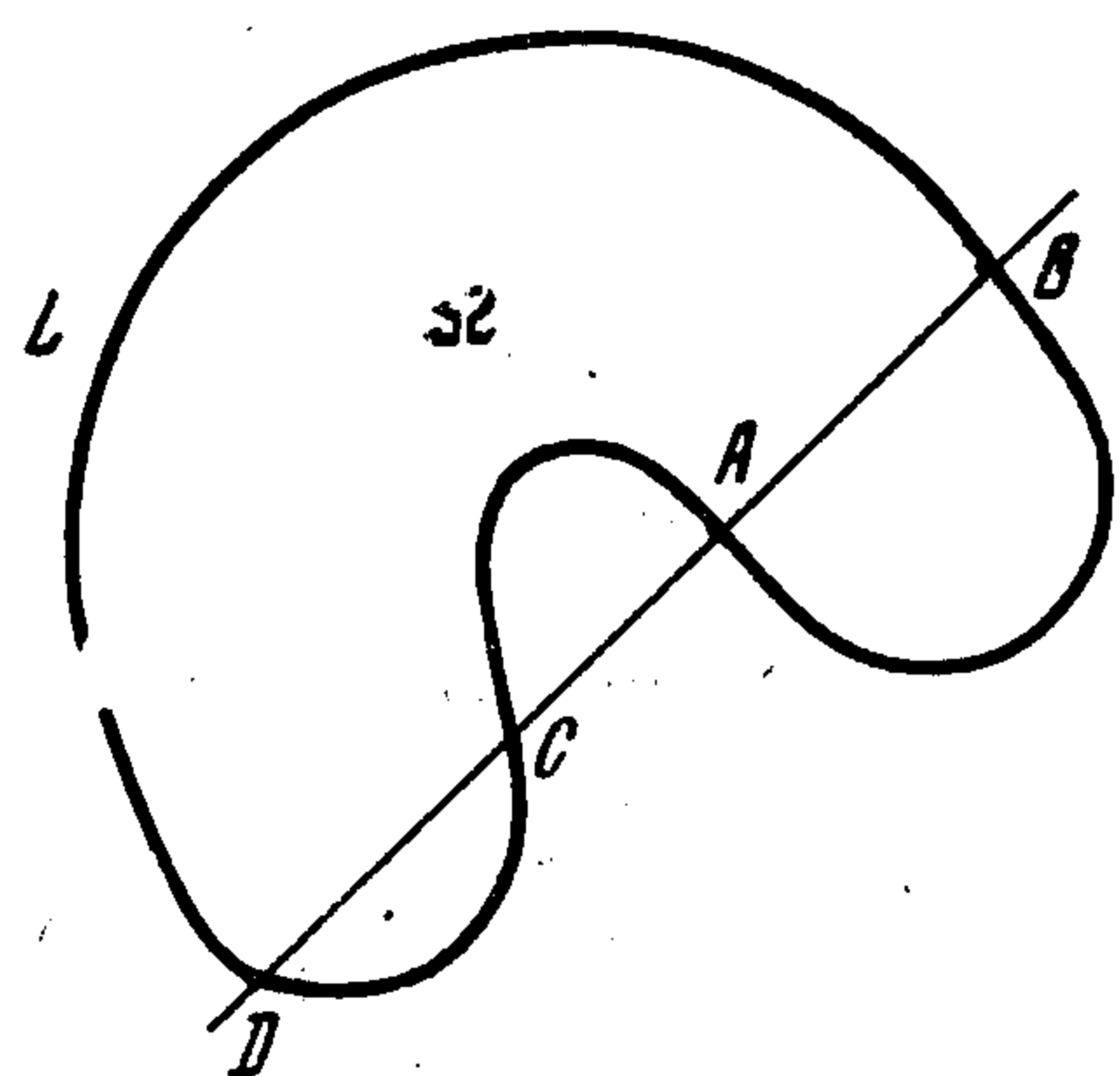
Заметим, что всегда $\mu \geq \lambda$. Равенство имеет место лишь тогда, когда область Ω — круг.

§ 2. Свойства ядра интегрального уравнения (1.1) Характер его решения. Укажем некоторые общие для обоих рассматриваемых задач свойства ядра $K(t)$ вида (1.2). Используя интеграл

$$\int_0^{\infty} J_0(ut) du = \frac{1}{t} \quad (2.1)$$

представим (1.2) в форме

$$K(t) = t^{-1} - F(t) \\ F(t) = \int_0^{\infty} [1 - L(u)] J_0(ut) du \quad (2.2)$$



Фиг. 1

Основываясь на приведенном выше свойстве (1.6) функций $L(u)$, легко показать, что четная по t функция $F(t)$ будет непрерывной и непрерывно дифференцируемой любое число раз при $0 \leq t < \infty$.

Если воспользоваться соотношением (1.9) и интегралом

$$\int_0^{\infty} \frac{u J_0(ua)}{u^2 + b^2} du = K_0(ab) \quad (2.3)$$

то можно получить другое представление для ядра $K(t)$

$$K(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m s_m K_0(\gamma_m t) \quad (2.4)$$

Не представляет труда доказать, что ряд (2.4) абсолютно и равномерно сходится при всех $0 < t \leq \infty$. Для этого достаточно воспользоваться соотношениями (1.4) и (1.11).

Перейдем теперь к вопросу о характере решения уравнения (1.1). Перепишем его на основании (2.2) в виде

$$\iint_{\Omega} q(P) \frac{d\Omega}{R} = 2\pi\Delta\delta(Q) + \frac{1}{h} \iint_{\Omega} q(P) F\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega, \quad Q \in \Omega \quad (2.5)$$

По предположению решение интегрального уравнения (1.1) или (2.5) существует в $L(\Omega)$. Тогда функция

$$\Phi(Q) = \iint_{\Omega} q(P) F\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega \quad (2.6)$$

в силу указанных свойств $F(t)$, будет непрерывной и непрерывно дифференцируемой любое число раз в Ω по x и y .

Из этого вытекают следующие результаты:

1) при $\lambda \rightarrow \infty$ интегральное уравнение (2.5) переходит в известное интегральное уравнение соответствующей контактной задачи для упругого полупространства

$$\iint_{\Omega} q(P) \frac{d\Omega}{R} = 2\pi\Delta\delta(Q), \quad Q \in \Omega \quad (2.7)$$

2) решение интегрального уравнения (2.5) или (1.1) контактной задачи для слоя будет такого же характера, что и решение интегрального уравнения (2.7) для полупространства при всех значениях безразмерных параметров λ и μ , отличных от нуля;

3) если известно решение интегрального уравнения (2.7) при заданных Ω и $\delta(Q)$, то для нахождения приближенного решения интегрального уравнения (2.5) или (1.1) при больших λ достаточно аппроксимировать функцию $F(t)$ вида (2.2) вырожденной; эта идея, собственно говоря, и использована в работах [1-3] для получения асимптотических при больших λ решений (1.1).

§ 3. Внутреннее решение интегрального уравнения (1.1) при малых μ . Рассмотрим вместо интегрального уравнения (1.1) эквивалентное ему функциональное уравнение

$$Q(\alpha, \beta) L(\gamma h) \gamma^{-1} = \Delta W(\alpha, \beta), \quad Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} q(P) e^{i(\alpha\xi + \beta\eta)} d\Omega \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = \begin{cases} q(Q) & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{в } \Omega^* \end{cases} \quad (3.2)$$

$$W(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \delta(P) e^{i(\alpha\xi + \beta\eta)} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega^*} \gamma(P) e^{i(\alpha\xi + \beta\eta)} d\Omega$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = \begin{cases} -\delta(Q) & \text{в } \Omega \\ -\gamma(Q) & \text{в } \Omega^* \end{cases}$$

На основании (3.1), (3.2) получим

$$q(Q) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma W(\alpha, \beta)}{L(\gamma h)} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad Q \in \Omega \quad (3.3)$$

или окончательно

$$q(Q) = \frac{\Delta}{2\pi h^3} \left[\iint_{\Omega} \delta(P) M\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega + \iint_{\Omega^*} \gamma(P) M\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega \right], \quad Q \in \Omega \quad (3.4)$$

$$M(t) = \int_0^{\infty} \frac{u^2}{L(u)} J_0(ut) du \quad (3.5)$$

Для функции $M(t)$ вида (3.5) может быть получено разложение

$$M(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \nu_m K_0(\delta_m t) \quad (3.6)$$

аналогично тому, как это было сделано в § 2 для ядра $K(t)$. По-прежнему можно показать, что ряд (3.6) абсолютно и равномерно сходится при всех $0 < \varepsilon \leq t \leq \infty$.

Рассмотрим геометрическое место точек $Q \in \Omega$ и отстоящих от границы области Ω по нормали не менее чем на $a_0 \varepsilon$ (определение величины a_0 см. в § 1). Очевидно эти точки занимают некоторую область $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$.

Теперь без труда для всех точек $Q \in \Omega_\varepsilon$ на основании (3.6) при малых значениях параметра μ получим следующую оценку второго интеграла в (3.4):

$$\left| \iint_{\Omega^*} \gamma(P) M\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega \right| = O \left[\left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{\mu} \operatorname{Re} \delta_1 \right) \right] \quad (3.7)$$

При выводе оценки также учтено, что $\gamma(Q) \in L(\Omega^*)$.

Таким образом, при малых μ имеет место асимптотическое соотношение

$$q(Q) = \frac{\Delta}{2\pi h^3} \iint_{\Omega} \delta(P) M\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega + O \left[\left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{\mu} \operatorname{Re} \delta_1 \right) \right], \quad Q \in \Omega_\varepsilon \quad (3.8)$$

Назовем его внутренним решением интегрального уравнения (1.1) при малых μ .

Продолжим как-то функцию $\delta(Q)$ в область Ω^* . Пусть, например, $\psi(Q) = \delta(Q)$ в Ω и $\psi(Q) = \delta^*(Q)$ в Ω^* . Потребуем только, чтобы функция $\psi(Q)$ на всей плоскости была абсолютно интегрируема. Тогда асимптотическое равенство (3.8) можно переписать в форме, более удобной для практического использования

$$q(Q) = \frac{\Delta}{2\pi h^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(P) M\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega + O \left[\left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{\mu} \operatorname{Re} \delta_1 \right) \right], \quad (3.9)$$

$$Q \in \Omega_\varepsilon$$

Рассмотрим в качестве примера случай $\delta(Q) \equiv \delta$ при $Q \in \Omega$ (плоский штамп). Опишем вокруг области Ω круг радиуса $a = 1/2 \max_{\Omega} R$ и возьмем в качестве функции $\psi(Q)$ следующую:

$$\psi(Q) = \delta \quad \text{при } r \leq a, \quad \psi(Q) = 0 \quad \text{при } r > a \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (3.10)$$

Тогда по формуле (3.9) после ряда преобразований получим следующее внутреннее решение:

$$q(Q) = \frac{\Delta\delta}{Ah} + O\left[\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\mu} \operatorname{Re} \delta_1\right)\right], \quad Q \in \Omega_\varepsilon \quad (3.11)$$

Заметим, что с точностью до экспоненциальной добавки формула (3.11) совпадает с вырожденным решением при малой относительной толщине слоя, данным в работе [3].

Аналогичным образом для случая $\delta(Q) = \gamma r^2/a^2$ при $Q \in \Omega$ (параболический штамп) получим внутреннее решение в виде

$$q(Q) = \frac{\Delta\gamma}{Ah} \left(\frac{r^2}{a^2} - 4D_1\lambda^2\right) + O\left[\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\mu} \operatorname{Re} \delta_1\right)\right], \quad Q \in \Omega_\varepsilon \quad (3.12)$$

Постоянная D_1 в (3.12) имеет вид

$$D_1 = \frac{A}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d^2}{du^2} \left(\frac{u}{L(u)}\right) \quad (3.13)$$

Постоянная A , входящая в формулы (3.11) — (3.13), определяется соотношением (1.5).

§ 4. Построение решения погранслового типа интегрального уравнения (1.1) при малых μ в области $\Omega - \Omega_\varepsilon$. Перепишем интегральное уравнение (1.1) в виде

$$\iint_{\Omega - \Omega_{\varepsilon_1}} q(P) K\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega + \iint_{\Omega_{\varepsilon_1}} q(P) K\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega = 2\pi h \Delta \delta(Q) \quad (4.1)$$

$Q \in \Omega, \quad 1 > \varepsilon_1 > \varepsilon$

Если теперь ограничиться рассмотрением области $Q \in \Omega - \Omega_\varepsilon$ и учесть, что функция $q(Q) \in L(\Omega_{\varepsilon_1})$, то на основании (4.1) будем иметь

$$\iint_{\Omega - \Omega_{\varepsilon_1}} q(P) K\left(\frac{R}{h}\right) d\Omega + O\left[V\bar{\mu} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\mu} \operatorname{Re} \gamma_1\right)\right] = 2\pi h \Delta \delta(Q) \quad (4.2)$$

$Q \in \Omega - \Omega_\varepsilon, \quad 1 > \varepsilon_1 > \varepsilon$

При выводе (4.2) также учтено соотношение (2.4).

Итак, необходимо найти решение интегрального уравнения (4.2) в области $\Omega - \Omega_{\varepsilon_1}$, где оно, очевидно, должно иметь погранслоевой вид, т. е. иметь особенность^[6] на контуре L вида $R^{-1/2}$ и быстро стремиться к внутреннему решению (3.8) при удалении от контура L в глубь области.

Для построения этого погранслового решения перейдем в (4.2) к новым переменным, связанным с контуром L .

Опустим из точки $A(x, y) \in \Omega - \Omega_\varepsilon$ нормаль на контур L , пусть длина этой нормали n , а точка пересечения ее с контуром $B(x_1, y_1)$. Выберем на контуре L какую-то точку $O(x_0, y_0)$ в качестве начала отсчета и измерим расстояние s между точками O и B по контуру L . Величины n и s примем за новые координаты точки A в криволинейной системе координат (n, s) . При условии $\varepsilon < 1$ и $-l/2 < s < l/2$ (l — периметр контура L) каждой паре чисел (x, y) в области $\Omega - \Omega_\varepsilon$ будет соответствовать только одна пара чисел (n, s) , и наоборот.

В системе координат (n, s) интегральное уравнение (4.2) примет вид

$$\int_0^{\varepsilon_1/\mu} d\beta \int_{-k/\mu}^{k/\mu} \varphi(\beta, \gamma) K(R_0) d\gamma + O\left[\mu^{-3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\mu} \operatorname{Re} \gamma_1\right)\right] = \frac{2\pi\Delta}{h} f(b, c) \quad (4.3)$$

$$0 \leq b \leq \varepsilon/\mu, \quad |c| \leq k/\mu, \quad 1 > \varepsilon_1 > \varepsilon$$

Здесь

$$b = n/h, \quad c = s/h, \quad \beta = v/h, \quad \gamma = \tau/h, \quad R_0 = R/h, \\ k = l/2a_0 \quad \varphi(\beta, \gamma) \equiv q(P), \quad f(b, c) \equiv \delta(Q) \quad (4.4)$$

Далее, для простоты изложения ограничимся рассмотрением важного частного случая¹

$$f(b, c) \equiv f(b) \quad (4.5)$$

Он охватывает случай осевой симметрии, а также все случаи штампов с плоскими основаниями ($\delta(Q) \equiv \text{const}$).

Для нахождения главного члена асимптотики решения интегрального уравнения (4.3) при малых μ устремим μ^{-1} к бесконечности в (4.3) и найдем решение полученного таким путем интегрального уравнения. Заметим, что стремление μ^{-1} к бесконечности равносильно в системе координат (n, s) распрямлению контура L в бесконечную прямую². При этом так же, как легко видеть, поясковая область $0 \leq b \leq \varepsilon/\mu, |c| \leq k/\mu$ разворачивается в полуплоскость, система координат (n, s) вырождается в прямоугольную, функция $\varphi(\beta, \gamma)$ оказывается зависящей лишь от переменной β , т. е. $\varphi(\beta, \gamma) \equiv \varphi(\beta)$.

Учитывая все сказанное, представим интегральное уравнение (4.3) при $\mu \rightarrow 0$ после взятия внутреннего интеграла по γ в форме

$$\int_0^{\infty} \varphi(\beta) N(\beta - b) d\beta = \frac{\pi\Delta f(b)}{h}, \quad 0 \leq b < \infty \quad (4.6)$$

$$N(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \quad (4.7)$$

¹ С небольшим усложнением может быть также изучен случай

$$f(b, c) = \sum_{n=0}^N f_n(b) \cos \zeta_n c \quad \left(\zeta_n = \frac{\pi n \mu}{k}\right)$$

² Из сказанного следует, что главный член асимптотики решения интегрального уравнения (4.3) при малых μ не будет зависеть от кривизны контура L в той или иной его точке. Однако влияние кривизны можно было бы учесть, приняв во внимание, что асимптотически при малых μ в окрестности каждой точки контура L с координатой s и радиусом кривизны $\rho(c)$ решение интегрального уравнения (4.3) совпадает с решением соответствующего интегрального уравнения для круглого в плане штампа радиуса $\rho(c)$, если $\rho(c) > 0$ и для штампа, представляющего собой в плане внешность круга радиуса $\rho(c)$, если $\rho(c) < 0$. Таким путем можно установить, что на контуре L поправка на кривизну имеет порядок $O[\lambda^2(c)]$, где $\lambda(c) = h[\rho(c)]$.⁻¹

Уравнение (4.6) представляет собой интегральное уравнение задачи о действии полубесконечного штампа на упругую полосу конечной толщины h работы [7]. Таким образом, главный член асимптотики решения интегрального уравнения (4.2) или интегрального уравнения (1.1) в области $\Omega - \Omega_\varepsilon$ при малых μ и условии (4.5) будет представлять собой плоский погранслой, определяемый из интегрального уравнения Винера — Хопфа (4.6), (4.7).

Введем в рассмотрение еще один погранслой, который назовем «внешним» в отличие от предыдущего «внутреннего».

Наличие внешнего погранслоя можно установить при изучении функции $\gamma(Q)$, — распределения осадок поверхности слоя в области Ω^* , т. е. вне штампа. Действительно, на контуре L области Ω функция $\gamma(Q)$ принимает какие-то конечные значения, а при удалении от контура L быстро стремится к нулю, причем тем быстрее, чем меньше относительная толщина слоя μ .

Если при определении внешнего погранслоя применить схему и рассуждения, аналогичные использованным выше при построении внутреннего погранслоя, а также ограничиться той же точностью, то окажется, что главная часть внешнего погранслоя тоже плоская и дается соотношением

$$\gamma(Q) \sim g(b) \quad \text{при} \quad Q \in \Omega^* - \Omega_\varepsilon^*, \quad \mu \rightarrow 0$$

$$g(b) = \frac{h}{\pi\Delta} \int_0^\infty \varphi(\beta) N(\beta - b) d\beta, \quad -\infty < b < 0 \quad (4.8)$$

Здесь $N(t)$ также имеет вид (4.7), область Ω_ε^* получается исключением из области Ω^* всех точек, отстоящих от контура L по нормали не менее чем на $a_0\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$.

Заметим, что $g(b)$ может быть найдено единым процессом с $\varphi(\beta)$ при решении интегрального уравнения Винера — Хопфа (4.6).

Перейдем к изучению вопроса о границах применимости установленного выше асимптотического при малых μ равенства

$$q(P) \sim \varphi(\beta) \quad \text{при} \quad P \in \Omega - \Omega_\varepsilon \quad (4.9)$$

Для этого сначала отметим то главное, что было положено в основу его вывода. Именно, был использован физически совершенно очевидный факт, что асимптотически при малых μ должно отсутствовать влияние напряженного состояния в окрестности какой-то одной точки контура L области Ω на напряженное состояние в окрестности любой другой точки контура L , т. е. асимптотически должно отсутствовать взаимовлияние различных точек контура L . Но это взаимовлияние может быть внутренним (через область Ω) и внешним (через область Ω^*). Отсюда сразу уже становится ясным значение изучения внешнего погранслоя.

Теперь ясно, что о границах применимости асимптотического равенства (4.9) можно судить лишь по скорости затухания внутреннего и внешнего погранслоев, т. е. иными словами по их «толщине».

Относительную толщину H_1 , H_2 погранслоев определим, соответственно, выражениями

$$H_1 = b_1 / h, \quad |\varphi(b_1) - \varphi^*(b_1)| [\varphi^*(b_1)]^{-1} = 0.025$$

$$H_2 = b_2 / h, \quad g(b_2) [g(0)]^{-1} = 0.025 \quad (4.10)$$

где $\varphi^*(b)$ — главная часть функции $\varphi(b)$ при $b \rightarrow \infty$. По методу построения функции $\varphi(b)$, изложенному выше, очевидно, что значение $\varphi^*(b_1)$ должно асимптотически совпадать с соответствующим значением внутреннего решения, определяемого одной из форм (3.8), (3.9).

Очертим, наконец, конкретно практические границы применимости асимптотического равенства (4.9). Для того чтобы асимптотически при малых μ отсутствовало взаимовлияние точек контура L , очевидно, достаточно, чтобы внутренний и внешний пограничные слои соответственно укладывались по толщине во внутренней $\Omega - \Omega_\varepsilon$ и внешней $\Omega^* - \Omega_\varepsilon^*$ областях.

Учитывая сказанное, получим условие

$$\mu \leq \varepsilon [\sup(H_1, H_2)]^{-1}, \quad \varepsilon < 1 \quad (4.11)$$

определяющее ориентировочно искомые границы.

В случае выпуклой области контакта Ω необходимость введения внешнего пограничного слоя отпадает, поэтому условие (4.11) в этом случае принимает более простой вид

$$\mu < \varepsilon H_1^{-1}, \quad \varepsilon < 1 \quad (4.12)$$

Подведем итоги. Функция $\varphi(\beta)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (4.6), дает главную часть асимптотики решения при малых μ интегрального уравнения (1.1) в области $\Omega - \Omega_\varepsilon$. Формула (3.8) или (3.9) дает решение интегрального уравнения (1.1) при малых μ в области Ω_ε . На границе области Ω_ε при выполнении соотношения (4.11) они асимптотически стыкуются, что ясно из схемы построения указанных решений и будет подтверждено ниже на примерах. Таким образом, в комплексе можно получить приближенное решение интегрального уравнения (1.1) при малых μ во всей области Ω с необходимой особенностью вида $R^{-1/2}$ на контуре L .

Техника подсчета контактных давлений в заданной точке $A \in \Omega$ сводится к следующему. Если $A \in \Omega_\varepsilon$, то подсчет ведется по внутреннему решению, если же $A \in \Omega - \Omega_\varepsilon$, то необходимо из этой точки опустить перпендикуляр на контур L , определить длину нормали n , а затем произвести подсчет контактных давлений в соответствии с (4.9).

§ 5. Примеры. Приближенная формула для определения силы P , действующей на штамп. Для получения практически приемлемых решений интегрального уравнения Винера — Хопфа (4.6), (4.7) воспользуемся идеей приближенной факторизации Койтера.

Аппроксимируем функцию $L(u)$, определяемую одной из формул (1.3), выражением

$$L^*(u) = u \frac{\sqrt{u^2 + B^2}}{u^2 + C} \quad (5.1)$$

и с учетом (5.1) получим решение уравнения (4.6), (4.7), а также найдем $g(b)$ в соответствии с (4.8).

Опуская традиционные выкладки, сопровождающие применение метода Винера — Хопфа [8], приведем окончательные выражения для $\varphi(b)$ и $g(b)$:

$$(1) f(b) \equiv \gamma$$

$$\varphi(b) = \frac{\Delta\gamma}{Dh} \left(\operatorname{erf} \sqrt{Bb} + \sqrt{\frac{D}{\pi b}} e^{-Bb} \right), \quad 0 \leq b < \infty, \quad D = BC^{-1} \quad (5.2)$$

$$g(b) = \gamma [1 - \operatorname{erf} \sqrt{-Bb} + \sqrt{1-k} e^{\sqrt{Cb}} \operatorname{erf} \sqrt{-Bb(1-k)}], \\ -\infty < b < 0, \quad k = \sqrt{CB}^{-1}$$

$$(2) f(b) = \gamma b$$

$$\varphi(b) = \frac{\Delta\gamma}{h} \left[\frac{b}{D} \operatorname{erf} \sqrt{Bb} - \frac{1}{\sqrt{\pi Bb}} e^{-Bb} \left(1 - \frac{\sqrt{C}}{2B} - \frac{b}{D} \right) \right], \quad 0 \leq b < \infty \quad (5.3)$$

$$(3) \quad f(b) = \gamma b^2$$

$$\varphi(b) = \frac{\Delta\gamma}{h} \left[\operatorname{erf} \sqrt{Bb} \left(\frac{b^2}{D} + \frac{C}{B^3} - \frac{2}{B} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi Bb}} e^{-Bb} \left(\frac{1}{B} - \frac{3\sqrt{C}}{4B^2} + \frac{Cb}{2B^2} - \frac{b^2}{D} \right) \right],$$

$$0 \leq b < \infty \quad (5.4)$$

Выражения функции $g(b)$ для случаев (2) и (3) далее не понадобятся.

Для возможности проведения конкретных вычислений, укажем значения постоянных B и C в аппроксимации (5.1) для обоих рассматриваемых задач. Выберем эти постоянные таким образом, чтобы

$$\lim \left[\frac{u}{L(u)} - \frac{u}{L^*(u)} \right] = 0, \quad \lim \frac{d^2}{du^2} \left[\frac{u}{L(u)} - \frac{u}{L^*(u)} \right] = 0 \quad \text{при } u \rightarrow 0 \quad (5.5)$$

Это, как видно из формул (3.11) и (3.12), необходимо для правильной стыковки пограничного решения в области $\Omega - \Omega_\varepsilon$ с внутренним решением в области Ω_ε (об этом еще см. ниже). Таким образом, получим:

для первой задачи

$$B = 1, \quad C = 2 \quad (5.6)$$

для второй задачи при $\nu = 0.3$

$$B = 1.037, \quad C = 2.540 \quad (5.7)$$

Определим теперь по формулам (4.10) толщины пограничных слоев для случаев (5.2) — (5.4). Будем иметь для задачи (а)

$$1) H_1 = 0.6 \quad H_2 = 1.1, \quad 2) H_1 = 0.9, \quad 3) H_1 = 1.3 \quad (5.8)$$

для задачи (б)

$$1) H_1 = 0.9 \quad H_2 = 0.8, \quad 2) H_1 = 1.1, \quad 3) H_1 = 1.3 \quad (5.9)$$

Интересно отметить, что у функции $g(b)$ для случая $f(b) \equiv \gamma$ имеется зона отрицательных значений. Это свидетельствует о том, что при вдавливании штампа в слой малой относительной толщины происходит небольшое выпучивание поверхности слоя вблизи границы штампа. Такое выпучивание в контактных задачах для упругого полупространства не наблюдается.

Перейдем к изучению случая плоского, произвольного в плане штампа ($\delta(Q) \equiv \delta$). Внутреннее решение для этого случая, как показано в § 3, имеет вид (см. (3.11))

$$q(Q) = \frac{\Delta\delta}{Ah} + O(e^{-d/\mu}), \quad Q \in \Omega_\varepsilon \quad (5.10)$$

где постоянная d при $\varepsilon = 0$ (9) для рассматриваемых задач соответственно равна

$$(a) \quad 3.142, \quad (b) \quad 0.877 \quad (\nu = 0.3) \quad (5.11)$$

Решение пограничного типа в области $\Omega - \Omega_\varepsilon$ дается первым соотношением (5.2). На границе области Ω_ε оно, с учетом (5.5), принимает вид

$$q(Q) = \frac{\Delta\delta}{Ah} + Q(e^{-d^*/\mu}) \quad (5.12)$$

где постоянная d^* при $\varepsilon = 0$ (9) для рассматриваемых задач соответственно равна

$$(a) \quad 1.000, \quad (b) \quad 1.037 \quad (\nu = 0.3) \quad (5.13)$$

Из сравнения формул (5.10) и (5.12) видно, что на границе области Ω_ε внутреннее решение и решение пограничного типа асимптотически при малых μ стыкуются, обеспечивая тем самым в комплексе приближенное определение контактных давлений во всей области Ω .

Ориентировочные границы использования такого комплекса найдем по формулам (4.11) и (4.12). Именно, принимая во внимание (5.8) и (5.9), получим в случае задачи (а) для произвольного в плане штампа $\mu < 0.91$, для выпуклого в плане штампа $\mu < 1.67$, в случае задачи (б) для произвольного и выпуклого в плане штампа $\mu < 1.11$. При вычислениях принято $\varepsilon = 0$ (9).

Остановимся подробнее на случае плоского эллиптического в плане штампа (Ω — эллипс с полуосями a и b , $a > b$).

Учитывая, что минимальный радиус кривизны эллипса равен $a(1 - e^2)$, e — эксцентриситет, получим следующую связь между параметрами λ и μ :

$$\mu = \lambda (1 - e^2)^{-1} \quad (5.14)$$

Принимая во внимание, что при $x = 0$ координата $n = b - y$, а при $y = 0$ координата $n = a - x$, на основании первой формулы (5.2) и формулы (5.10) получим следующие приближенные соотношения для подсчета контактных давлений на осях эллиптической области Ω :

$$\begin{aligned} q(x, 0) &= \frac{\Delta\delta}{Ah} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{B(a-x)}{h} \right)^{1/2} + \left(\frac{Ah}{\pi(a-x)} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{B(a-x)}{h} \right] \right\} \\ q(0, y) &= \frac{\Delta\delta}{Ah} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{B(b-y)}{h} \right)^{1/2} + \left(\frac{Ah}{\pi(b-y)} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{B(b-y)}{h} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Для плоского, круглого в плане штампа будем иметь

$$q(r) = \frac{\Delta\delta}{Ah} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{B(a-r)}{h} \right)^{1/2} + \left(\frac{Ah}{\pi(a-r)} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{B(a-r)}{h} \right] \right\}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.16)$$

Из условий статики для штампа найдем теперь связь между силой P , действующей на плоский, круглый штамп, и его осадкой δ

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi\Delta\delta a^2}{Ah} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{B}{\lambda} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\lambda}{B} + \frac{3\lambda^2}{4B^2} + 2\lambda \sqrt{\frac{A}{B}} - \lambda^2 \frac{\sqrt{A}}{B^{3/2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\lambda}{\pi B} \right)^{1/2} e^{-B/\lambda} \left(1 - \frac{3\lambda}{2B} + 2\lambda \left(\frac{A}{B} \right)^{1/2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Заметим, что получение аналогичной формулы для силы P в случае произвольного в плане (в частности эллиптического) плоского штампа затруднено из-за отсутствия единого аналитического выражения для контактных давлений на всей области контакта Ω , аналогичного (5.16). Ввиду этого изложим ниже приближенный способ определения силы P , действующей на произвольный в плане плоский штамп, при малых μ .

Учитывая первую формулу (5.2) и формулу (5.10), представим асимптотическое при малых μ решение для произвольного в плане плоского штампа в виде

$$q(Q) \sim \frac{\Delta\delta}{Ah} \left[1 + \begin{cases} 0, & Q \in \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{erf} \sqrt{Bn/h} - 1 + \sqrt{Ah/\pi n} \exp(-Bn/h), & Q \in \Omega - \Omega_\varepsilon \end{cases} \right] \quad (5.18)$$

Теперь для силы P , действующей на штамп, получим следующее приближенное соотношение:

$$P = \frac{\Delta\delta}{Ah} \left\{ S + lh \int_0^{1/\mu} \left[\operatorname{erf} \sqrt{Bb} - 1 + \sqrt{\frac{A}{\pi b}} \exp(-Bb) \right] db \right\} \quad (5.19)$$

где S — площадь области Ω , l — периметр контура L , ε принято равным единице. Полагая в (5.19) асимптотически при малых μ верхний предел интеграла равным бесконечности и вычисляя интеграл, окончательно получим

$$P = \frac{\Delta\delta}{Ah} \left[S + hl \left(\sqrt{\frac{A}{B}} - \frac{1}{2B} \right) \right] = \frac{\Delta\delta}{Ah} (S + phl) \quad (5.20)$$

Здесь постоянная p для рассматриваемых задач, соответственно, равна

$$(a) \quad 0.2071, \quad (b) \quad 0.1453 \quad (5.21)$$

Легко заметить, что для случая круглого штампа приближенная формула (5.20) дает два первых члена асимптотики формулы (5.17) при малых λ . Результаты численного сравнения формулы (5.20) и (5.17) для случая круглого штампа даны в таблице. Для удобства обозначено $\kappa = P(4\Delta\delta a)^{-1}$. В последней колонке таблицы приведены соответствующие значения величины κ , полученные в работе [9] совершенно другим путем.

		(5.17)		(5.20)		[9]	
		1	$1/2$	1	$1/2$	1	$1/2$
(a)	κ	2.23	3.81	2.22	3.79	2.20	3.72
(б)	κ	2.57	4.48	2.48	4.41	2.48	4.34

Для случая эллиптического в плане штампа приближенная формула (5.20) принимает вид

$$P = \frac{\Delta\delta a}{A\lambda} [\pi \sqrt{1-e^2} + 4p\lambda E(e)] \quad (5.22)$$

где $E(e)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Приступим к изучению случая круглого в плане параболического штампа

$$\delta(r) = \delta - \gamma r^2/a^2 = (\delta - \gamma) + 2\gamma\lambda b - \gamma\lambda^2 b^2 \quad (5.23)$$

Внутреннее решение для этого случая на основании формул (3.11) и (3.12) имеет вид

$$q(r) \sim \frac{\Delta}{Ah} \left[\delta - \gamma \left(\frac{r^2}{a^2} - 4D_1\lambda^2 \right) \right], \quad r \in \Omega_\epsilon \quad (5.24)$$

Решение погранслового типа в области $\Omega - \Omega_\epsilon$ составим по первой формуле (5.2) и формулам (5.3), (5.4), (5.23). Будем иметь

$$q(r) = \frac{\Delta}{Ah} \operatorname{erf} \left(\frac{B(a-r)}{h} \right)^{1/2} \left[\delta - \gamma \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{B^2} - \frac{2A\lambda^2}{B} \right) \right] + \\ + \frac{\Delta}{\sqrt{\pi Ah(a-r)}} \exp \left(-B \frac{a-r}{h} \right) \left\{ \delta - \gamma \left[1 - \frac{1}{\sqrt{AB}} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\lambda}{2\sqrt{AB^{3/2}}} \left(1 - \frac{r}{a} \right) + \lambda \left(2\sqrt{\frac{A}{B}} - \frac{1}{B} \right) + \lambda^2 \left(\frac{3}{4B^2} - \frac{\sqrt{A}}{B^{3/2}} \right) \right] \right\}, \quad r \in \Omega - \Omega_\epsilon \quad (5.25)$$

Как уже отмечалось выше, выполнение условий (5.5) обеспечивает правильную асимптотическую стыковку внутреннего решения и погранслового решения, основанного на аппроксимации (5.1). Действительно, если принять во внимание соотношение

$$\frac{A}{2B} - \frac{1}{4B^2} = D_1 \quad (5.26)$$

справедливость которого вытекает из (5.5), то главный член асимптотики (5.25) при малых λ на границе Ω_ϵ , как легко видеть, совпадает с (5.24).

Отсюда следует, что асимптотическое при малых λ решение задачи для круглого параболического штампа может быть представлено единым аналитическим выражением на всей области контакта Ω в виде (5.25).

Получим теперь в случае параболического штампа асимптотическое при малых λ решение, обращающееся в нуль на контуре области Ω , т. е. при $r = a$. На основании (5.25) найдем

$$q(r) = \frac{\Delta\gamma}{Ah} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{B(a-r)}{h} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{r^2}{a^2} + \lambda \left(1 + \lambda \left(\frac{A}{B} \right)^{1/2} \right) \left(2 \left(\frac{A}{B} \right)^{1/2} - \frac{1}{B} \right) - \frac{\lambda^2}{4B^2} \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\lambda(a-r)}{\pi a B} \right)^{1/2} \exp \left(-B \frac{a-r}{h} \right) \left(1 + \frac{r}{a} + \frac{\lambda}{2B} \right) \right\} \quad (5.27)$$

при условии

$$\delta = \gamma \left(1 + 2\lambda \left(\frac{A}{B} \right)^{1/2} - \frac{\lambda}{B} + \frac{3\lambda^2}{4B^2} - \frac{\lambda^2 \sqrt{A}}{B^{3/2}} \right) \quad (5.28)$$

которое может служить для определения радиуса a области контакта Ω при заданных δ и γ .

Для силы P , действующей на параболический штамп, получим выражение

$$P = \frac{2\pi\Delta\gamma a}{A} \left\{ \lambda \left(\frac{A}{B} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\lambda}{2B} + \lambda \left(\frac{A}{B} \right)^{1/2} \right) \left[\operatorname{erf} \left(\frac{B}{\lambda} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{B} + \frac{3\lambda}{4B^2} \right) + \frac{e^{-B/\lambda}}{\sqrt{\pi B \lambda}} \left(1 - \frac{3\lambda}{2B} \right) \right] + \operatorname{erf} \sqrt{\frac{B}{\lambda}} \left(\frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{2B} + \frac{5\lambda}{8B^2} - \frac{3\lambda^2}{8B^3} - \frac{15\lambda^3}{64B^4} \right) + \frac{e^{-B/\lambda}}{\sqrt{\pi B \lambda}} \left(\frac{1}{4} - \frac{5\lambda}{8B} + \frac{17\lambda^2}{16B^2} + \frac{15\lambda^3}{32B^3} \right) \right\} \quad (5.29)$$

Границы применимости по λ формул (5.25), (5.27) — (5.29) определим в соответствии с (4.12) и (5.8), (5.9). Для обеих рассматриваемых задач при $\varepsilon = 0$ (9) будем иметь $\lambda < 0.77$.

Получим, наконец, асимптотическое при малых λ решение для круглого в плане наклонного штампа. Пусть $\delta(Q) = \alpha r a^{-1} \cos \varphi$, тогда, как известно, $q(Q) = q_1(r) \cos \varphi$; r и φ — полярные координаты. Функция $q_1(r)$ может быть получена дифференцированием по r правой части формулы (5.27) ([10], § 1), при этом только необходимо заменить $-2\gamma a^{-1}$ на α . Таким путем найдем

$$q_1(r) = \frac{\Delta\alpha}{Ah} \left\{ \frac{r}{a} \operatorname{erf} \left(\frac{B(a-r)}{h} \right)^{1/2} + \left(\frac{h}{\pi B(a-r)} \right)^{1/2} \exp \left(-B \frac{a-r}{h} \right) \left[\sqrt{AB} \left(1 - \frac{\lambda}{2B} + \lambda \left(\frac{A}{B} \right)^{1/2} \right) - 1 + \frac{r}{a} \right] \right\} \quad (5.30)$$

Значение момента M , приложенного к круглому наклонному штампу, как можно показать, с точностью до знака совпадает со значением силы P , определяемым выражением (5.29). При этом только нужно заменить $-2\gamma a^{-1}$ на α .

Поступила 6 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
2. Александров В. М. К задаче о действии штампа на упругий слой конечной толщины. Материалы III научной конференции аспирантов. Изд-во Ростовск. ун-та, 1961.
3. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для упругого слоя. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
4. Александров В. М. К решению одного типа двумерных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
6. Ворович И. И. О поведении решений основных краевых задач плоской теории упругости в окрестности особых точек границы. III Всес. съезд по теор. и прикладн. механ., Аннот. докл. М., «Наука», 1968.
7. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
8. Нобл В. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Пупырев В. А., Уфлянд Я. С. Некоторые контактные задачи для упругого слоя. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
10. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.