Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКО-УПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

И. М. Руткевич

(Москва)

Рассматривается система уравнений, описывающая течения несжимаемой вязко-упругой среды с реологическим уравнением состояния, содержащим производные по времени от тензора напряжений. Для двухконстантных моделей среды исходная система уравнений является квазилинейной системой первого порядка. Для того чтобы задача с начальными данными была корректно поставлена, необходимо наложить некоторые ограничения на матрицу системы [1]. Эти ограничения, необходимые для эволюционности системы, в рассматриваемом случае налагаются на тензор напряжений. Рассматриваются, в основном, одномерные движения, для которых требование эволюционности приводит к гиперболичности системы. В этом случае можно указать достаточные условия, обеспечивающие единственность непрерывного решения одномерной нестационарной краевой задачи.

Гиперболические системы уравнений динамики вязко-упругой жидкости для некоторых моделей, например, для модели Олдройда [2], допускают разрывные решения. Разрывные течения материалов с памятью, в которых напряжения являются функционалами «истории деформаций», обсуждались в работе [3]. Ниже рассмотрены разрывы в модели Олдройда, когда задается дифференциальная связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций. Устанавливается необходимое условие существования разрывов. Рассмотрен также вопрос об эволюции скачка скорости в одномерном движении.

§ 1. Условия эволюционности. Пусть вязко-упругая несжимаемая жидкость движется в плоском канале $0 < z < \delta$ или в полупространстве $z > 0$. Параметры движения, за исключением давления, предполагаются зависящими от одной пространственной координаты z и от времени t.

Уравнения движения имеют в этом случае вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}P_x - F_x = 0\\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{yz}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}P_y - F_y = 0\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - F_z = 0
\end{gathered}\qquad(1.1)$$

Здесь $P_x(t) = -\partial p/\partial x$ и $P_y(t) = -\partial p/\partial y$ можно считать заданными функциями. В последнем уравнении (1.1) использовано условие несжимаемости

$$\partial v_z/\partial z = 0, \qquad v_z = v_z(t)$$

Компоненты тензора напряжений связаны шестью реологическими уравнениями. Будем рассматривать:

«контравариантную» модель Олдройда

$$T_{ij} + \lambda(\partial T_{ij}/\partial t + v_k T_{ij,\,k} - v_{i,\,k}T_{kj} - v_{j,\,k}T_{ik}) = \eta(v_{i,\,j} + v_{j,\,i}) \qquad (1.2)$$

«ковариантную» модель Олдройда

$$T_{ij} + \lambda(\partial T_{ij}/\partial t + v_k T_{ij,k} + v_{k,j} T_{ik} + v_{k,i} T_{kj}) = \eta(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.3)$$

модель с производной в смысле Яуманна

$$T_{ij} + \lambda(\partial T_{ij}/\partial t + v_k T_{ij,k} - \omega_{ik} T_{kj} - \omega_{jk} T_{ik}) = \eta(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.4)$$

$$\omega_{ij} = {}^1/_2 (v_{i,j} - v_{j,i})$$

Уравнения (1.2) — (1.4) записаны в декартовых координатах. Тензор T_{ij} связан с полным тензором напряжений p_{ij} равенством $p_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij}$.

Система первых двух уравнений (1.1) вместе с одной из групп уравнений (1.2), (1.3) или (1.4) замкнута относительно восьми неизвестных функций v_x, v_y, T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz}, T_{zz} при условии, что v_z (t) — заданная функция времени. Тогда последнее уравнение (1.1) служит для определения поперечного распределения давления. Условие $v_z \neq 0$ означает возможность вдува или отсасывания жидкости через плоскости, ограничивающие поток.

Введем вектор-функцию $\mathbf{f} = (v_x, v_y, T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz}, T_{zz})$. Тогда для каждой модели полную систему уравнений можно записать в матричной форме [1]

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + A(\mathbf{f})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} + \mathbf{b}(\mathbf{f}, z, t) = 0 \quad (1.5)$$

Для каждой из рассматриваемых систем матрица A представляет собой несимметричную матрицу восьмого порядка, линейно зависящую от вектора $\mathbf{f}$, а вектор $\mathbf{b}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{b} = \left(-\frac{1}{\rho}P_x - F_x, -\frac{1}{\rho}P_y - F_y, \frac{1}{\lambda}T_{xx}, \frac{1}{\lambda}T_{xy}, \frac{1}{\lambda}T_{xz}, \frac{1}{\lambda}T_{yy}, \frac{1}{\lambda}T_{yz}, \frac{1}{\lambda}T_{zz}\right)$$

Квазилинейная система (1.5) должна быть эволюционной, т. е. для нее должна быть корректно поставлена задача с начальными условиями. Как показывает пример, приведенный в [4], уравнения вязко-упругой среды могут быть неэволюционными; поэтому анализ системы (1.5) начнем, прежде всего, с вывода условий эволюционности. Следуя соображениям, изложенным в [1], будем считать, что условие вещественности корней характеристического уравнения

$$|A - \tau E| = 0 \quad (1.6)$$

где E — единичная матрица, необходимо для эволюционности.

Для системы (1.1), (1.2) корни уравнения (1.6) имеют следующие значения:

$$\tau_{1,2,3,4} = v_z, \quad \tau_{5,6} = v_z + \left[\frac{1}{\rho}\left(T_{zz} + \frac{\eta}{\lambda}\right)\right]^{1/2}, \quad \tau_{7,8} = v_z - \left[\frac{1}{\rho}\left(T_{zz} + \frac{\eta}{\lambda}\right)\right]^{1/2} \quad (1.7)$$

---

[1] Матрица A умножается на вектор $\mathbf{f}$ согласно правилам умножения на вектор-столбец.

Следовательно, необходимое условие эволюционности системы (1.1), (1.2) имеет вид

$$T_{zz} + \eta/\lambda > 0 \tag{1.8}$$

Аналогично при рассмотрении уравнения (1.6) для системы (1.1), (1.3) для корней получим значения

$$\tau_{1,2,3,4} = v_z, \qquad \tau_{5,6,7,8} = v_z \pm \left[\frac{2\eta/\lambda - (T_{xx} + T_{yy}) \pm \sqrt{\Delta}}{2\rho}\right]^{1/2}$$
$$\Delta = (T_{yy} - T_{xx})^2 + 4T_{xy}^2 \tag{1.9}$$

Поэтому для эволюционности системы (1.1), (1.3) необходимо выполнение неравенства

$$\eta/\lambda - {}^1/_2(T_{xx} + T_{yy} + \sqrt{\Delta}) > 0 \tag{1.10}$$

Для случая $v_y = 0$, $T_{xy} = T_{yy} = T_{yz} = 0$ условие (1.10) приводится к виду

$$\eta/\lambda - T_{xx} > 0$$

Последнее неравенство отличается от (1.8) тем, что в нем вместо T_{zz} стоит $-T_{xx}$. Это является следствием того факта, что всякое решение задачи о движении ковариантной модели в случае $v_y = 0$, $T_{xy} = T_{yy} = T_{yz} = 0$ может быть получено из решения для контравариантной модели при тех же предположениях относительно движения, если в последнем решении поменять местами величины T_{zz} и $-T_{xx}$.

При рассмотрении характеристического уравнения для системы (1.1), (1.4) получим следующие выражения для корней:

$$\tau_{1,2,3,4} = v_z, \quad \tau_{5,6,7,8} = v_z \pm \left[\frac{1}{2\rho}\left(\frac{2\eta}{\lambda} + T_{zz} - \frac{T_{xx} + T_{yy}}{2} \pm \sqrt{\Delta'}\right)\right]^{1/2}$$
$$\Delta' = {}^1/_4\Delta \tag{1.11}$$

Условие эволюционности системы (1.1), (1.4), описывающей одномерное движение модели с яуманновской производной, имеет вид

$$T_{zz} - {}^1/_2(T_{xx} + T_{yy}) - \sqrt{\Delta'} + 2\eta/\lambda > 0 \tag{1.12}$$

Неравенства (1.8), (1.10), (1.12) для соответствующих сред должны выполняться во всей области течения для всех моментов времени. В противном случае необходимо изменение реологической модели, по меньшей мере, в той области, где исходные уравнения становятся неэволюционными. Величины, которые «управляют» эволюционностью системы, сами определяются из решения некоторой смешанной задачи. Поэтому система может попасть в неэволюционную область из-за выбранных неподходящим образом начальных или граничных условий.

Отметим, что в случае линейной вязко-упругости условия эволюционности оказываются выполненными автоматически. Так что неэволюционность будет следствием кинематической нелинейности тензорной производной по времени.

§ 2. Единственность решения смешанной задачи. Будем предполагать необходимые условия эволюционности выполненными. При доказательстве единственности существенным обстоятельством будет возможность приведения матрицы A к диагональному виду. Так как матрица A несимметрична, то приведение ее к диагональному виду возможно, если максимальное число линейно независимых собственных векторов матрицы совпадает с ее порядком. Как следует из (1.7), (1.9), (1.11), для каждой из рассматриваемых моделей характеристическое уравнение (1.6) имеет кратные корни. Поэтому необходимо непосредственное рассмотрение вопроса о максимальном числе линейно независимых собственных векторов, которое для каждой из моделей (1.2) — (1.4) приводит к желаемому результату: искомое число равно восьми. Следовательно, матрица A приводима к диагональному виду, и система (1.5) будет гиперболической.

Рассмотрим два решения $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, удовлетворяющие (1.5). Предположим, что $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ непрерывны в области R $(0 < t < T,\ 0 < z < \delta)$ вместе со своими первыми производными. Подставляя поочередно $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ в (1.5) и вычитая результаты подстановки один из другого, получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{f}_1)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + [A(\mathbf{f}_1) - A(\mathbf{f}_2)]\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial z} + \mathbf{b}(z, t, \mathbf{f}_1) - \mathbf{b}(z, t, \mathbf{f}_2) = 0 \qquad (2.1)$$

$$(\mathbf{u} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)$$

Если вектор массовых сил $\mathbf{F}$ линейно зависит от скорости либо будет заданной функцией z и t, то вектор $\mathbf{b}$ будет линейно зависеть от $\mathbf{f}$. Матрица A также линейно зависит от $\mathbf{f}$, поэтому имеют место соотношения

$$A_{ij} = c_{ijk} f_k + d_{ij}, \qquad b_i = l_{ik} f_k + m_i$$

Здесь c_{ijk}, d_{ij} — постоянные, а l_{ik}, m_i — функции z и t.

Поэтому (2.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{f}_1)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + B\left(z, t, \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial z}\right)\mathbf{u} = 0, \qquad B_{ij} = c_{ikj}\frac{\partial f_{2k}}{\partial z} + l_{ij} \qquad (2.2)$$

Равенство (2.2) можно рассматривать как однородное линейное уравнение относительно $\mathbf{u}$. Дальнейшие построения проводятся по методу, изложенному в [5] применительно к линейным гиперболическим системам. Линейной заменой неизвестной функции можно привести матрицу к диагональному виду.

Пусть $\mathbf{u} = H\mathbf{U}$, где по столбцам матрицы H стоят линейно независимые собственные векторы матрицы A. Тогда после простых преобразований получим следующее уравнение для $\mathbf{U}$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + G\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} + K\mathbf{U} = 0 \qquad (2.3)$$

Здесь $G = H^{-1}AH$ — диагональная матрица, по диагонали которой стоят собственные значения матрицы A, и

$$K = H^{-1}\left(B + \frac{\partial H}{\partial t} + A\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$

Совершим еще одну замену, полагая $\mathbf{U} = e^{\alpha t}\mathbf{W}$, где $\alpha > 0$. Тогда $\mathbf{W}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + G\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z} + (K + \alpha E)\mathbf{W} = 0 \qquad (2.4)$$

где E — единичная матрица.

Умножим скалярно (2.4) на 2W и воспользуемся тождеством, справедливым для любого вектора W и любой симметричной матрицы G

$$2\left(G\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z},\ \mathbf{W}\right)=\frac{\partial}{\partial z}(G\mathbf{W},\ \mathbf{W})-\left(\frac{\partial G}{\partial z}\mathbf{W},\ \mathbf{W}\right)$$

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(W^2)+\frac{\partial}{\partial z}(G\mathbf{W},\ \mathbf{W})+(M\mathbf{W},\ \mathbf{W})=0,\qquad M=2K-\frac{\partial G}{\partial z}+2\alpha E \quad (2.5)$$

Ясно, что при выборе достаточно большого $\alpha>0$ квадратичная форма (MW,W) будет положительно определенной. Тогда, интегрируя (2.5) по области R, получим

$$\int_0^\delta W^2dz\,\Big|_0^T+\int_0^T(G\mathbf{W},\ \mathbf{W})_{z=\delta}dt-\int_0^T(G\mathbf{W},\ \mathbf{W})_{z=0}dt+\int_0^T\int_0^\delta(M\mathbf{W},\ \mathbf{W})\,dzdt=0 \quad (2.6)$$

Пусть $\mathbf{W}=0$ при $t=0$, т. е. для f задано начальное условие, а на границах канала имеют место неравенства

$$(G\mathbf{W},\mathbf{W})_{z=0}\leqslant 0,\qquad (G\mathbf{W},\ \mathbf{W})_{z=\delta}\geqslant 0 \quad (2.7)$$

Тогда из (2.6) следует $\mathbf{W}\equiv 0$, и единственность будет установлена.

При $z=0$ зададим k граничных условий, линейных относительно вектора f

$$(\mathbf{f},\ \mathbf{q}_1)=\varkappa_1(t),\ldots,(\mathbf{f},\ \mathbf{q}_k)=\varkappa_k(t)$$

Здесь векторы $\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_k$ линейно независимы и могут быть функциями t, а $\varkappa_i(t)$ заданные функции.

Для вектора u эти граничные условия будут однородными

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{q}_1)=0,\ldots,(\mathbf{u},\ \mathbf{q}_k)=0$$

Подставляя вместо u его выражение через W, получим следующие граничные условия для W:

$$(\mathbf{W},\ \mathbf{Q}_1)=0,\ldots,(\mathbf{W},\ \mathbf{Q}_k)=0,\qquad \mathbf{Q}_i=H'\mathbf{q}_i \quad (2.8)$$

Здесь H' — матрица, транспонированная к H. Минимальное число условий вида (2.8), при которых $(G\mathbf{W},\ \mathbf{W})_{z=0}\leqslant 0$, равно числу положительных собственных значений матрицы $A(\mathbf{f}_1)$, считая их кратность [5]. Аналогично минимальное число граничных условий вида (2.8) при $z=\delta$ равно числу отрицательных собственных значений матрицы $A(\mathbf{f}_1)$, считая их кратность.

Отметим, что если число k известно, выбор линейно независимых векторов $\mathbf{q}_i$ не будет совершенно произвольным. Для того чтобы квадратичная форма $(G\mathbf{W},\ \mathbf{W})$ имела определенный знак, компоненты векторов $\mathbf{Q}_i$, а следовательно, и компоненты $\mathbf{q}_i$ должны быть подчинены некоторым условиям. Действительно, рассматривая (2.8) как систему линейных уравнений относительно компонент вектора W, получим

$$\mathbf{W}=\gamma_1\mathbf{\Psi}_1(\mathbf{Q}_1\ldots,\ \mathbf{Q}_k)+\ldots+\gamma_{n-k}\mathbf{\Psi}_{n-k}(\mathbf{Q}_1,\ldots,\mathbf{Q}_k)$$

Здесь векторы $\Psi_1, \ldots \Psi_{n-k}$ образуют фундаментальную систему решений; в рассматриваемом случае $n = 8$. Тогда квадратичная форма $(G\mathbf{W}, \mathbf{W})$ сводится к форме, определенной на $n - k$-мерных векторах $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-k})$

$$(G\mathbf{W},\ \mathbf{W}) = (G\Psi_i,\ \Psi_j)\gamma_i\gamma_j$$

Для того чтобы последняя квадратичная форма имела вполне определенный знак на всех векторах γ, необходимо наложить известные ограничения на угловые миноры матрицы $\|(G\Psi_i,\ \Psi_j)\|$, которая зависит от векторов $\mathbf{Q}_i$.

Характеристики квазилинейных систем уравнений сами зависят от граничных условий, и их наклон заранее неизвестен. Однако, в некоторых случаях, например, для систем (1.1), (1.2) или (1.1), (1.3), описывающих течение моделей Олдройда, можно определить наклон характеристик, решив уравнения для T_{zz} в случае модели (1.2) или для T_{xx}, T_{xy}, и T_{yy} в случае модели (1.3). Все эти функции удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$L(T) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z(t)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\lambda}\right)T = 0 \tag{2.9}$$

решение которого имеет вид

$$T(z,\, t) = e^{-t/\lambda} F\left(z - \int\limits_0^t v_z(t')\, dt'\right)$$

В этом случае по формулам (1.7) или (1.9) можно вычислить все характеристические корни $\tau_i\ (z,\, t)$. Система (1.1), (1.4) обладает более сильной нелинейностью, чем системы (1.1), (1.2) или (1.1), (1.3), и для нее затруднительно в явном виде найти характеристические корни как функции z и t.

В качестве примера рассмотрим вопрос о единственности решения следующей задачи. Пусть в канале с непроницаемыми стенками течет вязко-упругая жидкость, соответствующая модели (1.2). Предположим $v_y = 0$, $T_{xy} = T_{yy} = T_{yz} = 0$. Величина T_{zz} удовлетворяет (2.9) и в данном случае равна $T_{zz} = T_0(z)\, e^{-t/\lambda}$. Тогда для величин v_x, T_{xz} имеем систему двух линейных уравнений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}P_x - F_x = 0, \qquad \frac{\partial T_{xz}}{\partial t} - c^2\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{\lambda}T_{xz} = 0$$

Неизвестный вектор имеет две компоненты $\mathbf{f} = (v_x, T_{xz})$. Характеристические значения

$$\tau_{1,2} = \pm c, \qquad c = \left[\frac{1}{\rho}\left(T_{zz} + \frac{\eta}{\lambda}\right)\right]^{1/2}$$

Для квадратичной формы $(G\mathbf{W},\mathbf{W})$ получим

$$(G\mathbf{W},\mathbf{W}) = e^{-2\alpha t}\ (v_{1x} - v_{2x})(T_{2xz} - T_{1xz})\ /\ \rho$$

Согласно изложенным выше соображениям следует задать одно граничное условие при $z = 0$ и одно — при $z = \delta$. Легко видеть, что, если задать условие прилипания на каждой из стенок $v_{1x} = v_{2x} = v_x$, то $(G\mathbf{W},\ \mathbf{W})$ обратится в нуль, и единственность будет иметь место. Решение поставленной выше задачи для случая $T_0(z) = \mathrm{const}$, $F_x = 0$ и граничных условий $v_x(0) = v_x(\delta) = 0$ приведено в [4].

В предлагаемой работе не затронут вопрос о единственности обобщенного решения системы (1.5). Этот вопрос представляет интерес, так как в вязко-упругой среде возможны сильные разрывы.

3. Разрывные течения олдройдовской жидкости. Для получения соотношений на разрывах приведем «главную часть» системы уравнений пространственного течения контравариантной модели Олдройда к «дивергентному» виду. Тогда система уравнений движения вместе с системой реологических уравнений, преобразованных с использованием уравнений движения и уравнения неразрывности, приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + (\rho v_i v_k + p\delta_{ik} - T_{ik})_{,k} = \rho F_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_{ij} + \rho v_i v_j) + \left[(T_{ij}v_k - T_{kj}v_i - T_{ik}v_j + \rho v_i v_j v_k) - \frac{\eta}{\lambda}(v_i\delta_{kj} + v_j\delta_{ki})\right]_{,k} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}T_{ij} + v_i(-p_{,j} + \rho F_j) + v_j(-p_{,i} + \rho F_i) \qquad (3.1)$$

Так как жидкость несжимаема, то возможны только тангенциальные разрывы, для которых $\{v_n\} = 0$ и, следовательно, $\{p\} = \{T_{nn}\}$.

Будем рассматривать такие разрывы, для которых $\{T_{nn}\} = 0$. Тогда давление изменяется непрерывно при переходе через поверхность разрыва. Предположим также, что в окрестности поверхности разрыва напряжения T_{ij}, градиент давления и внешние массовые силы ограничены. Интегрируя уравнения (3.1) по узкому слою, содержащему внутри себя поверхность разрыва, определяемую уравнением $\varphi(x_i, t) = 0$, и устремляя толщину слоя к нулю, получим

$$\partial\varphi / \partial t\,\{\rho v_i\} + \varphi_{,k}\{\rho v_i v_k - T_{ik}\} = 0 \qquad (3.2)$$

$$\partial\varphi / \partial t\,\{T_{ij} + \rho v_i v_j\} + \varphi_{,k}\{T_{ij}v_k - T_{kj}v_i - T_{ik}v_j + \rho v_i v_j v_k -$$

$$-\frac{\eta}{\lambda}(v_i\delta_{kj} + v_j\delta_{kj})\} = 0$$

Разделим уравнения (3.2) на $|\nabla\varphi|$, причем последнее уравнение (3.2) умножим на n_j, где $n_j = \varphi_{,j}/|\nabla\varphi|$ — компоненты единичного вектора нормали к поверхности разрыва. После свертывания по индексу j получим

$$-\rho c\{v_i\} = \{T_{ik}\}n_k, -(\rho v_n\{v_i\} - \{T_{ij}\}n_j)c = v_n\{T_{ij}\}n_j - (T_{nn} + \eta/\lambda)\{v_i\}$$

$$c = \left(v_n + \frac{1}{|\nabla\varphi|}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

где c — скорость распространения поверхности разрыва относительно среды. Из последних равенств следует, что при $\{\mathbf{V}\} \neq 0$ должно быть выполнено соотношение

$$\{T_{ij}n_j\}^2 = (T_{nn} + \eta/\lambda)\,\rho\,\{v_i\}^2$$

что возможно лишь при условии

$$T_{nn} + \eta/\lambda > 0 \qquad (3.3)$$

Если в некоторой области, занятой движущейся жидкостью, всюду выполнено неравенство $T_{nn} + \eta/\lambda < 0$, то, как следует из вышеизложенного, в таком течении невозможны поверхности разрыва скорости.

Заметим, что в случае одномерного движения условие (3.3) совпадает с условием (1.8), которое необходимо для эволюционности системы. При этом исходная система уравнений становится гиперболической.

Можно показать, что выполнение неравенства (3.3) необходимо для эволюционности системы уравнений пространственного течения модели (1.2). При этом направление вектора **n** должно быть произвольным.

Если (3.3) выполнено, то для скорости распространения поверхности разрыва получим

$$c = \pm [(T_{nn} + \eta/\lambda) / \rho]^{1/2}$$

Функция $\varphi(x_i, t)$, обращающаяся в нуль на поверхности разрыва, удовлетворяет «уравнению эйконала»

$$(\partial\varphi / \partial t)^2 = (\mathbf{V}\nabla\varphi \pm \sqrt{T_{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j}/\rho + \eta(\nabla\varphi)^2/\rho\lambda})^2 \qquad (3.4)$$

Обычными методами можно установить, что поверхности сильного разрыва совпадают с характеристическими поверхностями исходной системы уравнений. Это обстоятельство, которое всегда имеет место в линейных системах, в данном случае будет следствием «слабой» нелинейности рассматриваемой системы уравнений.

Предположим теперь, что $\{\mathbf{V}\} = 0$, тогда $\{T_{ij}\}\, n_j = 0$ и, следовательно, $\{\mathbf{p}_n\} = 0$. В этом случае $c = 0$, и на такой поверхности, движущейся вместе с частицами среды, может претерпевать разрыв величина $\mathbf{p}_{n'}$. Эта величина представляет собой напряжение на площадке с нормалью $\mathbf{n}'$, причем $n_j n_j' = 0$. Этот факт устанавливается посредством умножения последнего уравнения (3.2) на n_j' и свертывания по j.

Итак, при условии (3.3) в рассматриваемой среде возможны два типа разрывов. Поверхности разрыва первого типа распространяются относительно среды с отличной от нуля скоростью, и на них претерпевают скачок касательная составляющая скорости и компоненты тензора напряжений. Поверхности второго типа относительно среды не распространяются, и на них могут претерпевать скачок только компоненты вектора напряжения на ортогональных к поверхности разрыва площадках, за исключением составляющей этого вектора по направлению **n**. Составляющая по этому направлению непрерывна, так как вследствие симметрии тензора напряжений имеет место равенство $\{\mathbf{p}_{n'}\}\mathbf{n} = \{\mathbf{p}_n\}\mathbf{n}' = 0$.

В отличие от газодинамических течений разрывы в нестационарных движениях вязко-упругой жидкости не могут возникнуть из непрерывных течений, а представляют собой результат развития некоторого начального разрыва. Этот факт установлен ниже для случая одномерного движения.

Рассмотрим теперь частный случай одномерного движения в плоском канале или в полупространстве. Разрывы происходят на характеристиках системы (1.1), (1.2). При этом характеристики первого типа, на которых возможны разрывы скорости, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dz}{dt} = v_z(t) \pm c, \qquad c = \left[\frac{1}{\rho}\left(T_{zz} + \frac{\eta}{\lambda}\right)\right]^{1/2} \qquad (3.5)$$

а характеристики второго типа, на которых возможны только разрывы величин T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}, удовлетворяют уравнению

$$dz \,/\, dt = v_z(t) \tag{3.6}$$

Тогда, применяя (3.2) к случаю одномерного движения, можно показать, что на характеристиках первого типа имеют место следующие соотношения:

$$\{T_{xx}\} = \rho\{v_x\}^2 \mp 2T_{xz}^{(1)}\{v_x\} / c, \qquad \{T_{yy}\} = \rho\{v_y\}^2 \mp 2T_{yz}^{(1)}\{v_y\}/ c$$

$$\{T_{xy}\} = \rho\{v_x\}\{v_y\} \mp (T_{xz}^{(1)}\{v_y\} + T_{yz}^{(1)}\{v_x\}) / c$$

$$\{T_{xz}\} = \mp \rho c\{v_x\}, \qquad \{T_{yz}\} = \mp \rho c\{v_y\} \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что на характеристиках первого типа все величины непрерывны, если $\{\mathbf{V}\} = 0$.

Для рассмотрения вопроса об эволюции скачка $\{v_x\}$ обратимся к системе двух уравнений, замкнутой относительно величин v_x и T_{xz}

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}P_x - F_x = 0 \\ &\frac{\partial T_{xz}}{\partial t} - \left(T_{zz} + \frac{\eta}{\lambda}\right)\frac{\partial v_x}{\partial z} + v_z\frac{\partial T_{xz}}{\partial z} + \frac{1}{\lambda}T_{xz} = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Если ввести неизвестную вектор-функцию $\mathbf{f} = (v_x, T_{xz})$, то (3.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} + B\mathbf{f} + \mathbf{g} = 0$$

Тогда линейной заменой неизвестной функции $\mathbf{u} = H^{-1}\mathbf{f}$

$$H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -1/\rho c \\ 1 & 1/\rho c \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(v_x - \frac{T_{xz}}{\rho c},\ v_x + \frac{T_{xz}}{\rho c}\right)$$

систему (3.8) можно привести к диагональному виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + G\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + S\mathbf{u} + \mathbf{h} = 0 \tag{3.9}$$

Здесь $\mathbf{h}$ не зависит от $\mathbf{u}$, а матрицы G и S имеют вид

$$G = \begin{Vmatrix} v_z + c & 0 \\ 0 & v_z - c \end{Vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{\partial \ln c}{\partial t} + \left(1 + \dfrac{v_z}{c}\right)\dfrac{\partial c}{\partial z} & -\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{\partial \ln c}{\partial t} - \left(1 + \dfrac{v_z}{c}\right)\dfrac{\partial c}{\partial z} \\ -\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{\partial \ln c}{\partial t} + \left(1 - \dfrac{v_z}{c}\right)\dfrac{\partial c}{\partial z} & \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{\partial \ln c}{\partial t} - \left(1 - \dfrac{v_z}{c}\right)\dfrac{\partial c}{\partial z} \end{Vmatrix}$$

На характеристике $dz \,/\, dt = v_z + c$, применяя операцию взятия скачка к уравнению (3.9), получим

$$\frac{D_+}{Dt}\{v_x\} = F_+(z, t)\{v_x\}, \quad F_+(z, t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\partial \ln c}{\partial t} + \left(1 + \frac{v_z}{c}\right)\frac{\partial c}{\partial z}\right] \tag{3.10}$$

Здесь

$$\frac{D_+}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_z + c)\frac{\partial}{\partial z}$$

оператор полного дифференцирования по времени вдоль характеристики. На этой характеристике $\{u_2\} = 0$. Интегрируя (3.10) с начальным условием

$\{v_x\}|_{t=t_0} = \{v_x\}_0$, получим

$$\{v_x\} = \{v_x\}_0 \exp \int\limits_{t_0}^{t} F_+ (z_+ (t'), t')\, dt' \tag{3.11}$$

При интегрировании F_+ в (3.10) надо вместо z подставить $z_+(t')$, где $z_+(t')$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{dz_+}{dt'} = v_z (t') + c\,(z_+, t')$$

с начальным условием $z_+ = z_0$ при $t' = t_0$

Аналогично на характеристике $dz / dt = v_z - c$ получим уравнение

$$\frac{D_-}{Dt} \{v_x\} = F_-(z, t) \{v_x\}, \quad F_-(z, t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\partial \ln c}{\partial t} + \left(\frac{v_z}{c} - 1\right)\frac{\partial c}{\partial z}\right]$$

решение которого имеет вид

$$\{v_x\} = \{v_x\}_0 \exp \int\limits_{t_0}^{t} F_- (z_-(t'), t')\, dt', \quad \frac{dz_-}{dt'} = v_z(t') - c\,(z_-, t'), \quad z_-(t_0) = z_0 \tag{3.12}$$

Формулы, в точности совпадающие с (3.11), (3.12), дают выражение для $\{v_y\}$. Тогда из (3.7) можно найти скачки всех остальных величин, если по одну сторону линии разрыва заданы напряжения $T_{xx}^{(1)}, T_{xy}^{(1)}, T_{yy}^{(1)}$.

На характеристиках второго типа, удовлетворяющих (3.6), величины $\{T_{xx}\}$, $\{T_{xy}\}$, $\{T_{yy}\}$ определяются формулами

$$\{T_{xx}\} = \{T_{xx}\}_0 \exp \frac{-t}{\lambda}, \quad \{T_{xy}\} = \{T_{xy}\}_0 \exp \frac{-t}{\lambda}, \quad \{T_{yy}\} = \{T_{yy}\}_0 \exp \frac{-t}{\lambda}$$

Рассмотрим частный случай, когда c зависит только от t. Тогда на характеристиках первого типа

$$\{\mathrm{V}\} = \{\mathrm{V}\}_0 \left[\left(T_0 + \frac{\eta}{\lambda}\right)\Big/\left(T_0 \exp\frac{-t}{\lambda} + \frac{\eta}{\lambda}\right)\right]^{1/4} \exp\frac{-t}{2\lambda}, \quad T_{zz} = T_0 \exp\frac{-t}{\lambda}$$

Из последней формулы видно, что скачок скорости монотонно убывает с ростом t и при $t \to \infty$ стремится к нулю.

Можно показать, что в другом частном случае, когда c зависит только от z, разрыв скорости также затухает при $t \to \infty$. Однако для малых времен начальный разрыв может нарастать, если $T_* = T_{zz}|_{z=0}$ достаточно велико. Для больших T_* и малых t верна асимптотическая формула

$$\{\mathrm{V}\} \approx \{\mathrm{V}\}_0 \exp\left(\frac{1}{2}\left[1 - \exp\left(\mp\sqrt{\frac{T_*}{\rho}}\frac{t}{2\lambda v_0}\right)\right]\right) \qquad v_0 = v_z, \quad z_+(0) = 0$$

Если, например, $v_0 > 0$, то на характеристике $z_+(t)$ начальный разрыв будет нарастать в течение некоторого малого интервала времени. Отметим, что величина разрыва все же остается ограниченной, когда T_* стремится к бесконечности.

Поступила 12 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. н., 1959, т. 14, № 2.
2. Oldroyd J. G. On the formulation of the rheological equations of state Proc. Roy. Soc, ser. A, 1950, vol. 200, No. 1063, p. 523.
3. Coleman B. D., Gurtin M. E., Herrera I. R. Waves in materials with memory. I. The velocity of one-dimensional shock and acceleration waves. Arch. Rat. Mech. Anal., 1965, vol. 19, № 1.
4. Регирер С. А., Руткевич И. М. Некоторые особенности уравнений гидродинамики неньютоновских сред. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.