Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В. А. Бабешко

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются интегральные уравнения, к которым сводится ряд динамических смешанных задач теории упругости, гидромеханики, математической физики. Особенностью этих интегральных уравнений будет неубывание ядра $k(t)$ при $t \to \infty$.

Это обстоятельство существенно затрудняет исследование указанных интегральных уравнений и не позволяет непосредственно применить методы асимптотического разложения, разработанные в [1,2] и основанные на использовании уравнений Винера—Хопфа.

Ниже приводится исследование одного класса интегральных уравнений с указанными свойствами, дается метод построения его решения и даются некоторые приложения к динамическим контактным задачам.

§ 1. Будем рассматривать интегральное уравнение вида

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\, q(\xi)\, d\xi = \pi \cos \eta x, \quad |x| \leqslant a \tag{1.1}$$

$$k(t) = \int_0^\infty K(u) \cos ut\, du \tag{1.2}$$

Здесь $K(z)$ — четная, мероморфная в комплексной плоскости функция, не имеющая нулей и полюсов вне координатных осей, действительная на действительной оси.

Будем считать [1], что асимптотика мнимых нулей и полюсов верхней полуплоскости дается соотношением

$$z_n \sim i(\beta n + b) + o(n^{-1}), \qquad \zeta_n \sim i(\beta n + g) + o(n^{-1}), \qquad n \to \infty$$
$$|\xi_n| < |z_n| \qquad 0 < b - g < \beta \tag{1.3}$$

На положительной части вещественной оси находится m нулей и p полюсов (обозначим их первыми индексами), т. е.

$$\operatorname{Im} z_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, m; \qquad \operatorname{Im} \zeta_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

Предполагаем, что кратных нулей и полюсов нет. Очевидно

$$K(z) = A \prod_{k-1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{z_k^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\zeta_k^2}\right)^{-1} \tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение функцию вида

$$K_+(z) = \sqrt{A} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{z_k}\right)\left(1 + \frac{z}{\zeta_k}\right)^{-1} \tag{1.5}$$

[1] См. замечания 4.1 и 4.2.

которая с учетом (1.3), как нетрудно проверить, существует и является мероморфной в комплексной плоскости.

Лемма 1.1. Справедливы оценки

$$K(z) \sim c|z|^{-2\gamma} + o(z^{-2\gamma}), \qquad |\arg z \pm \pi/2| > \varepsilon > 0$$
$$K_+(z) \sim c|z|^{-\gamma} + o(z^{-\gamma}), \qquad |\arg z - \pi/2| > \varepsilon > 0$$
$$K_+'(-z_l) \sim cl^{-\gamma} + o(l^{-\gamma}), \qquad l \to \infty$$
$$[K_+^{-1}(-\zeta_l)]' \sim cl^{\gamma} + o(l^{\gamma}), \qquad \gamma = (b-g)\beta^{-1}$$

Оценки устанавливаются при помощи формулы суммирования Эйлера—Маклорена [3], примененной к логарифмам функций $K(z)$, $K_+(z)$, которые берутся в смысле (1.5). Понимая интеграл (1.2) в смысле главного значения, можно представить его в форме ряда по вычетам вида

$$k(t) = \sum_{k=1}^{p} is_k \sin\zeta_k |t| + \sum_{k=p+1}^{\infty} s_k \exp i\zeta_k |t|, \quad s_k = \frac{\pi i}{[K^{-1}(\zeta_k)]'} \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть на основании свойств (1.3) и леммы 1.1, что

$$k(t) = O(t^{2\gamma-1}), \quad \gamma \neq 0.5; \quad k(t) = O(\ln t), \quad \gamma = 0.5, \quad t \to 0 \tag{1.7}$$

и ряд (1.6) равномерно сходится при $t \geqslant \delta > 0$.

На бесконечности ядро не будет убывающим, а всего лишь ограничено [1].

§ 2. Будем искать решение интегрального уравнения в форме

$$q(\xi) = B_0 \cos\eta\xi + 2\sum_{l=1}^{\infty} x_l e^{iz_l a} \cos z_l \xi \tag{2.1}$$

Здесь $q(\xi) \in L_p(-a, a)$, $p < \gamma^{-1}$. Очевидно, ряд (2.1) равномерно сходится в любом интервале строго внутреннем к $[-a, a]$, если $\{x_l\} \in l_p$, $p > 1$, причем $q(\xi)$ в точках $-a$, a имеет особенность, порядок которой не выше $t^{-\gamma}$.

Учитывая вышесказанное и сопоставляя с (1.7), заключаем, что можно вычислить интеграл в левой части (1.1), пользуясь разложениями (1.6), (2.1). Используя результаты работы [4], придем к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, эквивалентной интегральному уравнению (1.1)

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta_r - z_l} + \frac{\exp(-2ia\zeta_r) + \exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l} + \frac{\exp 2ai(z_l - \zeta_r)}{\zeta_r - z_l}\right)x_l =$$
$$= -2\,\frac{\exp -i\zeta_r a}{K(\eta)}\left[\frac{\cos(\zeta_r + \eta)a}{\zeta_r + \eta} + \frac{\cos(\zeta_r - \eta)a}{\zeta_r - \eta}\right] \quad (r = 1, 2, \ldots, p) \tag{2.2}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta_r - z_l} + \frac{\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l}\right)x_l = 2\,\frac{\zeta_r \cos\eta a - i\eta \sin\eta a}{(\eta^2 - \zeta_r^2)K(\eta)} \quad (r = p+1, \ldots) \tag{2.3}$$

Отметим некоторые особенности полученной системы.

1. Если учесть, что для вещественности функции $q(\xi)$ необходимо, чтобы

$$\operatorname{Im} x_l e^{iz_l a} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, m)$$

то система вещественна.

---

[1] См. замечание 4.1.

2. Если $m > 0$ или $p > 0$, то коэффициенты бесконечной матрицы н имеют предела при $a \to \infty$. Этим система (2.2), (2.3) существенно отличается от аналогичной, полученной в [4,5]. Это означает, что имея решение уравнения, соответствующее полуоси, нельзя утверждать, что оно будет пределом решения уравнения (1.1), при $a \to \infty$.

Отсюда следует, что метод работ [1,2] не позволяет в данном случае построить приближенное решение уравнения (1.1).

Для исследования системы (2.2), (2.3) представим ее в матричной форме вида

$$[A + B(a)]X = D \tag{2.4}$$

$$A = \{a_{r,l}\} = \{(\zeta_r - z_l)^{-1}\}, \qquad X = \{x_l\} \in l_p, \quad p > 1$$

$$B(a) = \{b_{r,l}\} = \frac{\exp 2aiz_l + \exp(-2i\zeta_r a)}{\zeta_r + z_l} + \frac{\exp 2ai(z_l - \zeta_r)}{\zeta_r - z_l} \quad (r = 1, 2, \ldots, p)$$

$$B(a) = \{b_{r,l}\} = \frac{\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l} \qquad (r = p + 1, \ldots) \tag{2.5}$$

Здесь $D = \{d_r\}$ — последовательность, стоящая в правой части уравнений (2.2), (2.3).

§ 3. Матрица $A + B(a)$ порождает некоторый оператор, переводящий элементы пространства l_p, $p > 1$ в некоторое пространство l_q. Исследуем ее свойства.

Теорема 3.1. Оператор $B(a)$, $a > 0$ вполне непрерывен как оператор, действующий в l_p, $p > 1$.

Достаточно убедиться, что порядок главного члена последовательности $B(a)X$, ($X \in l_p$) есть r^{-1} при $r \to \infty$. Последнее легко проверяется.

Установим, что оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}, действующий в некотором l_q. Рассмотрим интеграл вида

$$J_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{K_+'(-z_l)} \int\limits_{c_n} \frac{K_+(-t)\,dt}{(t - \eta)(z - t)}$$

Здесь c_n — окружность с центром в начале координат и радиусом R_n, $|z_n| < R_n < |\xi_{n+1}|$. Если теперь устремить $n \to \infty$, то в силу оценок леммы $J_n \to 0$. Применяя для вычисления интеграла теорию вычетов, получим соотношение вида

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{[K_+^{-1}(-\xi_r)]' K_+'(-z_l)(\zeta_r - \eta)(\zeta_r - z)} = \frac{1}{K_+'(-z_l)} \frac{K_+(-\eta) - K_+(-z)}{z - \eta}$$

Производя в этом соотношении предельный переход при $z \to z_l$, $\eta \to z_k$, переходим к равенствам

$$\sum_{r=1}^{\infty} \tau_{l,r} a_{r,k} = \begin{cases} 1 & (l = k) \\ 0 & (l \neq k) \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь

$$\tau_{l,r} = \frac{1}{[K_+^{-1}(-\zeta_r)]' K_+'(-z_l)(\zeta_r - z_l)} \tag{3.2}$$

Если ввести обозначение $A^{-1} = \{\tau_{l,r}\}$, то соотношение (3.1) означает, что A^{-1} есть матрица левосторонняя, обратная A. Совершенно аналогично устанавливается, что эта же матрица будет и правосторонней обратной.

Теорема 3.2. Матрица A^{-1} будет единственной двусторонней обратной матрице A (см., например, [6]).

Предложение теоремы означает, что матрица A не имеет другой двусторонней обратной, отличной от построенной, для которой произведение $A^{-1}A\ A^{-1}$ ассоциативно.

Для доказательства этой теоремы достаточно установить ассоциативность произведения $A^{-1}AA^{-1}$, т. е. установить абсолютную сходимость двойного ряда. На основании оценок леммы это легко проверяется.

Теорема 3.3. Если $d_r = O(r^{-1})$ $(r \to \infty)$, то $A^{-1}D$ будет единственным решением уравнения $AX = D$.

Достаточно [6] установить ассоциативность произведения $AA^{-1}D$.

Теорема 3.4. Оператор $A^{-1}B$, действуя в l_p, $p > (1-\gamma)^{-1}$ вполне непрерывен.

При помощи оценок леммы для элементов последовательности $A^{-1}BX$, $X \in l_q$, устанавливается соотношение

$$|y_r| = \|X\| O(r^{\gamma-1}) \qquad (r \to \infty)$$

обеспечивающее компактность множества $Y = A^{-1}BX$ в l_p, $p > (1-\gamma)^{-1}$.

На основании теорем 3.1 — 3.4 уравнение (2.4) можно представить в форме уравнения второго рода с вполне непрерывным оператором в l_p

$$X = -A^{-1}B(a)X + A^{-1}D \tag{3.3}$$

§ 4. Остановимся на построении асимптотического при $a \to \infty$ решения интегрального уравнения (1.1). Как видно из (2.5), элементы матрицы $B(z)$ будут целыми функциями, причем часть из них исчезает при $\mathrm{Re}\, z \to \infty$, другая же часть — ограничена.

Произведем следующее расщепление матрицы:

$$B(z) = P_m(z) + Q_p(z) + B_0(z) \tag{4.1}$$

Стоящие справа матрицы, соответственно, имеют следующие элементы:

$$P_m = \{p_{r,l}^{m}\}, \qquad Q_p = \{q_{r,l}^{p}\}, \qquad B_0 = \{b_{r,l}^{\circ}\} \tag{4.2}$$

$$p_{r,l}^{m} = \begin{cases} (\zeta_r + z_l)^{-1} \exp 2ziz_l & (l = 1, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots) \\ 0 & (l = m+1, \ldots) \end{cases}$$

$$q_{r,l}^{p} = \begin{cases} [(\zeta_r + z_l)^{-1} + (\zeta_r - z_l)^{-1} \exp 2ziz_l] \exp(-2zi\zeta_r) & (r = 1, \ldots, p) \\ 0, & (l = 1, 2, \ldots;\ r = p+1, \ldots) \end{cases}$$

$$b_{r,l}^{\circ} = \begin{cases} (\zeta_r + z_l)^{-1} \exp 2ziz_l & (r = p+1, \ldots;\ l = m+1, \ldots) \\ 0 & (\text{в остальных случаях}) \end{cases}$$

Очевидно матрица $B_0(z)$ обладает тем свойством, что все ее элементы стремятся к нулю при $\mathrm{Re}\, z \to \infty$.

Таким образом, построив решение бесконечной системы

$$[A + P_m(z) + Q_p(z)]Y(m, p) = D \tag{4.3}$$

придем к задаче, рассмотренной в [5].

В уравнении (4.3) матрица A возмущается m бесконечными столбцами матрицы P_m и p бесконечными строками матрицы Q_p. Решение задачи о возмущении бесконечной матрицы конечным числом столбцов рассмотрено в работе [5], где построено решение уравнения

$$A_1 Y(m, 0) \equiv [A + P_m] Y(m, 0) = D \tag{4.4}$$

Таким образом, необходимо построить решение системы вида

$$[A_1 + Q_p] Y(m, p) = D \tag{4.5}$$

Аналогично тому, как это сделано в [5], доказывается следующая лемма.

Лемма 4.1. Решение системы

$$[A + Q_n(z)]\, T_n = D \tag{4.6}$$

определяется рекуррентной формулой

$$T_n = \{t_l(n)\} = \left\{t_l(n-1) - \frac{\tau_{l,n}(n-1)\,\sigma(n)}{1 + \delta_{n,n}(n-1)}\right\}, \qquad T_0 = \{t_l(0)\}$$

Здесь

$$\sigma(n) = (Q_n - Q_{n-1})\, T_{n-1}, \qquad A^{-1} = \{\tau_{l,k}(0)\}$$
$$[A + Q_k]^{-1} = \{\tau_{l,m}(k)\} = \left\{\tau_{l,m}(k-1) - \frac{\tau_{l,k}(k-1)\,\delta_{k,m}(k-1)}{1 + \delta_{k,k}(k-1)}\right\} \tag{4.7}$$
$$\{\delta_{n,r}(k)\} = (Q_n - Q_{n-1})(A + Q_k)^{-1}$$

Решение может не существовать на счетном множестве нулей функции $1 + \delta_{n,n}(n-1)$. Лемма справедлива, если все, входящие в (4.7) ряды, сходятся, что выполняется в рассматриваемом случае.

Применив лемму 4.1 к уравнению (4.5), перепишем теперь исходное уравнение (2.4) в форме

$$[A_2 + B_0(z)] X = D \tag{4.8}$$

Решением этого уравнения при $B_0 \equiv 0$ очевидно будет $Y(m, p)$. Известна также и матрица A_2^{-1}. Таким образом, к уравнению (4.8) можно применить результаты работ [4,5] и построить его решение в эффективной форме во всей правой полуплоскости; это означает следующее. При достаточно больших $\operatorname{Re} z$ методом последовательных приближений строим решение системы (4.8). На основании (3.3) и аналитичности коэффициентов по z заключаем, что резольвента в качестве особенностей имеет только полюса.

Методом работы [5] продолжаем резольвенту во всю область $\operatorname{Re} z > 0$. При $z = a$ получим решение системы (2.4). Используя метод [4], заключаем, что асимптотические свойства решения системы (4.8) описываются соотношением

$$X = Y(m, p) + O(\exp(-2a\,|z_{m+1}|)) \tag{4.9}$$

Отсюда следует, что для построения нулевого члена асимптотики решения уравнения (1.1) при $a \to \infty$ необходимо использовать $Y(m, p)$, причем эффективность такого решения уменьшается с уменьшением $|z_{m+1}|$.

Замечание 4.1. Если окажется, что полюс функции $K(z)$ имеет кратность n, то перед соответствующей гармоникой в (1.6) приобретается полином степени $n - 1$. Кратный полюс на вещественной оси понимается как предельное положение полюсов, скользящих по вещественной оси — это один из способов регуляризации интеграла.

Замечание 4.2. Если окажется, что нуль функции $K(z)$ имеет кратность n, то перед соответствующей гармоникой в (2.1) приобретается полином порядка $n-1$; если, кроме того, нуль равен η, то степень полинома повышается еще на единицу.

Замечание 4.3. Указанные свойства ядра интегрального уравнения (1.1) не препятствуют применению методов работ [7,8] для построения асимптотического решения при $a \to 0$.

§ 5. Построим нулевой член асимптотики решения при $a \to \infty$ для случая, когда p и m изменяются от нуля до единицы.

1. Положим $p = m = 0$. Нулевой член асимптотики дается соотношением [5]

$$q(x) = \frac{\cos \eta x}{K(\eta)} - 2\sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\eta a}}{(z_l+\eta)K_+(-\eta)} + \frac{e^{-i\eta a}}{(z_l-\eta)K_+(\eta)}\right]\frac{e^{iz_l a}\cos z_l x}{K_+'(-z_l)} + O(e^{-2a|z_1|}) \tag{5.1}$$

Вопрос о представлении этого ряда в эффективной форме и выделения особенностей рассмотрен в работах [1,2] и других авторов и на этом останавливаться не будем.

2. Положим $p = 1$, $m = 0$. Для построения нулевого члена асимптотики очевидно необходимо решить систему (4.5) при $p = 1$, $m = 0$.

Предварительно построим $Y(0, 0) = \{y_l(0)\} = A^{-1}D$. Используя (2.2), (3.2), получим $Y(0, 0)$ в форме

$$y_l(0) = \left\{-\left[\frac{e^{i\eta a}}{(z_l+\eta)K_+(-\eta)} + \frac{e^{-i\eta a}}{(z_l-\eta)K_+(\eta)}\right]\frac{1}{K_+'(-z_l)} - \left[\frac{\zeta_1\cos\eta a - i\eta\sin\eta a}{\eta^2-\zeta_1^2} + \right.\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\cos(\zeta_1+\eta)a}{\zeta_1+\eta} + \frac{\cos(\zeta_1-\eta)a}{\zeta_1-\eta}\right)\exp -i\zeta_1 a\right]\frac{1}{K(\eta)[K_+^{-1}(-\zeta_1)]'K_+'(-z_l)(\zeta_1-z_l)}$$

Теперь, воспользовавшись формулой (4.7), вычислим $\delta_{1,1}(0)$, $\sigma(1)$. В результате получим соотношения вида

$$\delta_{1,1}(0) = \frac{e^{-2ai\zeta_1}}{[K_+^{-1}(-\zeta_1)]'}\left[\frac{1}{2\zeta_1 K_+(\zeta_1)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon}\frac{e^{-2aiz}\,dz}{K_+(z)(\zeta_1+z)^2}\right]$$

$$\sigma(1) = \frac{e^{-2ai\zeta_1}}{K(\eta)}\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\frac{(t\cos\eta a - i\eta\sin\eta a)K_+(-t)}{\eta^2-t^2}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon}\frac{e^{-2aiz}\,dz\,dt}{K_+(z)(z+\zeta_1)(z+t)} + \right.$$
$$+ \frac{1}{\pi i K_+(\zeta_1)}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\frac{(z\cos\eta a - i\eta\sin\eta a)K_+(-z)\,dz}{(\eta^2-z^2)(\zeta_1+z)} + \left[-\frac{1}{\zeta_1 K_+(\zeta_1)} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon}\frac{e^{-2aiz}\,dz}{K_+(z)(\zeta_1+z)^2}\right]\left[\frac{\cos(\zeta_1+\eta)a}{\zeta_1+\eta} + \frac{\cos(\zeta_1-\eta)a}{\zeta_1-\eta}\right]\frac{e^{-ia\zeta_1}}{[K_+^{-1}(-\zeta_1)]'}\right\}$$
$$(0 < \varepsilon < |z_1|)$$

Теперь на основании леммы 4.2 выражение для $y_l(1)$ представим в форме

$$y_l(1) = y_l(0) - \frac{\tau_{l,1}(0)\,\sigma(1)}{1+\delta_{1,1}(0)}$$

Таким образом, нулевой член асимптотики решения интегрального уравнения принимает вид

$$q(x) = \frac{\cos\eta x}{K(\eta)} + 2\sum_{l=1}^{\infty} y_l(1)\,e^{iz_l a}\cos z_l a + O(e^{-2a|z_1|}) \quad (a \to \infty) \tag{5.2}$$

3. Положим $p = 0$, $m = 1$. Для построения нулевого члена асимптотики решения интегрального уравнения достаточно решить уравнения (4.4) при $m = 1$. Для его решения воспользуемся леммой работы [5].

Решение в рассматриваемом случае представимо в форме

$$y_l(1)=y_l(0)-y_1(0)\frac{\varepsilon_{l,1}(0)}{1+\varepsilon_{1,1}(0)},\quad \varepsilon_{l,1}(0)=\frac{\exp 2aiz_1K_+(z_1)}{K_+'(-z_l)(z_1+z_l)} \tag{5.3}$$

Значение $y_l(0)$ дается соотношением (5.1).

Нулевой член асимптотики решения представим в форме (5.2), где $y_l(1)$ определяется соотношением (5.3), а остаточный член имеет порядок $O(\exp(-2a|z_2|))$.

4. Положим $p=1$, $m=1$. В этом случае, используя результаты п. 2 как отправные, построим y_l (1.1) по формуле *п*. 3.

Порядок остаточного члена есть $O(\exp(-2a|z_2|))$.

§ 6. Рассмотрим задачу о плоском кручении штампом шириной $2b$ упругого слоя толщиной h. Предполагается, что штамп совершает гармонические колебания так, что смещения точек слоя непосредственно под штампом задаются соотношением

$$W^\circ(x,y,t)=\operatorname{Re}w(x,y)\,e^{-i\omega t}=\cos\eta x\cos\omega t,\qquad y=h,\qquad |x|\leqslant b \tag{6.1}$$

Слой либо (а) жестко сцеплен с недеформируемым основанием, либо (б) покоится на нем без трения.

В условиях установившихся колебаний требуется определить контактные напряжения под штампом.

Сформулированная таким образом проблема приводится к решению следующей краевой задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{gathered}\Delta w+\varkappa^2w=0,\ |x|<\infty,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\\ \varkappa^2=\rho\omega^2h^2G^{-1},\quad a=b/h\\ w=\cos\eta x,\ |x|\leqslant a,\quad \partial w/\partial y=0,\ \ |x|>a,\quad y=1\\ \text{(а)}\qquad w=0,\ \ |x|<\infty,\ \ y=0\\ \text{(б)}\quad \partial w/\partial y=0,\ \ |x|<\infty,\ \ y=0\end{gathered} \tag{6.2}$$

где ρ и G — соответственно плотность и модуль сдвига материала слоя.

Однако хорошо известно [9], что таким образом поставленная задача не корректна до тех пор, пока не указаны условия на бесконечности.

Ниже при выводе интегрального уравнения задачи недостающие условия будут даны.

Интегральное уравнение задачи относительно контактных напряжений выведем с помощью преобразования Фурье. Для этого решим вспомогательную краевую задачу, которая описывается уравнением и граничными условиями (6.2) всюду за исключением границы $y=1$, условие на которой имеет вид

$$\partial w/\partial y=q(x),\qquad |x|<\infty,\qquad y=1 \tag{6.3}$$

Тогда, как нетрудно проверить, решение для обеих задач в Фурье-трансформациях $W(\alpha,y)$ имеет вид

$$\text{(а)}\quad W(\alpha,y)=\frac{\operatorname{sh}\sigma y}{\sigma\operatorname{ch}\sigma}Q(\alpha)=W_0(\alpha,y)Q(\alpha) \tag{6.4}$$

$$\text{(б)}\quad W(\alpha,y)=\frac{\operatorname{ch}\sigma y}{\sigma\operatorname{sh}\sigma}Q(\alpha)=W_0(\alpha,y)Q(\alpha) \tag{6.5}$$

$$\sigma=\sqrt{\alpha^2-\varkappa^2}$$

Теперь при возвращении к функции $w(x,y)$ по формуле

$$w(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma W(\alpha,y)\,e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{6.6}$$

распорядимся контуром интегрирования Γ таким образом, чтобы выполнялись желаемые условия на бесконечности.

Нетрудно видеть, что при достаточно больших $\varkappa$ в случае задачи (а) и при всех $\varkappa$ в случае задачи (б) на вещественной оси у функции $W_0(\alpha,y)$ имеется конечное число p

полюсов, расположенных симметрично относительно начала координат. Функция W_0 (α, y) есть очевидно Фурье-трансформация решения задачи $w_0(x, y)$ для случая «точечного источника» — сосредоточенной силы.

В зависимости от желаемого поведения функции $w_0(x, y)$ при $|x| \to \infty$ и необходимо брать соответствующий контур в (6.6).

Рассмотрим примеры. 1. Контур Г совпадает с вещественной осью и интеграл (6.6) понимается в смысле главного значения.

В этом случае для задач (а) и (б) функция $w_0(x, y)$ представима в форме

$$\text{(а)}\quad w_0(x, y) = 0.5 \sum_{k=1}^{p} a_k \operatorname{sh} \sigma_k y \sin \zeta_k |x| + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \operatorname{sh} \sigma_k y e^{i\zeta_k |x|} \tag{6.7}$$

$$\text{(б)}\quad w_0(x, y) = 0.5 \sum_{k=1}^{p} b_k \operatorname{ch} \sigma_k y \sin \zeta_k |x| + \sum_{k=p+1}^{\infty} b_k \operatorname{ch} \sigma_k y e^{i\zeta_k |x|} \tag{6.8}$$

$$\sigma_k = \sqrt{\zeta_k^2 - \varkappa^2}$$

Здесь a_k, b_k — некоторые постоянные, ζ_k — полюса функции $w_0(\alpha, y)$, отвечающие своим задачам (смотри ниже), причем, первые p из них — вещественны.

Умножим соотношение (6.7), (6.8) на временный множитель $e^{-i\omega t}$; тогда очевидно, что «уходящие волны» вида

$$\exp\,[i\,(\zeta_k\,|x| - \omega t)] \qquad (k \leqslant p) \tag{6.9}$$

не поглощаются на бесконечности, а отражаясь возвращаются в форме «приходящих волн» вида

$$\exp\,[-i(\zeta_k\,|x| + \omega t)] \tag{6.10}$$

Это явление можно объяснить и иначе, именно: можно считать, что на бесконечности имеется источник, порождающий приходящие волны вида (6.10).

2. Контур Г огибает отрицательные полюсы сверху, положительные — снизу и пересекает вещественную ось в начале координат. В этом случае, как нетрудно проверить, функция $w_0(x, y)$ допускает представление в форме

$$\text{(а)}\quad w_0(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sh} \sigma_k y e^{i\zeta_k |x|}, \qquad \text{(б)}\quad w_0(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{ch} \sigma_k y e^{i\zeta_k |x|} \tag{6.11}$$

Здесь уже уходящие волны вида (6.9) поглощаются на бесконечности и волны вида (6.10) не возникают.

Нетрудно видеть, что в примере 1 точки слоя колеблются при всех $\varkappa$ в той же фазе, что и вынуждающая сила при $y = 1$, в то время как в примере 2 имеет место сдвиг фаз.

Выбрав необходимый контур интегрирования Г в соотношении (6.6) и внося сюда (6.4) или (6.5) при $y = 1$ на основании (6.2), получим интегральное уравнение вида (1.1).

Ниже ограничимся выбором контура Г так, как указано в примере 1. Функция $K(\alpha)$ принимает соответственно следующие значения:

$$\text{(а)}\quad K(\alpha) = \sigma^{-1} \operatorname{th}\sigma, \qquad \text{(б)}\quad K(\alpha) = \sigma^{-1} \operatorname{cth}\sigma$$

Распределение нулей и полюсов верхней полуплоскости функции $K(\alpha)$ дается соотношением вида

$$\text{(а)}\quad z_n = i\sqrt{n^2\pi^2 - \varkappa^2} \sim in\pi + O(n^{-2}),$$

$$\zeta_n = i\sqrt{(n-0.5)^2\pi^2 - \varkappa^2} \sim i\pi(n-0.5) + O(n^{-2})$$

$$\text{(б)}\quad z_n = i\sqrt{(n-0.5)^2\pi^2 - \varkappa^2} \sim i\pi(n-0.5) + O(n^{-2})$$

$$\zeta_1 = \varkappa, \quad \zeta_n = i\sqrt{n^2\pi^2 - \varkappa^2} \sim in\pi + O(n^{-2}). \qquad n \geqslant 2$$

Из полученных соотношений видно, что в случае задачи (а) при малых $\varkappa$ все нули и полюса функции $K(\alpha)$ находятся на мнимой оси. С увеличением $\varkappa$ они, соблюдая упорядоченность, начинают стекать к вещественной оси. Первыми вещественной оси достигают полюса́. Соединившись в нуле в двухкратный полюс, они затем расходятся в разные стороны от начала координат по вещественной оси. Затем эту же процедуру с увеличением $\varkappa$ совершают и нули и т. д. При $\varkappa = 0$ получаех обычную статическую задачу. В случае (б) при $\varkappa = 0$ исходная задача поставлена не корректно. Если же $\varkappa > 0$, то на вещественной оси обнаруживаются два полюса, лежащих по обе стороны от начала координат. С увеличением $\varkappa$ на вещественную ось стекают нули, за ними полюса и т. д.

К интегральному уравнению (1.1) с указанными свойствами ядра приводится также задача о кручении бесконечного упругого вала, радиуса h штампом, форма основания которого изменяется по указанному выше закону. Функция $K(\alpha)$ в этом случае имеет вид

$$K(\alpha) = \frac{I_1(\sigma)}{\sigma I_0(\sigma) - 2I_1(\sigma)}, \qquad \sigma = \sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2}$$

где $I_k(\sigma)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Задача о вибрации пластинки на поверхности слоя идеальной жидкости (линейная постановка) также приводится к указанному интегральному уравнению. В этом случае

$$K(\alpha) = \frac{\sigma \operatorname{sh} \sigma}{\nu \operatorname{ch} \sigma - \sigma \operatorname{sh} \sigma}, \qquad \nu = \frac{\omega^2 h}{g}$$

К этому ~~же~~ классу интегральных уравнений приводятся смешанные задачи о сжатии и изгибе вибрирующими штампами упругой полосы.

Замечание 6.1. Если контур Г в соотношении (6.6) выбран, как указано в примере 2, то соответствующая бесконечная система по форме в точности совпадает с системой (2.19) работы [4]. Для ее исследования можно применить метод, предложенный в работе [5].

Автор благодарит И. И. Воровича и Н. А. Ростовцева за ряд замечаний.

Поступила 20 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
2. Koiter W. T. Solution of some elasticity problems by asymptotic methods. В кн.: «Приложение теории функций в механике сплошной среды», т. I, М., «Наука», 1965.
3. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
5. Бабешко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
6. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Физматгиз, 1960.
7. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
8. Александров В. М., Белоконь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.