Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ГАЗОВЗВЕСЕЙ. КВАЗИИЗОТРОПНАЯ МОДЕЛЬ

Ю. А. Буевич

(Москва)

Предложена статистическая теория потоков систем типа газ — взвешенные частицы, основанная на допущении об изотропии флуктуаций концентрации частиц. Структура равновесных состояний рассмотрена в безградиентном приближении; оценены средние квадраты пульсаций динамических величин и коэффициенты переноса в течении; определен размер локальных неоднородностей. Получены уравнения для энергии пульсационных движений диспергированной фазы в разных направлениях, составлено уравнение энергии, дополняющее систему динамических уравнений в [1].

Статистические характеристики случайных пульсационных движений фаз в потоке газовзвеси могут быть найдены после решения системы интегро-дифференциальных спектральных уравнений, полученных в [1]. Система эта весьма сложна; поэтому целесообразно использовать некоторые для ее упрощения дополнительные гипотезы; при этом стохастические уравнения из [1] могут быть сведены к уравнениям работы [2].

§ 1. Уравнения для пульсаций. Рассматриваем ниже течение монодисперсной газовзвеси в предположении, что временные и пространственные масштабы изменения усредненных параметров, описывающих течение («динамических величин»), велики по сравнению с масштабами локальных пульсационных движений. Это позволяет, в частности, вести вычисления в системе координат, в которой скорость диспергированной фазы в рассматриваемом элементе объема тождественно равна нулю.

Используем наиболее «мелкозернистое» описание пульсаций динамических величин, возможное в рамках представления о фазах как о взаимодействующих взаимопроникающих сплошных средах, т. е. выбираем в качестве характерного физического объема (масштаба усреднения по терминологии в [1]), удельный объем $\sigma = l^3$ одной взвешенной частицы [1,2]. В соответствии с сделанным выше предположением пренебрегаем производными динамических величин по времени и координатам по сравнению с соответствующими производными флуктуаций этих величин. По своему смыслу это приближение аналогично известному гидродинамическому приближению в кинетической теории [2]. Тогда в обозначениях работы [1] для пульсаций усредненных параметров имеем уравнения

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho_l' - (1-\rho)\frac{\partial \mathbf{v}_l'}{\partial \mathbf{r}} = Q_l^{(g)}, \qquad \frac{\partial \rho_l'}{\partial t} + \rho\frac{\partial \mathbf{w}_l}{\partial \mathbf{r}} = Q_l^{(p)} \\
-(1-\rho)\frac{\partial \pi_l'}{\partial \mathbf{r}} - \left(-\frac{d\pi}{d\mathbf{r}} + \beta\frac{d(\rho K)}{d\rho}\mathbf{u}\right)\rho_l' - \beta\rho K(\mathbf{v}_l' - \mathbf{w}_l') = \mathbf{F}_l^{(i)} \\
\rho\frac{\partial \mathbf{w}_l'}{\partial t} = -\rho\frac{\partial \pi_l'}{\partial \mathbf{r}} + \left(-\frac{d\pi}{d\mathbf{r}} + \mathbf{g} + \beta\frac{d(\rho K)}{d\rho}\mathbf{u}\right)\rho_l' + \frac{\partial(\rho\sigma_l')}{\partial \mathbf{r}} + \\
+\beta\rho K(\mathbf{v}_l' - \mathbf{w}_l') - \mathbf{F}_l^{(p)} + \mathbf{F}_l^{(i)}, \quad K = K(\rho), \quad \beta = \frac{9\varkappa\nu_0}{2a^2}, \quad \varkappa = \frac{d_1}{d_2}
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Тензор σ_l' описывает напряжения, обусловленные влиянием на рассматриваемое пульсационное движение возмущений, масштаб которых меньше l. Эффективную вязкость, вызванную такими возмущениями, можно считать весьма малой, в связи с чем член с σ_l' в (1.1) ниже опускаем. Физически это соответствует пренебрежению переносом энергии от исследуемых пульсаций к «дрожаниям» частиц и газа в пределах отдельных удельных объемов.

Тензор нормальных напряжений π' в общем случае не обязательно шаровой (см. обсуждение в [2]). Использование именно шарового тензора π' в [1] связано с аппаратными приближениями в рамках принятой в [1] гипотезы, согласно которой допускается возможность явного описания возмущений как угодно малого масштаба в рамках единых уравнений сплошной среды.

Величины Q и $\mathbf{F}$ в правых частях уравнений (1.1) представляют собой случайные функции, временной масштаб существенного изменения которых τ намного ниже масштаба затухания корреляционных функций T. Поэтому при анализе процессов, протекающих за время $t \gg \tau$ (но $t \ll T$ или $t \gtrsim T$) эти величины можно рассматривать как марковские случайные функции времени. Это обстоятельство позволяет также более строго обосновать основной метод работы [2]. Действительно, усредняя уравнения (1.1) по промежуткам времени $t \gg \tau$, приходим непосредственно к уравнениям того же типа, что и в [2], позволяющим описывать регулярное вырождение флуктуационного поля при помощи решения некоторой задачи с начальными данными.

Как отмечено в [1], величины τ и T подобны по смыслу внутреннему и внешнему временным масштабам турбулентности однофазной жидкости, введенным в [3]. Кроме того, величину τ можно рассматривать как характерное время взаимодействия τ_i в исследуемой статистической системе, так что предположение о марковости случайных величин Q и $\mathbf{F}$ в (1.1) эквивалентно известной асимптотике $t \gg \tau_i$ в неравновесной статистической механике (см., например, [4]). Соотношение между (1.1) и соответствующими усредненными уравнениями по своему смыслу такое же, как между уравнением Лиувилля и уравнениями, получаемыми из него в приближении случайных фаз (например, управляющим уравнением или уравнением Больцмана).

Пренебрегая σ'_l, из (1.1) имеем уравнение для π_1' (индекс l здесь и ниже опускаем)

$$-(1-\rho)\frac{\partial^2\pi'}{\partial\mathbf{r}\,\partial\mathbf{r}} = \frac{\beta\rho K}{1-\rho}\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \left[-\frac{d\pi}{d\mathbf{r}} + \beta K\left(\frac{1}{1-\rho} + \rho\frac{d\ln K}{d\rho}\right)\mathbf{u}\right]\frac{\partial\rho'}{\partial\mathbf{r}} - \beta\rho K\frac{\partial\mathbf{w}'}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial\mathbf{F}^{(i)}}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\beta\rho K}{1-\rho}Q^{(g)} \qquad (1.2)$$

Представляя π' в виде суммы $\pi_0'\mathbf{I} + \pi_1'$, где $\mathbf{I}$ — единичный тензор, используя очевидные соображения симметрии и оставляя в уравнении для π_0' изотропное, а в уравнении для π_1' анизотропное слагаемое в правой части (1.2), получим в результате соотношение для $\nabla\pi_1'$

$$-\frac{\partial\pi_1'}{\partial\mathbf{r}} = \frac{1}{1-\rho}\left[-\frac{d\pi}{d\mathbf{r}} + \beta K\left(\frac{1}{1-\rho} + \rho\frac{d\ln K}{d\rho}\right)\mathbf{u}\right]\rho' - \frac{\beta\rho K}{1-\rho}\mathbf{w}' + \frac{\mathbf{F}^{(i)}}{1-\rho} \qquad (1.3)$$

Используя (1.3), из (1.1) после ряда преобразований получим уравнение

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \mathbf{W}\frac{\partial\rho'}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\mathbf{F}^{(p)} - \frac{\mathbf{F}^{(i)}}{1-\rho}\right) + \frac{\beta\rho K}{1-\rho}\left(\frac{Q^{(p)}}{\rho} + \frac{Q^{(g)}}{1-\rho}\right)' + \frac{\partial Q^{(p)}}{\partial t} \qquad (1.4)$$

Уравнения для π_0', $\mathbf{w}'$ и $\mathbf{v}'$ имеют, согласно (1.1) и (1.2), вид

$$-(1-\rho)\frac{\partial^2\pi_0'}{\partial\mathbf{r}\,\partial\mathbf{r}} = \frac{\beta\rho K}{1-\rho}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t} - Q^{(g)}\right), \qquad \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\beta K}{1-\rho}\right)\mathbf{w}' + \frac{\partial\pi_0'}{\partial\mathbf{r}} =$$
$$= \mathbf{W}\rho' - \mathbf{F}^{(p)} + \frac{\mathbf{F}^{(i)}}{1-\rho}, \qquad \beta\rho K\mathbf{v}' + (1-\rho)\frac{\partial\pi_0'}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\beta\rho K}{1-\rho}\mathbf{u}\rho' \tag{1.5}$$
$$\mathbf{W} = -\frac{1}{1-\rho}\frac{d\pi}{d\mathbf{r}} + \mathbf{g} + \frac{\beta K}{1-\rho}\left(\frac{1}{1-\rho} + \rho\frac{d\ln K}{d\rho}\right)\mathbf{u}, \qquad b_1 = \frac{\beta K}{(1-\rho)^2}$$

В рассматриваемой задаче интерес представляют лишь псевдотурбулентные движения, обусловленные взаимодействием несущего потока и сил тяжести с флуктуациями концентрации системы, но не обычные турбулентные движения фаз. Поэтому достаточно исследовать лишь частное «естественное» решение системы (1.4), (1.5), определяемое наличием в правых частях уравнений случайных функций Q и $\mathbf{F}$.

Сравним между собой различные члены в правой части уравнения (1.4). Последний член имеет, очевидно, порядок величины $\tau^{-1}\,Q^{(p)}$, т. е. в пределе $\tau \to 0$ он значительно выше первых двух членов (среднеквадратичные значения случайных функций Q, F_i предполагаем одного порядка по величине τ). Отсюда видно, что в рассматриваемом «марковском» приближении достаточно учитывать в (1.4), (1.5) лишь члены с функцией $Q^{(p)}$, пренебрегая членами с $\mathbf{F}$ и $Q^{(g)}$. Нетрудно видеть также, что $Q^{(p)}$ описывает как раз тот статистический шум, белый во времени, который был введен в [2] из интуитивных физических соображений.

Введем представления случайных процессов в виде стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса. Тогда для случайной меры dZ_ρ процесса ρ' получим из (1.4) уравнение

$$dZ_\rho = (i\omega^2 + b_1\omega + b_2)^{-1}\,dC, \qquad b_2 = \mathbf{Wk} \tag{1.6}$$

Здесь величина dC представляет случайную меру процесса, марковского во времени. Отметим, что (1.6) совпадает с аналогичным уравнением в [2] при стремлении отношения плотностей фаз $\varkappa$ к нулю.

По-прежнему пренебрегая величинами $Q^{(g)}$, $\mathbf{F}^{(i)}$ и $\mathbf{F}^{(p)}$, для случайных мер процессов π_0', $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{w}'$ получим из (1.5) выражения

$$dZ_{\pi 0} = i\rho b_1\frac{\omega}{k^2}dZ_\rho, \qquad d\mathbf{Z}_v = \frac{1}{1-\rho}\left(\mathbf{u} + \frac{\omega\mathbf{k}}{k^2}\right)dZ_\rho$$
$$d\mathbf{Z}_w = \frac{1}{\rho\,(i\omega + \omega_0)}\left(\mathbf{W} + \rho b_1\frac{\omega\mathbf{k}}{k^2}\right)dZ_\rho, \qquad \omega_0 = \frac{\beta K}{1-\rho} \tag{1.7}$$

Эти выражения тоже эквивалентны соотношениям в [2]. Пульсационное движение дисперсионной среды вторично в том смысле, что само его появление обусловлено необходимостью сохранения массы при хаотических движениях частиц и вызванных ими флуктуациях концентрации частиц в системе (см. обсуждение в [2]). Нетрудно записать также выражение для величины $\mathbf{k}d\mathbf{Z}_{\pi_1}$, следующее из (1.3).

Заметим, что эти же результаты легко получаются и для взвесей частиц в капельной жидкости, когда нельзя пренебрегать импульсом и вязкой диссипацией энергии в дисперсионной среде. Метод работы [1] в сочетании с идеями, использованными выше, и в этом случае приводит к уравнениям, записанным в [2].

Ниже для примера ряд расчетов проведен для одномерного безградиентного стационарного течения. Для такого течения из динамических уравнений в [1] имеем соотношения

$$\frac{d\pi}{d\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{g}}{g}\frac{d\pi}{dx_0} = \rho\mathbf{g}, \quad \mathbf{u} = -\frac{(1-\rho)\,\mathbf{g}}{\beta K}, \quad \mathbf{W} = -\rho\mathbf{g}\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d\ln K}{d\rho}\right) \tag{1.8}$$

Эти соотношения позволяют описывать такие течения посредством задания единственной динамической величины.

§ 2. **Структура равновесных состояний.** Согласно [2], спектральная плотность $\Psi_{\rho,\rho}(\omega,\ \mathbf{k})$ случайного процесса ρ' может быть выражена при помощи (1.6) через частную спектральную плотность $\Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k})$ этого процесса, описывающую только одновременные корреляционные функции. Положение отдельной частицы в рассматриваемой здесь модели определяется с точностью до ее удельного объема. Учет этой неопределенности при помощи процедуры сглаживания коротковолновых деталей спектра, введенной Массиньоном, позволил получить в [5] выражение для $\Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k})$ в системе статистически независимых частиц. В [2] указано, что вместо метода Массиньона можно использовать и какой-либо эквивалентный метод. Используя для определенности наиболее простую процедуру сглаживания спектра, основанную на известных идеях Дебая, прежним путем получим соотношения [2,5]

$$\begin{gathered}\Psi_{\rho,\,\rho}(\omega,\,\mathbf{k}) = \frac{\Phi_{\rho,\,\rho}(k)}{\omega^4 + (b_1\omega + b_2)^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^4 + (b_1\omega + b_2)^2}\right)^{-1}\\ \Phi_{\rho,\,\rho}(k) = \frac{3}{4\pi}\frac{\rho^2}{k_0^3}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right)Y(k_0 - k)\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $Y(x)$ — функция Хевисайда, ρ_* — концентрация газовзвеси в состоянии плотной упаковки, а величина k_0 просто связана с размером независимой статистической единицы в системе. Для системы статистически независимых частиц роль такой единицы играет частица со своим удельным объемом, когда

$$k_0 = k_\infty = (^3/_2\ \pi\rho)^{1/3}a^{-1} = (^3/_2\pi)^{1/3}b^{-1}, \qquad b = a\rho^{-1/3} \tag{2.2}$$

В общем случае гипотеза о статистической независимости не адекватна (приближенный критерий появления крупномасштабных возмущений и наступления неоднородного режима течения сформулирован в [2]). Ясно, что в этом случае наличие корреляционных связей между поведением соседних частиц вызывает увеличение независимой статистической единицы в потоке, так что k_0 в (2.1) оказывается меньше величины k_∞ из (2.2). Поэтому ниже рассматриваем k_0 как некоторую функцию динамических величин и физических параметров фаз.

Грубо говоря, использование формулы (2.1) при $k_0 < k_\infty$ соответствует представлению о газовзвеси как о системе, состоящей из групп частиц, поведение которых в пределах одной группы полностью коррелировано, но зато сами группы статистически независимы. Величина b_0, связанная с k_0 так же, как b в (2.2) связана с k_∞, представляет тогда радиус объема, занятого такой группой, и определяет, тем самым, как масштаб дальнодействия в исследуемой системе, так и масштаб возникающих неоднородностей. Речь здесь идет, конечно, о структурных неоднородностях, обусловленных статистическими свойствами локальных взаимодействий в системе, а не о тех возмущениях, которые могут возникнуть в результате нарушения гидродинамической устойчивости потока.

Отметим, что с точностью до постоянных множителей порядка единицы к тем же результатам (2.1) и (2.2) приводят и более стандартные рассуждения, основанные на приравнивании числа гармоник в фурье-представлениях случайных процессов числу степеней свободы частиц в рассматриваемом элементе объема. С этой точки зрения появление корреляционных связей между частицами эквивалентно уменьшению числа степеней свободы в системе.

В принципе можно было бы использовать и феноменологический подход, аналогичный известному методу Орнштейна и Цернике в теории критических флуктуаций плотных газов (см., например, [6]), т. е. использовать какую-либо разумную функциональную зависимость для $\Phi_{\rho\rho}(k)$, содержащую один или несколько эмпирических параметров. Ниже для сравнения используем спектральную плотность такого типа, отвечающую гауссовой корреляционной функции $Q_{\rho\rho}(\xi)$ процесса ρ', т. е.

$$Q_{\rho,\rho}(\xi) = \rho^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)\exp\frac{-k_0^2\xi^2}{4}, \qquad \Phi_{\rho,\rho}(k) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\frac{\rho^2}{k_0^3}\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)\exp\frac{-k^2}{k_0^2} \tag{2.3}$$

Параметр k_0 в (2.3) имеет тот же, смысл что и в (2.1).

Часть пульсационной энергии диссипируется в результате передачи энергии от рассматриваемых возмущений к мелкомасштабным «дрожаниям» частиц в пределах их удельных объемов, осуществляемой за счет прямых и непрямых столкновений между частицами [5]. Если течение неоднородно, т. е. масштабы пульсаций велики по сравнению с радиусом удельного объема, то влияние мелкомасштабных «дрожаний» можно описать при помощи введения эффективной вязкости, обусловленной ими. Считая движения в пределах удельных объемов приблизительно изотропными и обозначая указанную вязкость через ν_m, для диссипации энергии мелкомасштабными движениями имеем уравнение

$$\varepsilon_m = \rho d_2 \nu_m \int\limits_\omega \int\limits_{\mathbf{k}} \left(k^2 \Psi_{wi,\,wi} + \frac{1}{3} k_i k_j \Psi_{wi,\,wj}\right) d\omega\, d\mathbf{k} \tag{2.4}$$

$$\Psi_{wi,\,wj}(\omega, \mathbf{k})\, d\omega\, d\mathbf{k} = \langle dZ_{wi}^* dZ_{wj}\rangle$$

Соотношение (2.4) отлично от выражения в [5] тем, что в нем удержаны члены, обусловленные «сжимаемостью» диспергированной фазы, т. е. отличием дивергенции $\mathbf{w}'$ от нуля. Представление об изотропии пульсаций частиц внутри удельных объемов в некотором смысле аналогично гипотезе о локальной изотропии в теории турбулентности и подтверждается прямыми наблюдениями (см., например, [7]). Заметим, кстати, что вывод об изотропии частной спектральной плотности $\Phi_{\rho,\rho}(k)$ согласуется с известными результатами, согласно которым пространственные корреляции плотности газа в первом приближении не зависят от интенсивности обобщенных термодинамических сил [6].

Очевидно, величина ε_m должна равняться диссипации энергии мелкомасштабных «дрожаний» за счет вязкого взаимодействия с газом. Для последней величины используем, как и в [5], выражение, следующее из теории броуновского движения, т. е. $\varepsilon_m = 3\rho d_2 \beta^2 K_1^2$, где $K_1(\rho)$ — функция, учитывающая влияние ограниченности удельного объема на силу вязкого взаимодействия и аналогичная функции $K(\rho)$ в (1.1). Вообще говоря, $K_1(\rho) \neq K(\rho)$. Приравнивая два выражения для ε_m, получим уравнение

$$3\beta^2 K_1^2 = I = \int\limits_{\omega}\int\limits_{\mathbf{k}} \left(k^2 \Psi_{wi,\,wi} + \frac{1}{3} k_i k_j \Psi_{wi,\,wj}\right) d\omega\, d\mathbf{k} \tag{2.5}$$

Это уравнение должно быть использовано для определения параметра k_0 в выражениях для $\Phi_{\rho,\rho}(k)$ из (2.1) или (2.3).

Результаты, полученные выше, позволяют выразить все представляющие интерес корреляционные функции в виде квадратур по ω и $\mathbf{k}$. При конкретном интегрировании возникают трудности, связанные со сложным видом знаменателя в выражении (2.1) для $\Psi_{\rho,\rho}(\omega, \mathbf{k})$. Ниже для иллюстрации рассмотрен лишь один предельный случай, когда такое интегрирование значительно упрощается. В общем случае получаемые результаты можно рассматривать как некоторые модельные.

Наиболее интересен неоднородный режим течения газовзвеси, возникающий согласно [2], в области значений параметров, когда $|b_2|$ в (2.1) больше b_1^2. В пределе при $b_1^2 \ll |b_2|$ в основной части пространства интегрирования по k из (2.1) имеем

$$\Psi_{\rho,\rho}(\omega, \mathbf{k}) \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{W^{3/2}|k_1|^{3/2}}{\omega^4 + W^2 k_1^2} \Phi_{\rho,\rho}(k), \qquad |b_2| \sim W k_0 \gg b_1^2 \tag{2.6}$$

Направление оси $x_1 = x$ выбрано здесь вдоль вектора $\mathbf{W}$.

В противоположном предельном случае имеем вместо (2.6)

$$\Psi_{\rho,\rho}(\omega, \mathbf{k}) \approx \frac{2^{-1/2} b_1^{-1} W^2 k_1^2 \Phi_{\rho,\rho}(k)}{\pi(\omega^2 + b_1^2)\left[(\omega + W k_1 / b_1)^2 + {}^1/_2 W^4 k_1^4 b_1^{-3}\right]^2} \tag{2.7}$$

Асимптотике (2.6) отвечает приближенное решение уравнения (2.5) в форме (используем $\Phi_{\rho\rho}(k)$ из (2.1))

$$k_0 \approx 1.30 \frac{\beta^2 K^{2/3} K_1^{4/3}}{W\left[(1-\rho)(1-\rho/\rho_*)\right]^{2/3}}$$

При интегрировании в (2.5) был учтен только наиболее большой анизотропный член в выражении спектрального тензора $\Psi_{wi,wj}(\omega, k)$ процесса $\mathbf{w}'$ и использовано соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + \omega_0^2)(\omega^4 + W^2 k_1^2)} \approx \frac{1}{W^2 k_1^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + \omega_0^2} = \frac{\pi}{\omega_0 W^2 k_1^2}$$

Если использовать $\Phi_{\rho,\rho}(k)$ из (2.3), то получится формула того же типа для k_0, но с числовым коэффициентом 0.825 вместо 1.30. В общем случае, следовательно, указанная формула верна лишь с точностью до множителя порядка единицы. В частности, для течения, описываемого соотношениями (1.8), имеем выражения

$$k_0 \approx CG(\rho) u^{-2} g \equiv CG_0(\rho)\, k_*, \qquad C \sim 1, \qquad k_* = u_0^{-2} g, \qquad u_0 = g / \beta$$

$$G(\rho) = \frac{(1-\rho)^{4/3}}{\rho(1-\rho/\rho_*)^{2/3}} \left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d \ln K}{d\rho}\right)^{-1} \left(\frac{K_1}{K}\right)^{4/3}, \qquad G_0(\rho) = G(\rho)\left(\frac{K}{1-\rho}\right)^2 \tag{2.8}$$

Отсюда видно, что основное допущение (2.6) может выполняться лишь при достаточно малых ρ, либо же ρ, весьма близких к ρ_*. В общем случае формула (2.8) дает порядок истинной величины k_0. Например, в противоположной асимптотике (2.7) для k_0 получим из (2.5) следующее выражение:

$$k_0 \approx CG'(\rho)\, u^{-2}g, \qquad G'(\rho) = \frac{1-\rho}{[1-0.80\rho+0.28\rho^2(2-\rho)(1-\rho)^{-1}]^{1/2}} \times$$
$$\times \left[\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{1-\rho}+\frac{d\ln K}{d\rho}\right)\right]^{-1}\frac{K_1}{K} \qquad (2.9)$$

Легко видеть, что значения функции $G'(\rho)$ почти при всех ρ имеют тот же порядок, что и значения $G(\rho)$ из (2.8). Заметим, что $G(\rho)$ и $G'(\rho)$ из (2.8) и (2.9) слабо зависят от физических параметров фаз и динамических переменных, что связано с аналогичной зависимостью функции $K(\rho)$. Например, для нее можно принять $K(\rho) \approx (1-\rho)^{-n}$, где параметр n принимает различные значения в разных областях изменения безразмерных критериев, описывающих движение [8].

Зависимости (2.8) и (2.9) верны при $k_0 < k_\infty$, когда корректно введение вязкости ν_m и, следовательно, справедливо уравнение (2.5). Если k_0 в (2.8) или (2.9) больше или равно k_∞ из (2.2), следует принять $k_0 \equiv k_\infty$. Видно, что нарушение однородности потока газовзвеси облегчено при промежуточных значениях ρ из интервала $(0, \rho_*)$. При $\rho \to 0$ и $\rho \to \rho_*$ течение любой газовзвеси, характеризуемой как угодно малой величиной k_* из (2.8), однородно. Последнее качественно согласуется с результатами многочисленных опытов по псевдоожижению твердых частиц. Действительно, слой частиц вблизи от начала псевдоожижения или при весьма больших потоках взвешивающего газа однороден, даже если развитый взвешенный слой этих же частиц существенно неоднороден [9].

Условие однородности течения газовзвеси можно записать в виде $k_0 \gtrsim k_\infty$. Учитывая, что $ak_* \sim A$, где A — число Архимеда, из (2.2) и (2.8) нетрудно получить это условие в форме, подобной форме приближенного условия однородности в [2]. Критерий наступления неоднородного режима течения данной системы частиц в данном газе (т. е. при фиксированной величине k_*) при произвольной концентрации ρ можно написать в виде

$$\min_\rho \{k_0 - k_\infty\} < 0$$

После простых преобразований, учитывая, что $\min\{\rho^{-1/3} G\} \sim 1$, получим этот критерий в форме

$$F = u^2 (ag)^{-1} \gtrsim 1 \qquad (2.10)$$

где F — безразмерный параметр Фруда течения. Неравенство (2.10) в точности совпадает с эмпирическим критерием нарушения однородности псевдоожижения, установленным в [10] на основании обработки большого количества экспериментальных данных.

Для размера b_0 неоднородностей в течении из (2.2) и (2.8) имееем соотношение

$$b_0 \approx \frac{1}{C}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{1/3}\frac{F}{G(\rho)} \equiv \frac{1}{C}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{1/3}\frac{F_0}{G_0(\rho)}, \qquad F_0 = \frac{u_0^2}{a_g} = \frac{1}{ak_*} \qquad (2.11)$$

Это выражение по структуре совпадает с формулой для диаметра газового пузыря во взвешенном слое, полученной в [9] из анализа устойчивости пузыря, но смысл его совершенно иной. Действительно, (2.11) характеризует размер неоднородностей, появление которых обусловлено особенностями локальных взаимодействий в системе, в то время как формула в [9] описывает размер гидродинамических возмущений определенного типа. Коэффициент при числе Фруда F_0 в (2.11) пропорционален $G_0^{-1}(\rho)$ и обычно намного ниже коэффициента в [9], изменяющегося от 200 до 11 000. Это показывает, что даже в относительно однородных потоках возможно устойчивое существование крупных гидродинамических возмущений, в связи с чем особое значение приобретает исследование устойчивости потоков газовзвеси, рассматриваемых в приближении сплошной среды. Экспериментально прогрессирующий рост таких возмущений, вводимых первоначально извне, в однородном взвешенном слое наблюдался, например, в [11].

Асимптотике (2.6) отвечают следующие выражения для среднеквадратичных пульсаций скоростей фаз (соответствующие спектральные плотности вычисляются из (1.7))

$$\langle v_{2'}'^2\rangle \equiv \langle v_{3'}'^2\rangle \approx 0.187\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)\frac{W}{k_0}\delta^2, \quad \langle v_{1'}'^2\rangle \approx 2\langle v_{2'}'^2\rangle +$$
$$+\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)u^2, \quad \langle w_2'^2\rangle \equiv \langle w_3'^2\rangle \approx \rho^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)\frac{b_1^2}{k_0^2} \tag{2.12}$$
$$\langle w_1'^2\rangle \approx \langle w_2'^2\rangle + 3.40\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)\frac{W^{3/2}}{\omega_0 k_0^{1/2}}, \quad \delta = \cos(x_1 x_1')$$

Здесь компоненты $v'_i{}'$ взяты относительно осей x_i' таких, что $x' = x'_1$ направлена вдоль вектора $\mathbf{u}$. Очевидно, оси x_i и x_i' не обязательно совпадают.

В частности, для пульсаций в потоке (1.8) при k_0 из (2.8) из (2.12) получим соотношения

$$\langle v_2'^2\rangle \equiv \langle v_3'^2\rangle \approx V_2(\rho)\,u^2, \qquad \langle v_1'^2\rangle \approx V_1(\rho)\,u^2$$
$$\langle w_2'^2\rangle \equiv \langle w_3'^2\rangle \approx W_2(\rho)\,u^2, \qquad \langle w_1'^2\rangle \approx W_1(\rho)\,u^2$$
$$V_1(\rho) = 2V_2(\rho) + \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)$$
$$V_2(\rho) = \frac{0.144\rho^4}{(1-\rho)^{10/3}}\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{5/3}\left(\frac{2}{1-\rho}+\frac{d\ln K}{d\rho}\right)^2\left(\frac{K}{K_1}\right)^{4/3} \tag{2.13}$$
$$W_1(\rho) = W_2(\rho) + \frac{3.0\rho^2}{(1-\rho)^{2/3}}\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{4/3}\left(\frac{2}{1-\rho}+\frac{d\ln K}{d\rho}\right)^2\left(\frac{K}{K_1}\right)^{2/3}$$
$$W_2(\rho) = \frac{0.592\rho^4}{(1-\rho)^{14/3}}\left(1-\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{7/3}\left(\frac{2}{1-\rho}+\frac{d\ln K}{d\rho}\right)^2\left(\frac{K}{K_1}\right)^{8/3}.$$

Важными характеристиками течения служат обычно отношения

$$N_v = \frac{\langle v_{2'}'^2\rangle}{\langle v_{1'}'^2\rangle}, \qquad N_w = \frac{\langle w_2'^2\rangle}{\langle w_1'^2\rangle}$$

которые легко могут быть вычислены из (2.12) и (2.13). Величина N_w значительно меньше единицы, величина N_v при некоторых ρ оказывается весьма близкой к 0.5. Сравнение рассчитанных величин $\langle w_1'^2\rangle$ и N_w с экспериментальными данными работ [12,13] показало весьма удовлетворительное согласие, несмотря на явно приближенный характер соотношений (2.13). Качественно вычисленные значения согласуются также и с другими опытами по изучению пульсационных движений фаз в псевдоожиженных системах.

При приближении ρ к нулю или ρ_* величина k_0 из (2.8) заменяется на k_∞ из (2.2), какой бы малой ни была величина k_* в (2.8). Соответствующие выражения для средних квадратов пульсаций также легко получаются из (2.12). При этом можно показать, что в области $\rho \sim \rho_*$ выполняется условие (2.6), а в области $\rho \sim 0$, наоборот,— условие (2.7). При $\rho \to \rho_*$ имеем оценки

$$\langle v_i'^2\rangle \sim \langle w_i'^2\rangle \sim 1-\rho/\rho_* \tag{2.14}$$

Прежним путем можно найти выражения $\langle v_i'^2\rangle$ и $\langle w_i'^2\rangle$, отвечающие асимптотике (2.7), а также записать интегральные представления для различных корреляционных функций и провести в них интегрирование для отдельных частных случаев.

Введенный в [1] тензор давления диспергированной фазы в рассматриваемой системе координат диагонален. В пренебрежении объемом, занимаемым самими частицами, имеем равенства

$$P_{11} = \rho d_2\langle w_1'^2\rangle, \qquad P_{22} = P_{33} = \rho d_2\langle w_2'^2\rangle, \qquad P_{ij} = 0, \qquad i \neq j \tag{2.15}$$

Эти соотношения соответствуют чистому псевдотурбулентному режиму движения [2]. Чтобы учесть возрастание роли прямых взаимодействий между частицами с увеличением концентрации системы, в [2] было введено также понятие о псевдогазовом режиме, причем эффективные нормальные напряжения, а также коэффициенты переноса в диспергированной фазе в этом режиме оценивались на основе результатов Энскога для плотного газа жестких сфер [14].

На самом деле представления о непосредственных столкновениях частиц, аналогичных по типу столкновениям молекул газа, даже в концентрированных взвесях крупных частиц в значительной мере условны, что подчеркивалось, например, в [5,7]. Нет, вообще говоря, никакой уверенности, что соотношения Энскога описывают процессы переноса в дисперсной системе с достаточной точностью, равно как и вообще применимость уравнений типа уравнений Больцмана к таким системам представляется в высшей степени сомнительной [2,5]. Ниже для учета собственного объема частиц используем элементарный «геометрический» метод, применявшийся ранее и к газам [14].

Нормальные напряжения в диспергированной фазе P_{ii} равны скоростям передачи плотности импульса этой фазы в i-х направлениях. Скорость передачи импульса в свободном объеме частиц совпадает, очевидно, со скоростью пульсационного движения частиц $\langle w_i'^2\rangle^{1/2} \sim w_i^*$. Скорость распространения импульса в материале частиц c примерно равна скорости звука, т. е. намного больше w_i^*. «Время» распространения импульса $t_L^{(i)}$ на расстояние L в i-м направлении представим в виде

$$t_L^{(i)} \approx \frac{\sigma^{1/3} - \sigma_*^{1/3}}{\sigma^{1/3}} t_1 + \frac{\sigma_*^{1/3}}{\sigma^{1/3}} t_2, \qquad t_1 \approx \frac{L}{w_i^*}, \qquad t_2 \approx \frac{L}{c} \tag{2.16}$$

Здесь σ_* — удельный объем частицы в состоянии плотной упаковки, так что $\sigma - \sigma_*$ представляет собой свободный объем газовзвеси в расчете на одну частицу. Из (2.16) легко получить выражение для средней скорости распространения импульса, а затем обычным путем [14] — выражения для P_{ii}, заменяющие (2.15)

$$P_{11} \approx \rho d_2 \langle w_1'^2\rangle \varphi_1, \qquad P_{22} \equiv P_{33} \approx \rho d_2 \langle w_2'^2\rangle \varphi_2$$

$$\varphi_i = \frac{c}{(1-\gamma)c + \gamma w_i^*} \approx \frac{1}{1-\gamma}, \qquad \gamma = \left(\frac{\sigma_*}{\sigma}\right)^{1/3} = \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{1/3} \tag{2.17}$$

Эффективные коэффициенты диффузии частиц в псевдотурбулентном режиме можно выразить приближенно в виде произведений соответствующих скоростей и пространственных масштабов пульсаций. Масштабы эти можно оценивать разными способами (один из них изложен в [2]). Здесь для простоты ограничимся формальными представлениями

$$D_{11} = \langle w_1'^2\rangle^{1/2} L_1 \sim w_1^* b_0, \quad D_{22} \equiv D_{33} \sim w_2^* b_0 \tag{2.18}$$

Коэффициенты переноса импульса μ_{ii} и пульсационной энергии λ_{ii} выразятся через D_{ii}

$$\mu_{ii} \equiv \lambda_{ii} \approx \rho d_2 D_{ii} \varphi_i \tag{2.19}$$

Здесь также учтен практически мгновенный перенос импульса и энергии в материале частиц.

При $\rho \to \rho_*$ имеем из (2.14) и (2.17) оценки

$$P_{ii} \sim (1-\gamma^3)\left[(1-\gamma) + \frac{w_i^*}{c}\gamma\right]^{-1}, \qquad \gamma^3 = \frac{\rho}{\rho_*}$$

Если $1-\gamma \gg w_i^*/c$, то $P_{ii}\to\text{const}$ при $\rho\to\rho_*(\gamma\to 1)$. Однако при ρ, столь близких к ρ_*, что $1-\gamma \ll w_i^*/c$, имеем $P_{ii}\to 0$. Область ρ, примыкающая к ρ_*, для которой выполняется последнее неравенство, далее не учитывается. Тогда для D_{ii} и μ_{ii} из (2.14) и (2.18), (2.19) имеем при $\rho\to\rho_*$ оценки

$$D_{ii}\sim(1-\gamma^3)^{1/2}\to 0,\qquad \mu_{ii}\sim(1-\gamma^3)^{-1/2}\to\infty,\qquad \gamma\to 1$$

Здесь учтено, что вблизи ρ_* величина $b_0=b$ из (2.2). Нетрудно показать, что величины P_{ii} и D_{ii}, рассматриваемые как функции от ρ, имеют обычно максимумы, а μ_{ii} и λ_{ii} — максимумы и минимумы, что уже отмечалось в [2].

§ 3. Уравнения энергии. Уровень развития пульсационных движений фаз определяется балансом энергии, затрачиваемой несущим потоком и полем тяжести на ускорение индивидуальных частиц и агрегатов или пакетов, состоящих более чем из одной частицы, и диссипации энергии пульсационных движений за счет вязких взаимодействий частиц с газом [1].

Пренебрегая энергией пульсационного движения газа, для величин $\langle w_i'^2\rangle$ из второго и третьего уравнений (1.5) получим следующие уравнения баланса (суммирование по i не производится):

$$\frac{1}{2}\rho\frac{\partial\langle w_i'^2\rangle}{\partial t}=\rho R_i\langle\rho' w_i'\rangle+\frac{\beta\rho K}{1-\rho}\langle v_i' w_i'\rangle-\frac{\beta\rho K}{1-\rho}\langle w_i'^2\rangle \tag{3.1}$$

$$\rho\mathbf{R}=\mathbf{W}-\frac{\beta\rho K}{1-\rho}\mathbf{u}=-\frac{1}{1-\rho}\frac{d\pi}{d\mathbf{r}}+\mathbf{g}+\frac{\beta K}{1-\rho}\left(1+\rho\frac{d\ln K}{d\rho}\right)\mathbf{u},\qquad \mathbf{w}=0$$

Первый член в правой части (2.4) описывает работу усредненного потока газа и сил тяжести на флуктуациях концентрации газовзвеси, второй — работу пульсаций газа на случайных перемещениях частиц, третий — диссипацию энергии пульсаций частиц силами вязкости.

В уравнения (3.1) не входят члены, обусловленные необратимыми процессами передачи пульсационной энергии (см. также [15]), а именно, увеличение пульсационной энергии за счет диссипации кинетической энергии усредненного движения и дивергенция потока пульсационной энергии, обусловленного ее переносом самими пульсациями. Для последнего потока на основании известных принципов термодинамики необратимых процессов имеем представление

$$q_i=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\lambda}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\theta_i+\left(\mathbf{m}^{(i,j)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\theta_j,\qquad \theta_i=\langle w_i'^2\rangle,\quad i\neq j \tag{3.2}$$

Здесь θ_i — удвоенная кинетическая энергия пульсационного движения единицы массы диспергированной фазы в i-м направлении («эффективная температура в i-м направлении»), $\boldsymbol{\lambda}$ — симметричный тензор коэффициентов переноса, который в установившемся («равновесном») состоянии совпадает с тензором $\boldsymbol{\lambda}^\circ$ из (2.19) (ниже все величины, относящиеся к равновесному состоянию, помечаем градусом сверху), а $\mathbf{m}^{(i,j)}$ — тензоры перекрестных коэффициентов, симметричные по i, j. Ниже для простоты всеми перекрестными эффектами пренебрегаем ($\mathbf{m}^{(i,j)}=0$).

Увеличение энергии пульсаций за счет диссипации энергии усредненного движения зависит от производных динамических величин по координатам, поэтому в рассмат-

[1] В соответствии с пренебрежением тензором σ_l' в уравнениях (1.1) малой величиной ε_m, рассматриваемой подробно в § 2, здесь пренебрегаем.

риваемом безградиентном приближении соответствующий член должен опускаться (см. также обсуждение в [15] для случая однофазной жидкости).

Кроме того, в системе в неравновесном состоянии возможен обмен пульсационной энергией между движениями в разных направлениях. Характерное время такого обмена равно, очевидно, $\tau \approx \tau_i$. В используемой асимптотике $t \gg \tau$ таким обменом следует пренебречь, подразумевая при этом, что рассматриваются только «отрелаксированные» в указанном смысле состояния.

Из уравнения (1.4) легко получить соответствующее уравнение для величины $\langle \rho'^2 \rangle$, из которого видно, что при условии ограниченности $\langle \rho'^2 \rangle$ во всем пространстве следует $\langle \rho'^2 \rangle = \langle \rho'^2 \rangle^\circ = \mathrm{const}$. Поэтому учитывая сказанное в § 1 относительно вторичности пульсаций газа, запишем оценки

$$\rho R_i \langle \rho' w_i' \rangle + \rho \omega_0 \langle v_i' w_i' \rangle \sim \theta_i^{1/2} \tag{3.3}$$

Коэффициент пропорциональности здесь очевидным образом выражается через равновесную температуру θ_i° из условия обращения θ_i в равновесном состоянии в θ_i°. В результате из (3.1) — (3.3) получим следующие уравнения для температур θ_i:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\theta_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\theta_i + 2\omega_0 \sqrt{\theta_i}\,(\sqrt{\theta_i^\circ} - \sqrt{\theta_i}) \tag{3.4}$$

Для полной определенности этих уравнений, равно как и динамических уравнений в [1], нужно получить зависимость тензоров λ и μ от θ_i. Для этого заметим, что в (2.5) $I \sim m_i \theta_i$, где m_i — некоторые функции k_0, динамических величин и физических параметров фаз системы. Поэтому выражение для k_0 через температуры θ_i в неравновесном состоянии имеет тот же вид, что и выражение k_0° через θ_i° в равновесном состоянии. Далее из (2.18) и (2.19) следует $\lambda_{ii} \sim \theta_i^{1/2} k_0^{-1}(\theta_i)$ (так как $w^*_i \sim \theta_i^{1/2}$) и аналогичное соотношение для μ_{ii}. Поэтому можно записать

$$\lambda_{ii} = \lambda_{ii}^\circ \left(\frac{\theta_i}{\theta_i^\circ}\right)^{1/2} \frac{k_0^\circ(\theta_i^\circ)}{k_0^\circ(\theta_i)}, \qquad \mu_{ii} = \mu_{ii}^\circ \left(\frac{\theta_i}{\theta_i^\circ}\right)^{1/2} \frac{k_0^\circ(\theta_i^\circ)}{k_0^\circ(\theta_i)} \tag{3.5}$$

что и определяет искомые тензора. Зависимость нормальных напряжений от температуры тривиальна: имеем $P_{ii} = P_{ii}^\circ\,(\theta_i/\theta_i^\circ)$.

Например, для асимптотического случая (2.6) имеем последовательно

$$k_0 \approx k_0^\circ \left(\frac{\theta_1^\circ}{\theta_1}\right)^{3/8}, \quad \lambda_{11} \approx \lambda_{11}^\circ \left(\frac{\theta_1}{\theta_1^\circ}\right)^{7/4}, \ \lambda_{22} \equiv \lambda_{33} \approx \lambda_{22}^\circ \left(\frac{\theta_1}{\theta_1^\circ}\right)^{3/4} \left(\frac{\theta_2}{\theta_2^\circ}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

и аналогично для μ_{ii}.

Подчеркнем, что использование уравнения (2.5) для описания неравновесных состояний соответствует допущению, что для мелкомасштабных «дрожаний» равновесие устанавливается значительно быстрее, чем для крупномасштабных пульсаций. Выполнение этого допущения очевидно для стационарных течений газовзвесей.

Уравнения пульсационной энергии (3.4) и соотношения типа (3.5), (3.6), играющие роль своеобразных «уравнений состояния», замыкают систему динамических уравнений работы [1]. Эти уравнения (3.4) имеют тот же смысл, что и уравнение теплопроводности в гидродинамике однофазной жидкости.

Из динамических уравнений в [1] после простых преобразований получим уравнение энергии усредненного движения газовзвеси в форме (приняты обозначения работы [1])

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\rho w^2}{2}=-\frac{w^2}{2}\frac{\partial(\rho\mathbf{w})}{\partial\mathbf{r}}+\mathbf{w}\left[\mathbf{g}+\omega_0\rho(\mathbf{v}-\mathbf{w})-\frac{\partial(\rho\Pi-\rho\sigma^\circ)}{\partial\mathbf{r}}\right] \quad (3.7)$$

$$\Pi=(\rho d_2)^{-1}\mathbf{P},\quad \sigma^\circ=(\rho d_2)^{-1}\tau^\circ$$

Складывая (3.7) с суммой уравнений (3.4), получим уравнение, заменяющее обычное общее уравнение переноса тепла [15]. Уравнение (3.7) можно записать и в других формах.

Особый интерес уравнения (3.4) представляют в связи с тем, что вместе с динамическими уравнениями они позволяют описать взаимодействие потока с твердыми стенками и вырождение пульсационных движений («охлаждение» газовзвеси) в пристеночной области. Это весьма важно как для формулировки правильных граничных условий на стенках, так и особенно для вычисления коэффициентов тепло- или массопередачи к стенке. Эти же уравнения позволяют описать, например, нарастание хаотических пульсаций по высоте взвешенного слоя, влияние на структуру слоя типа газораспределительной решетки и т. п. Отметим, что, согласно изложенному, наличие стенок влияет не только на интенсивность пульсационных движений, но и на их масштаб. Последнее дает естественное объяснение наблюдаемому во многих экспериментах увеличению размеров неоднородностей с ростом расстояния от распределительной решетки.

Поступила 29/X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Буевич Ю. А. Статистическая механика газовзвесей. Динамические и спектральные уравнения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
2. Буевич Ю. А. Неньютоновская гидромеханика дисперсных систем. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
3. Новиков Е. А. Метод случайных сил в теории турбулентности. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 6.
4. Prigogine I. Non-equilibrium statistical mechanics, N. Y.— London, J. Wiley, 1962. (Рус. пер.: Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. М., «Мир», 1964).
5. Буевич Ю. А. К статистической механике частиц, взвешенных в потоке газа. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
6. Леонтович М. А. Статистическая физика. М.— Л., Гостехиздат, 1944.
7. Тодес О. М., Бондарева А. К., Гринбаум М. Б. Движение и перемешивание частиц твердой фазы в псевдоожиженном слое. Хим. пром-сть, 1966, № 6.
8. Richardson J. F., Zaki W. N. Sedimentation and fluidization. Part 1. Trans. Instn Chem. Engrs, London, 1954, vol. 32, No 1.
9. Davidson J. F., Harrison D. Fluidised particles. Cambridge Univ. Press, 1963. (Рус. пер.: Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдоожижение твердых частиц. М., «Химия», 1965).
10. Wilhelm R. H., Kwauk M. Fluidisation of solid particles. Chem. Engng Progr., 1948, vol. 44, p. 201.
11. Davies L., Richardson J. F. Gas interchange between bubbles and the continuous phase in a fluidised bed. Trans. Instn Chem. Engrs, London, 1966, vol. 44, No. 8.
12. Таганов И. Н., Малхасян Л. Г., Романков П. Г. Исследование статистических характеристик случайного процесса движения частицы в псевдоожиженном слое. Теор. основы хим. технол., 1967, т. 1, вып. 4.
13. Таганов И. Н., Галкин О. А., Романков П. Г. Исследование статистических характеристик движения частицы в полидисперсном псевдоожиженном слое. Теор. основы хим. технол., 1967, т. 1, вып. 6.
14. Hirschfelder J. O., Curtiss Ch. F., Bird R. B. Molecular theory of gases and liquids. N. Y.— London, J. Wiley, 1954. (Рус. пер.; Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961).
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2. М., Гостехтеориздат, 1954.