ДВИЖЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОГО РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ ПОРШНЯ

Я. Г. Сапунков (Саратов)

При движении идеального газа под действием расширяющегося поршня поля температур и плотностей имеют особенности на поверхности поршня [1-3]. Они возникают вследствие того, что не учитывается теплопроводность газа, роль которой вблизи поверхности поршня будет определяющей.

Ниже для решения задачи о движении теплопроводного газа под действием расширяющегося теплоизолированного поршня методом внутренних и внешних разложений построен главный член внутреннего асимптотического разложения путем сращивания с решением для идеального газа, которое представляет собой главный член внешнего асимптотического разложения. Таким образом, получается решение, свободное от особенностей. Аналогичное решение для задачи о сильном взрыве получено В. В. Сычевым [4].

1. Пусть в покоящемся газе с плотностью $\rho_0 = \mathrm{const}$ расширяется плоский, цилиндрический или сферический поршень по закону

$$y = At^k \qquad (A,\, k = \mathrm{const})$$

Газ считается вязким, теплопроводным; коэффициент вязкости μ связан с энтальпией h

$$\mu = Ch^m\,(C, m = \mathrm{const})$$

Число Прандтля $\sigma = \mathrm{const}$. Пренебрегая противодавлением и предполагая поверхность поршня теплоизолированной, можно считать, что определяющими параметрами будут ρ_0, C, A. Из определяющих параметров, времени t и пространственной координаты y можно составить две безразмерные переменные

$$\xi_1 = \frac{y}{At^k}, \qquad \xi_2 = \frac{CA^{2(m-1)}}{\rho_0 t^\alpha} \qquad (\alpha = 1 - 2(k-1)(m-1)) \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что при $\alpha > 0$ с течением времени влияние вязкости и теплопроводности на течение газа будет уменьшаться, при $\alpha = 0$ задача становится автомодельной даже с учетом вязкости и теплопроводности, а при $\alpha < 0$ с течением времени влияние вязкости и теплопроводности будет возрастать.

В дальнейшем будет рассматриваться случай $\alpha > 0$, он наиболее интересен и отвечает реальным значениям

$$^1/_2 \leqslant m \leqslant 1, \; k > 2 \,/\, (\nu + 3)$$

при этом $\nu = 0, 1, 2$ соответственно для плоского цилиндрического и сферического случаев.

Из определяющих параметров составим величины, имеющие размерность времени и длины, которые примем за масштабы

$$t_1 = [C\rho_0^{-1}A^{2(m-1)}]^{1/\alpha}, \qquad l_1 = [C^k\rho_0^{-k}A^{2m-1}]^{1/\alpha} \tag{1.2}$$

Обозначая скорость через v, давление через p, введем безразмерные значения для независимых и зависимых переменных

$$t^\circ = tt_1^{-1}, \qquad y^\circ = yl_1^{-1}, \qquad v^\circ = vt_1l_1^{-1} \tag{1.3}$$

$$p^\circ = p\rho_0^{-1}t_1^2l_1^{-2}, \qquad \rho^\circ = \rho\rho_0^{-1}, \qquad h^\circ = ht_1^2l_1^{-2}$$

Запишем уравнения Навье—Стокса для одномерного вязкого теплопроводного газа в безразмерных переменных (для простоты значок $^\circ$ у безразмерных величин далее опущен)

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[h^m\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nu\frac{v}{y}\right)\right] + 2\nu\frac{h^m}{y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t}+v\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\sigma}y^{-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\nu}h^{m}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+$$
$$+2h^{m}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\nu\left(\frac{v}{y}\right)^2\right]-\frac{2}{3}h^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{v}{y}\right)^2$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho y^{\nu})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v y^{\nu})=0,\qquad p=\frac{\gamma-1}{\gamma}\rho h,\qquad \gamma=\frac{c_p}{c_v}\tag{1.4}$$

Перейдем от переменных Эйлера y, t к переменным Лагранжа ψ, t, которые при помощи уравнения неразрывности определяются соотношениями

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{y=\text{const}}=\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\psi=\text{const}}-\rho v y^{\nu}\frac{\partial}{\partial\psi},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\rho y^{\nu}\frac{\partial}{\partial\psi}\tag{1.5}$$

Система (1.4) примет вид

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho y^{\nu}\frac{\partial p}{\partial\psi}=\rho y^{\nu}\frac{\partial}{\partial\psi}\left[h^{m}\left(\frac{4}{3}\rho y^{\nu}\frac{\partial v}{\partial\psi}-\frac{2}{3}\nu\frac{v}{y}\right)\right]+$$
$$+2\nu\frac{h^{m}}{y}\left(\rho y^{\nu}\frac{\partial v}{\partial\psi}-\frac{v}{y}\right)$$
$$\rho\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\rho}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(y^{2\nu}\rho h^{m}\frac{\partial h}{\partial\psi}\right)+2h^{m}\left[\left(\rho y^{\nu}\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\nu\left(\frac{v}{y}\right)^2\right]-\frac{2}{3}h^{m}\left(\rho y^{\nu}\frac{\partial v}{\partial\psi}+\nu\frac{v}{y}\right)^2$$
$$\rho y^{\nu}\frac{\partial y}{\partial\psi}=1,\qquad \frac{\partial y}{\partial t}=v,\qquad p=\frac{\gamma-1}{\gamma}\rho h\tag{1.6}$$

Далее, перейдем к определению главных членов асимптотических разложений решения системы (1.6) при $t\to\infty$, удовлетворяющих начальным и граничным условиям.

2. Внешнее асимптотическое разложение будем искать в виде

$$y=a_0t^{k}\left[Y_0(n)+O(t^{-\alpha})\right],\qquad v=\frac{2k}{\gamma+1}a_0t^{k-1}\left[V_0(n)+O(t^{-\alpha})\right]$$
$$p=\frac{2k^2}{\gamma+1}a_0^{2}t^{2(k-1)}\left[P_0(n)+O(t^{-\alpha})\right],\qquad \rho=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[R_0(n)+O(t^{-\alpha})\right]\tag{2.1}$$
$$h=\frac{2\gamma k^2}{(\gamma+1)^2}a_0^{2}t^{2(k-1)}\left[H_0(n)+O(t^{-\alpha})\right]$$
$$n=(\nu+1)\,a_0^{-(1+\nu)}t^{-(1+\nu)k}\psi,\qquad a_0=\text{const}$$

Подставляя (2.1) в (1.6) и собирая в уравнениях главные члены, получим систему уравнений для определения функций $Y_0(n)$, $V_0(n)$, ..., $H_0(n)$

$$(k-1)V_0-(1+\nu)knV_0'+(1+\nu)kY_0^{\nu}P_0'=0,\qquad (n^{\beta\gamma}P_0R_0^{-\gamma})'=0$$
$$(1+\nu)\frac{\gamma+1}{\gamma-1}R_0Y_0^{\nu}Y_0'=1,\qquad Y_0-(1+\nu)nY_0'=\frac{2}{\gamma+1}V_0\tag{2.2}$$
$$P_0=R_0H_0\qquad\left(\beta=\frac{2(1-k)}{k(1+\nu)\gamma}\right)$$

(штрих означает производную по n).

Искомые функции удовлетворяют условиям на ударной волне

$$Y_0(1)=V_0(1)=P_0(1)=R_0(1)=H_0(1)=1\tag{2.3}$$

Системой уравнений (2.2) с граничными условиями (2.3) описывается автомодельное течение идеального газа под действием расширяющегося поршня.

Поведение решения системы (2.2) вблизи поверхности поршня ($n = 0$) определяется соотношениями

$$
\begin{gathered}
Y_0 = Y_{00} + Y_{01}n^{1-\beta}\,[1 + O\,(n^s)], \quad V_0 = V_{00} + V_{01}n^{1-\beta}\,[1 + O\,(n^s)] \\
H_0 = H_{00}n^{-\beta}\,[1 + O\,(n)], \quad R_0 = R_{00}n^{\beta}\,[1 + O\,(n)] \\
P_0 = P_{00} + P_{01}n[1 + O\,(n^{1-\beta})]
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

$$
s = 1 - \beta \quad \text{при}\ \beta > 0, \qquad s = 1 \quad \text{при}\ \beta < 0
$$

$$
V_{00} = \frac{\gamma + 1}{2}Y_{00}, \quad R_{00} = P_{00}^{1/\gamma}, \quad H_{00} = P_{00}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}
$$

$$
Y_{01} = \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)(1 + \nu)(1 - \beta)}\,Y_{00}^{-\nu}P_{00}^{-1/\gamma}, \quad P_{01} = \frac{(\gamma + 1)(1 - k)}{2k\,(1 + \nu)}\,Y_{00}^{1-\nu}
$$

$$
V_{01} = \frac{\gamma - 1}{2}\,[(1 + \nu)^{-1}(1 - \beta)^{-1} - 1]\,Y_{00}^{-\nu}P_{00}^{-1/\gamma}, \quad a_0 = Y_{00}^{-1}
$$

Постоянные P_{00}, Y_{00} можно определить из полного решения системы (2.2) с граничными условиями (2.3) работы [3].

3. Для определения внутреннего асимптотического разложения во внутренней области течения введем в качестве независимой переменной порядка единицы величину $N = nt^{\delta}$, где $\delta > 0$. Пользуясь принципом сращивания внутренних и внешних разложений [4,5], запишем пределы внешнего разложения в переменных внутреннего разложения

$$
\begin{gathered}
y = a_0t^k\,[Y_{00} + Y_{01}N^{1-\beta}\,t^{-\delta(1-\beta)}\,(1 + O\,(t^{-\delta s}))] \\
v = \frac{2k}{\gamma + 1}\,a_0t^{k-1}\,[V_{00} + V_{01}N^{1-\beta}\,t^{-\delta(1-\beta)}\,(1 + O\,(t^{-\delta s}))] \\
p = \frac{2}{\gamma + 1}\,k^2a_0^2t^{2(k-1)}\,[P_{00} + P_{01}Nt^{-\delta}\,(1 + O\,(t^{-\delta\,(1-\beta)}))] \\
\rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\,R_{00}N^{\beta}\,t^{-\delta\beta}\,[1 + O\,(t^{-\delta})] \\
h = \frac{2\gamma k^2}{(\gamma + 1)^2}\,a_0^2t^{2(k-1)}\,H_{00}N^{-\beta}\,t^{\delta\beta}\,[1 + O\,(t^{-\delta})]
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

Величина δ определяется из условия, что внутренняя область есть такая окрестность поверхности поршня, в которой роль теплопроводности будет определяющей. Тогда из уравнения энергии следует:

$$
\delta = \frac{\alpha}{2 + \beta\,(m - 1)} > 0
$$

Из (3.1) следует, что внутреннее асимптотическое разложение надо искать в виде

$$
\begin{gathered}
y = a_0t^k\,[y_0\,(N) + y_1\,(N)\,t^{-\delta(1-\beta)}\,(1 + O\,(t^{-\delta s}))] \\
v = \frac{2k}{\gamma + 1}\,a_0t^{k-1}\,[v_0\,(N) + v_1\,(N)\,t^{-\delta(1-\beta)}\,(1 + O\,(t^{-\delta s}))] \\
p = \frac{2k^2}{\gamma + 1}\,a_0^2t^{2(k-1)}\,[p_0\,(N) + p_1\,(N)\,t^{-\delta}\,(1 + O\,(t^{-\delta(1-\beta)}))] \\
\rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\,t^{-\delta\beta}\rho_0\,(N)\,[1 + O\,(t^{-\delta})] \\
h = \frac{2\gamma k^2}{(\gamma + 1)^2}\,a_0^2t^{2(k-1)+\delta\beta}\,h_0\,(N)\,[1 + O\,(t^{-\delta})]
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Из условия сращивания разложений (3.2) с внешним разложением получаем, что при $N \to \infty$

$$
\begin{gathered}
y_0\,(N) \to Y_{00}, \quad y_1\,(N) \to Y_{01}\,N^{1-\beta}, \quad v_0\,(N) \to V_{00} \\
v_1\,(N) \to V_{01}N^{1-\beta}, \quad \rho_0\,(N) \to R_{00}N^{\beta}, \quad p_0\,(N) \to P_{00} \\
p_1\,(N) \to P_{01}N, \quad h_0\,(N) \to H_{00}N^{-\beta}
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

Подставляя разложения (3.2) в (1.6) и собирая члены при одинаковых степенях t, получим систему уравнений для определения коэффициентов внутреннего разложения

$$y_0' = 0, \qquad y_0 = \frac{2}{\gamma+1} v_0, \qquad p_0' = 0, \qquad p_0 = \rho_0 h_0$$

$$\beta h_0 + N h_0' + B y_0^{2\nu} p_0 (h_0^{m-1} h_0')' = 0$$

$$(1+\nu)\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0 y_0^{\nu} y_1' = 1$$

$$[k - \delta(1-\beta)] y_1 + [\delta - k(1+\nu)] N y_1' = \frac{2k}{\gamma+1} v_1$$

$$(k-1) v_0 + y_0^{\nu} k (1+\nu) p_1' = 0 \tag{3.4}$$

$$B = \frac{1}{\sigma} a_0^{2(m+1)} k^{2m} (1+\nu)^2 \left[\frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2}\right]^m \frac{(\gamma+1)[2+\beta(m-1)]}{(\gamma-1)[2(1+\nu)k-1]} > 0$$

Решая систему уравнений (3.4) с граничными условиями (3.3) и условиями на поверхности поршня ($N = 0$)

$$h_0' = 0, \ y_1 = 0, \ v_1 = 0$$

получим

$$y_0 = Y_{00}, \qquad v_0 = V_{00}, \ p_0 = P_{00}, \qquad \rho_0 = P_{00} h_0^{-1} \tag{3.5}$$

Функция $h_0(N)$ определяется из пятого уравнения системы (3.4) и граничных условий

$$h_0'(0) = 0, \qquad h_0(N) \to H_{00} N^{-\beta} \text{ при } N \to \infty$$

Краевая задача для $h_0(N)$ благодаря наличию инвариантного преобразования

$$h_0 \to C_1 h_0, \qquad N \to C_1^{(m-1)/2} N \tag{3.6}$$

у уравнения и граничного условия при $N = 0$ сводится к задаче Коши с заданием $h_0(0)$ и $h_0'(0) = 0$. Кроме того, произведя в пятом уравнении системы (3.4) замену переменной

$$N = N_1 (B Y_{00}^{2\nu} P_{00})^{1/2} \tag{3.7}$$

получим уравнение

$$(h_0^{m-1} h_0')' + N_1 h_0' + \beta h_0 = 0 \tag{3.8}$$

Если иметь семейство интегральных кривых уравнения (3.8), удовлетворяющих начальным условиям $h_0(0) = 1$, $h_0'(0) = 0$ для различных значений m и β, ($1/2 \leqslant m \leqslant 1$, $-2 < \beta < 1$), то с помощью замены (3.7) и инвариантного преобразования (3.6) можно получить решения пятого уравнения системы (3.4) для различны хзначений $1/2 \leqslant m \leqslant 1$, $k > 2/(\nu+3)$, $\gamma > 1$, $\nu = 0,1,2$, удовлетворяющие соответствующим условиям сращивания внешних и внутренних разложений.

Отметим, что полученное в работе [4] уравнение (5.4) с начальным условием при $N = 0$ также обладает аналогичным инвариантным преобразованием и, следовательно, решение краевой задачи также сводится к решению задачи Коши.

Решая остальные уравнения системы (3.4), получим

$$y_1 = \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)(1+\nu)(1-\beta)} Y_{00}^{-\nu} P_{00}^{-1} (N h_0 + B Y_{00}^{2\nu} P_{00} h_0^{m-1} h_0')$$

$$v_1 = \frac{\gamma-1}{2(1+\nu)(1-\beta)} P_{00}^{-1} Y_{00}^{-\nu} \{[1-(1-\beta)(1+\nu)] N h_0 +$$

$$+ [1 - \delta(1-\beta) k^{-1}] B Y_{00}^{2\nu} P_{00} h_0^{m-1} h_0'\}$$

$$p_1 = P_{01} N + C_2 \qquad (C_2 = \text{const}) \tag{3.9}$$

Значение плотности и энтальпии на поверхности поршня определяется соотношениями

$$\frac{\rho(0)}{\rho_2} = P_{00} h_0^{-1}(0)\, t^{-\delta\beta}, \qquad \frac{h(0)}{h_2} = h_0(0)\, t^{\delta\beta}$$

где ρ_2 и h_2 — плотность и энтальпия на поверхности ударной волны.

4. В частном случае, когда $\beta = -1$, $m = 1$, что соответствует $k = 2 / (2 - \gamma)$ в плоском случае, удается получить точное решение пятого уравнения системы (3.4), удовлетворяющее соответствующим граничным условиям

$$h_0 = H_{00}\left(\frac{2}{\pi b}\right)^{1/2}\left[e^{-1/_2 bN^2} + bN\int_0^N e^{-1/_2 bN^2}dN\right]$$
$$b = (BY_{00}{}^{2\nu}P_{00})^{-1} \tag{4.1}$$

Тогда, подставляя (4.1) в (3.9), получим (4.2)

$$y_1 = \frac{\gamma - 1}{(\gamma+1)(1+\nu)(1-\beta)} Y_{00}{}^{-\nu}P_{00}{}^{-1/\gamma}\left(\frac{2}{\pi b}\right)^{1/2}\left[(bN^2 - 1)\int_0^N e^{-1/_2 bN^2}dN + Ne^{-1/_2 bN^2}\right]$$

Формулы (4.1) и (4.2) определяют поле энтальпии в окрестности поверхности поршня. Температура на поверхности поршня определяется в этом случае соотношением

$$T = T_2 H_{00}\left(\frac{2}{\pi b}\right)^{1/2} t^{-1/2}.$$

Величина H_{00} выражается через P_{00}, которое определяется из решения соответствующей задачи для идеального газа.

В более общем случае, когда $m = 1$, β — любое, решение выражается через вырожденные гипергеометрические функции $\Phi(a, b, z)$

$$h_0 = C_3\Phi\left(\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{N_1^2}{2}\right)$$
$$y_1 = \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)(1+\nu)(1-\beta)} C_3Y_{00}{}^{-\nu}P_{00}{}^{-1}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{N_1^2}{2}\right) - \right.$$
$$\left. -\beta\Phi\left(\frac{\beta}{2}+1, \frac{3}{2}, -\frac{N_1^2}{2}\right)\right] N$$
$$v_1 = \frac{\gamma+1}{2(1+\nu)(1-\beta)} C_3P_{00}{}^{-1}Y_{00}{}^{-\nu}\left\{[1-(1-\beta)(1+\nu)]\Phi\left(\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{N_1^2}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + [1 - \delta(1-\beta)k^{-1}]\beta\Phi\left(\frac{\beta}{2}+1, \frac{3}{2}, -\frac{N_1^2}{2}\right)\right\} N \tag{4.3}$$
$$C_3 = H_{00}\frac{\Gamma(^1/_2 - {}^1/_2\beta)}{\Gamma(^1/_2)\,2^{1/_2\beta}}(BY_{00}{}^{2\nu}P_{00})^{-1/_2\beta} = \mathrm{const}$$

Здесь N_1 определяется соотношением (3.7), $\Gamma(z)$ — гамма-функция. В случае $\beta = -1$ соотношения (4.3) переходят в (4.1), (4.2).

Автор благодарит С. В. Фальковича и В. В. Сычева за полезные обсуждения работы.

Поступила 20 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Крашенинникова Н. Л. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 8.
2. Григорян С. С. Предельные автомодельные одномерные неустановившиеся движения газа (задача Коши и задача о поршне). ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
3. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, без учета противодавления. ПММ, 1958, т. 22, вып.4.
4. Сычев В. В. К теории сильного взрыва в теплопроводном газе. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущения в механике жидкости. М., «Мир», 1967.