

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ БЕГУЩИХ ВОЛНАХ В БАРОТРОПНОМ ГАЗЕ

А. Ф. Сидоров, О. Б. Хайруллина

(Свердловск)

Получены уравнения потенциальных тройных волн в баротропном газе с произвольным уравнением состояния. Изучаются свойства решений при примыкании одного к другому течений типа двойной и тройной волны. Для случая «тяжелого» газа с большой начальной скоростью звука строятся решения некоторых трехмерных автомодельных задач о трех поршнях, когда три плоскости, образующие бесконечный трехгранный угол, внутри которого газ в момент времени  $t \approx 0$  покоится, начинают выдвигаться из газа с малыми постоянными скоростями.

1. В [1] была выведена система уравнений тройных волн для политропного газа в пространстве годографа скоростей  $u_1, u_2, u_3$ . Двойные волны в баротропном газе для нестационарных потенциальных плоских течений<sup>1</sup> были рассмотрены в [2], причем часть результатов [2] будет незначительным обобщением результатов, полученных в [3,4] для политропного газа.

Уравнения потенциальных нестационарных волн третьего ранга [1] для газа с уравнением состояния  $p = f(\rho)$  ( $p$  — давление,  $\rho$  — плотность) можно вывести совершенно так же, как и в случае политропного газа. Следуя [1], введем в качестве неизвестных функций энтальпию

$$H(u_1, u_2, u_3) = \int \frac{dp}{\rho}$$

и функцию «размещения»

$$\Pi(u_1, u_2, u_3) = \sum_{k=1}^3 x_k u_k - \varphi - tH - \frac{t+1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (1.1)$$

Здесь  $x_k$  — декартовы координаты,  $\varphi$  — потенциал скоростей. Для этих функций  $H$  и  $\Pi$  получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{i,k=1}^3 A_{ik} L_{ik}^j = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

$$A_{ik} = \delta_{ik} - \frac{H_i H_k}{f'}, \quad H_k = \frac{\partial H}{\partial u_k}, \quad H_{mp} = \frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_p}$$

$$L_{ik}^1 = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \Pi_{mp} + \delta_{mp} & \Pi_{np} + \delta_{np} \\ \Pi_{mq} + \delta_{mq} & \Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix}, \quad \Pi_{mp} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_m \partial u_p}$$

$$L_{ik}^2 = (-1)^{i+k} \left\{ \begin{vmatrix} \Pi_{mp} + \delta_{mp} & \Pi_{np} + \delta_{np} \\ H_{mq} + \delta_{mq} & H_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{mp} + \delta_{mp} & H_{np} + \delta_{np} \\ \Pi_{mq} + \delta_{mq} & \Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \right\}$$

$$L_{ik}^3 = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} H_{mp} + \delta_{mp} & H_{np} + \delta_{np} \\ H_{mq} + \delta_{mq} & H_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (m, n \neq k; m < n) \\ (p, q \neq i; p < q) \end{matrix}$$

Здесь  $\delta_{mp}$  — символ Кронекера.

В физическом пространстве  $x_1, x_2, x_3, t$  течение после нахождения функций  $H$  и  $\Pi$  восстанавливается по формулам

$$x_i = u_i + \Pi_i + t(u_i + H_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2), (1.3) получены в предположении, что  $u_1, u_2$  и  $u_3$  функционально независимы.

Система уравнений (1.2) представляет собой переопределенную систему трех уравнений для двух неизвестных функций, причем уравнение для  $H$  будет независимым. Вторые частные производные функций  $H$  и  $\Pi$  входят во все уравнения квадратично.

<sup>1</sup> См. также В. А. Сучков. Применение метода дифференциальных связей к задачам газовой динамики. Кандидатская диссертация. Новосибирск, СО АН СССР.

После нахождения  $H$  нужно брать  $\Pi$ , удовлетворяющее уравнениям (1.2) для  $j = 1, 2$ . При  $\Pi = -1/2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$  эти уравнения автоматически выполняются и уравнение для  $H$  описывает автомодельные течения, зависящие от переменных  $x_i / t$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Примеры неавтомодельных течений типа тройной волны построены в [5].

Если  $u_1, u_2, u_3$  функционально зависимы и течению в пространстве годографа соответствует поверхность  $u_3 = \psi(u_1, u_2)$ , то так же, как и в [1], легко получить уже замкнутую систему трех уравнений для функций  $\Psi, H$  и  $\Pi$  (волны второго ранга) в плоскости  $u_1, u_2$  в виде

$$\begin{aligned} L_1(\Psi) &= R_{11}\Psi_{22} - 2R_{12}\Psi_{12} + R_{22}\Psi_{11} = 0 \\ L_2(H) &= R_{11}(H_{22} + 1 + \Psi_2^2) - 2R_{12}(H_{12} + \Psi_1\Psi_2) + R_{22}(H_{11} + 1 + \Psi_1^2) = 0 \\ L_3(\Pi) &= R_{11}(\Pi_{22} + 1 + \Psi_2^2) - 2R_{12}(\Pi_{12} + \Psi_1\Psi_2) + R_{22}(\Pi_{11} + 1 + \Psi_1^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$R_{ik} = \delta_{ik} + \Psi_1\Psi_k - \frac{1}{f} H_i H_k, \quad \Psi_{ik} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_i \partial u_k}, \quad \Psi_i = \frac{\partial \Psi}{\partial u_i}$$

В физическом пространстве течение восстанавливается по формулам

$$\Pi_i + u_i + \Psi\Psi_i + (H_i + u_i + \Psi\Psi_i)t = x_i + x_3\Psi_i, \quad i = 1, 2 \quad (1.5)$$

Впервые эта система уравнений для политропного газа была получена в [6].

Рассмотрим некоторые свойства течений при примыкании одна к другой волн второго и третьего рангов, полезные при решении конкретных задач. Примыкание течений первого (простые волны) и второго рангов было исследовано в [7].

*Свойство 1.* Если поверхности  $u_3 = \Psi(u_1, u_2)$  соответствует в физическом пространстве поверхность  $F(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ , вдоль которой при ее движении осуществляется примыкание некоторой тройной волны к пространственной двойной волне, то  $u_3 = \Psi(u_1, u_2)$  будет характеристической поверхностью для системы (1.2).

Пусть на поверхности  $u_3 = \Psi$  заданы начальные данные

$$H = H(u_1, u_2), \quad H_\psi = H_\psi(u_1, u_2), \quad \Pi = \Pi(u_1, u_2), \quad \Pi_\psi = \Pi_\psi(u_1, u_2) \quad (1.6)$$

Здесь  $H_\psi$  и  $\Pi_\psi$  — выводящие производные.

Вводя в уравнениях (1.2) вместо  $u_3$  новую независимую переменную  $\lambda = u_3 - \Psi(u_1, u_2)$ , систему (1.2) запишем в виде

$$\begin{aligned} AH_{\lambda\lambda} + C_1 &= 0, & AH_{\lambda\lambda} + B\Pi_{\lambda\lambda} + C_2 &= 0 & B\Pi_{\lambda\lambda} + C_3 &= 0 \\ \Pi_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \lambda^2}, & H_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$A = L_2(H) - (H_\psi - \Psi)L_1(\Psi), \quad B = L_3(\Pi) - (H_\psi - \Psi)L_1(\Psi) \quad (1.8)$$

При этом коэффициенты при  $H_{\lambda\lambda}$  и  $\Pi_{\lambda\lambda}$  обращаются в нуль, а коэффициенты  $C$  не зависят от  $H_{\lambda\lambda}$ ,  $\Pi_{\lambda\lambda}$ . Для того чтобы поверхность  $u_3 = \Psi$  была характеристической, необходимо выполнение равенств  $A = B = 0$ , которые вытекают в данном случае в силу (1.8) из (1.4). Свойство 1 доказано.

*Замечание.* В случае примыкания автомодельной тройной волны к плоской автомодельной двойной волне с  $\Psi = \text{const}$  уравнение характеристической поверхности для уравнения тройных волн просто совпадает с уравнением двойных волн.

Рассмотрим далее вопрос об определении формы поверхности примыкания в физическом пространстве для случая автомодельных течений.

Пусть функция  $H(u_1, u_2)$  для двойной автомодельной волны ( $\Pi = -1/2 (u_1^2 + u_2^2)$ ) известна и  $\Psi \equiv 0$ .

*Свойство 2.* Форму поверхности примыкания  $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ ,  $\xi_i = x_i / t$  областей двойных и тройных волн можно найти, не решая уравнение тройных волн (1.2) для  $j = 3$ , при помощи уравнения в частных производных первого порядка.

Действительно, в данном случае поверхность примыкания в пространстве  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  находится после исключения  $u_1, u_2$  из соотношений

$$\xi_i = u_i + H_i(u_1, u_2), \quad i = 1, 2; \quad \xi_3 = H_3(u_1, u_2) \quad (1.9)$$

Пусть  $H(u_1, u_2)$  на плоскости  $u_3 = 0$  соответствует двойной волне, а следовательно, известны  $H_1, H_2, H_{11}, H_{12}, H_{22}$  как функции  $u_1, u_2$ . Поверхность примыкания будет определена, если известна  $H_3(u_1, u_2) = \Phi(u_1, u_2)$ . Для определения функции  $\Phi$  из системы (1.2) для  $j = 3$ , полагая  $H_{31} = \Phi_1, H_{32} = \Phi_2$  ( $\partial\Phi / \partial u_i = \Phi_i$ ) и учитывая тот факт, что коэффициент при  $H_{33}$  обращается в нуль, получим уравнение в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{H_1^2}{f'}\right) \Phi_2^2 + \left(1 - \frac{H_2^2}{f'}\right) \Phi_1^2 + \left(\frac{\Phi^2}{f'} - 1\right) (H_{11}H_{22} + H_{11} + H_{22} - H_{12}^2 + 1) + \\ & + \frac{H_1H_2}{f'} \Phi_1\Phi_2 + \frac{2}{f'} (H_1H_{12} - H_2H_{11} - H_2) \Phi\Phi_2 + \frac{2}{f'} (H_2H_{12} - H_1H_{22} - H_1) \Phi\Phi_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

В конкретных задачах функция  $\Phi$  обычно известна на некоторой линии  $\varphi(u_1, u_2) = 0$ , либо из условий примыкания к двойным волнам, либо из условий на подвижных стенках [5]. Таким образом, решая (1.10) с заданными начальными условиями обычными методами (например, сводя задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик), можно, найдя  $\Phi(u_1, u_2)$ , сразу же определить форму поверхности примыкания.

Рассмотрим частный случай примыкания к двойной волне специального вида в политропном газе

$$c = \alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad (1.11)$$

( $c$  — скорость звука,  $\alpha_0 = \text{const}$ ,  $\alpha_1 = 0.5(\gamma - 1)$ ,  $\alpha_2 = 0.5(\gamma - 1)(1 + \gamma)^{1/2}(3 - \gamma)^{-1/2}$ ,  $\gamma$  — показатель адиабаты. Такие двойные волны были изучены в [5, 8], они существенны при решении ряда задач о выдвигании из газа плоских поршней. Уравнение (1.10) в этом случае можно упростить. Вводя вместо  $H$  функцию  $c(u_1, u_2, u_3)$  ( $c^2 = dp / d\rho$ ) и полагая  $\partial c / \partial u_3 = \Gamma(u_1, u_2)$  при  $u_3 = 0$ , после замены переменных

$$\xi = \alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \quad \eta = -\alpha_2 u_1 + \alpha_1 u_2$$

для  $\Gamma$  получим уравнение

$$4 \frac{\gamma - 2}{(\gamma - 1)^2} \Gamma^2 + 8 \frac{\xi}{\gamma - 1} \Gamma \Gamma_\xi - 4 \frac{\xi^2}{3 - \gamma} \Gamma_\xi^2 + 4 \frac{\xi^2(\gamma + 1)}{(3 - \gamma)^2} \Gamma_\eta^2 + \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} = 0 \quad (1.12)$$

Для частной задачи об истечении в вакуум вдоль двугранного угла, рассмотренной в [5], должно выполняться условие

$$\Gamma = \alpha_3 = \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{\gamma + 1}{(3 - \gamma)(2 - \gamma)} \right)^{1/2} = \text{const} \quad \text{при } u_2 = 0$$

Уравнение (1.12) при  $\Gamma \equiv \alpha_3 = \text{const}$  выполняется ( $\Gamma_\xi = \Gamma_\eta = 0$ ), а для поверхности примыкания (в данном случае плоскости) из (1.9) после введения вместо  $H$  функции  $c(u_1, u_2, u_3)$  получим уравнение

$$\alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 \xi_1 + \alpha_2 \alpha_3 \xi_2 - (\alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) \xi_3 = 0 \quad (1.13)$$

2. Представляет интерес получение точных частных решений (1.2) работы [5] или построение приближенных решений некоторых задач. Ниже строятся приближенные решения уравнения для  $H$  (автомодельный случай) и картины движения в физическом пространстве для случая взаимодействия пространственных волн разрежения в «тяжелом» газе.

Пусть однородный газ с большой скоростью звука  $c$  ( $c \gg 1$ , за единицы измерения можно взять м/сек) покоится внутри бесконечного трехгранного угла, гранями которого служат плоскости  $P_1, P_2, P_3$  и двугранные углы между ними равны соответственно  $\alpha_{12} \leq 1/2\pi, \alpha_{13} \leq 1/2\pi, \alpha_{23} \leq 1/2\pi$ . В момент времени  $t = 0$  плоскости  $P_i$  (поршни) начинают выдвигаться из газа с малыми (относительно скорости звука в невозмущенном газе) постоянными скоростями  $V_i$ . Возникающее автомодельное течение будет зависеть от переменных  $\xi_i = x_i / t, i = 1, 2, 3$ .

Заметим, что акустическое приближение для данной задачи, вообще говоря, недостаточно, так как градиенты искомых величин могут быть велики.

Будем рассматривать класс течений, в которых не возникает сильных разрывов. Такие течения будут потенциальными и будут состоять из областей постоянного движения, простых, двойных и тройных волн (тройная волна будет описываться уравнением (1.2) для  $j = 3$ ). В [7,9] были рассмотрены плоские задачи о выдвигании из политропного «тяжелого» газа с малыми скоростями  $V_1, V_2$  двух поршней  $P_1, P_2$  с углом  $\alpha$  между ними. Было показано, что полное потенциальное течение можно построить лишь для  $\alpha = \pi / k$  ( $k$  — целое).

Введем далее в качестве неизвестной функции вместо  $H$  функцию  $M = \int c p^{-1} dp$  (в политропном газе  $M = (2 / \gamma - 1)c$ ).

Уравнение для  $M$ , следующее из (1.2) для  $j = 3$ , приведем к виду

$$\sum_{i, k=1}^3 (\delta_{ik} - M_i M_k) \begin{vmatrix} M_{mp} + a M_m M_p + b \delta_{mp} & M_{np} + a M_n M_p + b \delta_{np} \\ M_{mq} + a M_m M_q + b \delta_{mq} & M_{nq} + a M_n M_q + b \delta_{nq} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

где

$$m, n \neq k, \quad m < n; \quad p, q \neq i, \quad p < q$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{f''_p}{f'^{3/2}_p}, \quad b = \frac{1}{f'^{1/2}_p}, \quad M_{np} = \frac{\partial^2 M}{\partial u_n \partial u_p}$$

Соотношения (1.3) примут вид

$$\xi_i = u_i + \sqrt{f'} M_i \quad (2.2)$$

В невозмущенный газ от плоскостей  $P_i$  пойдут слабые разрывы со скоростью  $c = \sqrt{f'}$ . Из формул (2.2), так как размеры области течения в пространстве  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  порядка  $O(c)$ , следует, что величины  $M_i$  ограничены и  $M_i = O(1)$ . Будет считаться далее, что во всей области течения выполняется неравенство  $a \ll 1$ . Для обычных уравнений состояния, в том числе и для политропного газа, это условие при  $c \gg 1$  выполняется.

С помощью сделанных предположений можно пренебречь в (2.1) слагаемыми, содержащими в качестве множителей  $a$  и  $b$  ( $b \ll 1$ ). Вновь полученное приближенное уравнение для  $M$  допускает решения вида

$$M = d_0 + d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 \quad (2.3)$$

где  $d_i$  — произвольные постоянные. Используем эти решения для построения течений в задаче о трех поршнях. При этом в областях простых и двойных волн будем пользоваться также линейными соотношениями между  $M$  и компонентами  $u_i$ . Для простых волн такие соотношения будут точными (получаются из точных уравнений гидродинамики), а для двойных волн получаются так же, как и для тройной волны. Легко видеть, что выводы работы [9] (случай тяжелого газа) имеют силу и для произвольного уравнения состояния, а решения, полученные в [9] в плоскости годографа для функции  $(2 / \gamma - 1)c$ , имеют тот же самый вид для новой неизвестной функции  $M$ . Поэтому для построения полного течения без сильных разрывов необходимо считать, что двугранные углы  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$  имеют вид

$$\alpha_{12} = \pi / k_1, \quad \alpha_{13} = \pi / k_2, \quad \alpha_{23} = \pi / k_3 \quad (2.4)$$

где  $k_i \geq 2$  — целые числа. Это следует из того, что вдали от вершины трехгранного угла, образуемого движущимися поршнями, к ребрам примыкают плоские течения.

Но для произвольного трехгранного угла, невыражающегося в луч, имеем

$$\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23} > \pi \quad (2.5)$$

Отсюда и из (2.4) следует, что необходимо рассмотреть лишь следующие возможные комбинации углов  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$

$$\left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{k} \right) \quad (k \geq 2 \text{ — целое}) \quad \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right), \quad \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5} \right)$$

Отставляя в стороне три исключительных случая, рассмотрим основную возможность ( $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi/k$ ).

Уравнения граней угла в начальный момент времени зададим в виде

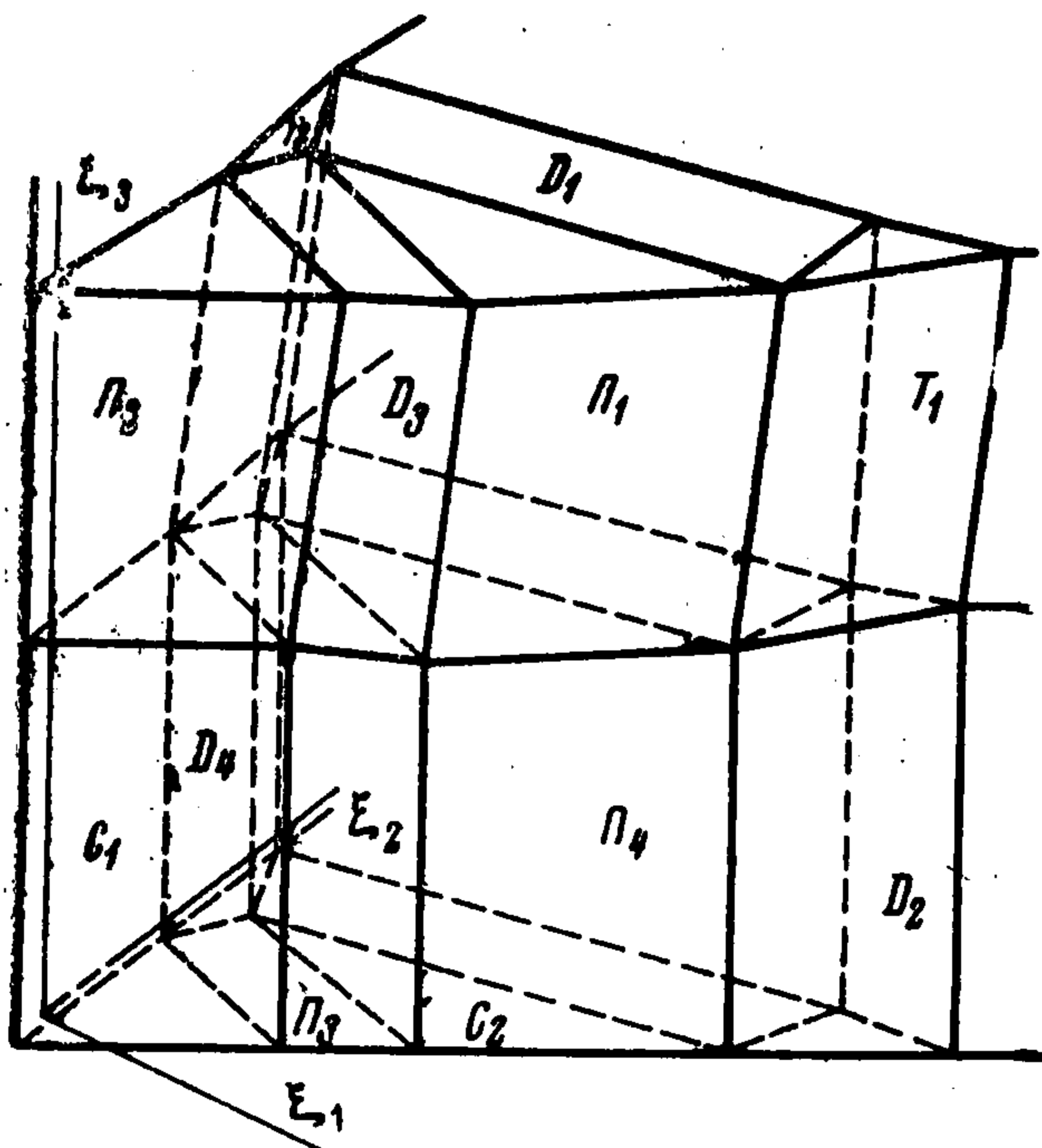
$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_1 = x_2 \operatorname{ctg}(\pi/k) \quad (2.6)$$

В пространстве годографа области течения будет соответствовать призма, ограниченная плоскостями

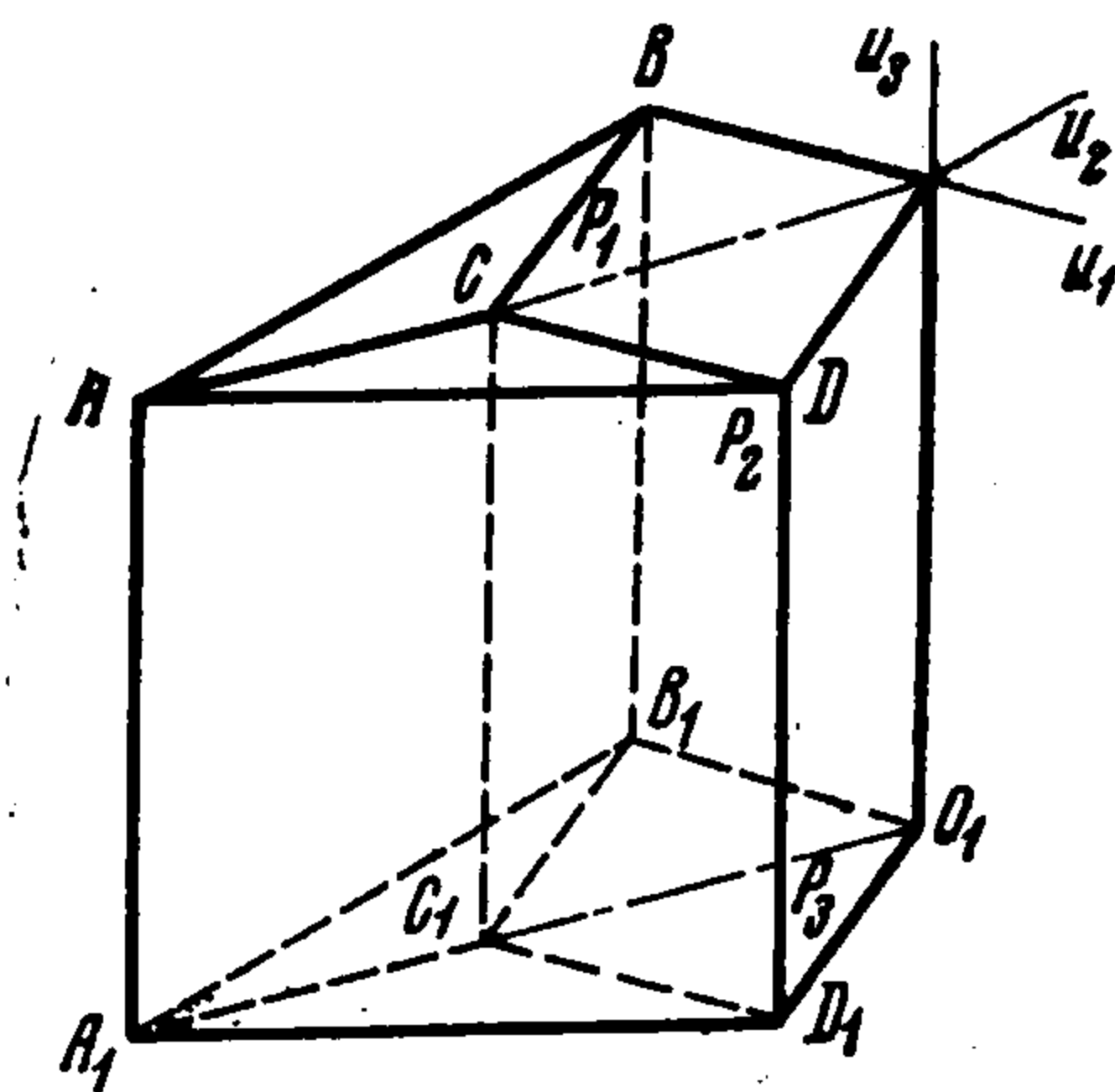
$$\begin{aligned} u_3 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_1 = -V, \quad u_1 = -u_2 \operatorname{ctg}(\pi/k) \\ u_3 = -V, \quad -u_1 \cos(\pi/k) + u_2 \sin(\pi/k) + V = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Верхнее основание призмы (плоскость  $u_3 = 0$ ) разбивается прямыми на части, соответствующие различным плоским двойным и простым волнам так, как это сделано в

[9]. Области тройных волн получаются разбиением призмы на части плоскостями, параллельными оси  $u_3$  и проходящими через упомянутые прямые на плоскости  $u_3 = 0$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

В физическом пространстве течение определяется по формулам (2.2). В качестве примера рассмотрим движение политропного газа для трехгранного угла ( $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi$ ) ( $k=3$ ). На фиг. 1 приведена область течения в пространстве годографа (не в масштабе), когда поршни  $P_i$  выдвигаются с одинаковой скоростью  $-V$ . Плоскость  $AOO_1A_1$  в данном случае будет плоскостью симметрии, ее можно считать неподвижной стенкой.

На фиг. 2 изображена часть области течения в физическом пространстве (не в масштабе), заключенной между поршнями  $P_1, P_3$  и неподвижной стенкой (биссекториальной плоскостью). Области, обозначенные буквами  $T_i$  ( $i=1,2$ ), соответствуют областям тройных волн;  $D_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) — областям двойных волн;  $P_k$  ( $k=1,2,3,4$ ) — областям простых волн;  $C_l$  ( $l=1,2$ ) — областям постоянного течения.

Буквы поставлены на одной из граней соответствующей области. В таблице приведено решение в пространстве годографа для функции  $M = 2c/(\gamma - 1)$ ; здесь  $M_0$  — значение  $M$  в покоящемся газе. Формулы (2.2) в данном случае имеют вид

$$\xi_i = u_i + \frac{1}{2}(\gamma - 1)MM_i$$

В пространстве  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  тройная волна  $T_1$  ограничена плоскостями

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\xi_1 + \sqrt{3}\xi_2 + M_0) - (2\gamma - 1)\xi_3 = 0$$

$$\xi_1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\xi_2 + V + (\gamma - 1)(\frac{2}{3}\xi_1 - \frac{1}{6}\sqrt{3}\xi_2 - \xi_3 - M_0 + \frac{5}{2}V) = 0$$

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\xi_1 + \xi_3 + M_0) - \gamma\xi_2 = 0$$

$$\frac{\gamma - 1}{2}(\xi_1 + \sqrt{3}\xi_2 + M_0) - (2\gamma - 1)\xi_3 + \frac{\gamma - 3}{2}V = 0$$

$$\xi_3 - \sqrt{3}\xi_1 = 0 \quad (\text{неподвижная стенка})$$

Пространство $\xi_1, \xi_2, \xi_3$	Пространство $u_1, u_2, u_3$	Решение в пространстве годографа
Призмы		
$T_1$	$BCDOO_1D_1C_1B_1$	$M = u_1 + \sqrt{3}u_2 + u_3 + M_0$
$T_2$	$ABCC_1B_1A_1$	$M = \frac{2}{3}\sqrt{3}u_2 + u_3 + M_0 - V$
Плоскости		
$D_1$	$BCC_1B_1$	$M = u_3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}u_2 + M_0 - V, \quad u_2 = -\sqrt{3}(u_1 + V)$
$D_2$	$B_1C_1D_1O_1$	$M = u_1 + \sqrt{3}u_2 + M_0 - V, \quad u_3 = -V$
$D_3$	$ACC_1A_1$	$M = \frac{2}{3}\sqrt{3}u_2 + u_3 + M_0 - V, \quad u_2 = \sqrt{3}u_1$
$D_4$	$A_1B_1C_1$	$M = \frac{2}{3}\sqrt{3}u_2 + M_0 - 2V, \quad u_3 = -V$
Прямые		
$\Pi_1$	$CC_1$	$u_1 = -\frac{1}{2}V, \quad u_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}V, \quad u_3 = M - M_0 + 2V$
$\Pi_2$	$AA_1$	$u_1 = -V, \quad u_2 = -\sqrt{3}V, \quad u_3 = M - M_0 + 3V$
$\Pi_3$	$A_1C_1$	$u_1 = \frac{1}{2}(M - M_0 + 2V), \quad u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}(M - M_0 + 2V)$ $u_3 = -V$
$\Pi_4$	$B_1C_1$	$u_1 = -\frac{1}{2}(M - M_0 + 4V), \quad u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}(M - M_0 + 2V)$ $u_3 = -V$
Точки		
$C_1$	$A_1$	$u_1 = -V, \quad u_2 = -\sqrt{3}V, \quad u_3 = -V, \quad M = M_0 - 4V$
$C_2$	$C_1$	$u_1 = -\frac{1}{2}V, \quad u_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}V, \quad u_3 = -V, \quad M = M_0 - 3V$

тройная волна  $T_2$  — плоскостями

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\sqrt{3}(\gamma - 1)\xi_2 - \frac{1}{3}(\gamma + 1)\xi_3 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(M_0 - V) &= 0 \\ \frac{1}{2}(7\gamma - 1)\xi_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}(\gamma + 1)\xi_2 - (\gamma - 1)(\xi_3 + M_0) + \frac{3}{2}(3\gamma - 1)V &= 0 \\ \frac{1}{2}(7\gamma - 1)\xi_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}(\gamma + 1)\xi_2 + (\gamma - 1)(\xi_3 + M_0 - V) &= 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3}(\gamma - 1)\xi_2 - \frac{1}{3}(\gamma + 1)\xi_3 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(M_0 - \frac{10}{3}V) &= 0 \\ \xi_1 &= -V \quad (\text{поршень}) \end{aligned}$$

В нижней половине фиг. 2 все боковые грани областей ортогональны поршню  $\xi_3 = -V$ .

Поступила 22 III 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

- Сидоров А. Ф. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
- Cumbebatc h E. The generalized self-similar flows. J. Inst. Math. and its Applic., 1966, vol. 2, No 1.
- Сидоров А. Ф. К вопросу об ударных волнах в течениях политропного газа, имеющих прямолинейные характеристики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
- Сидоров А. Ф. Некоторые точные решения нестационарной двумерной газовой динамики. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
- Сидоров А. Ф. Два точных решения уравнений гидродинамики типа тройной волны. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
- Рыжов О. С. О течениях с вырожденным годографом. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
- Ермолин Е. В., Сидоров А. Ф. Некоторые конфигурации изэнтропических распадов двумерных разрывов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
- Сучков В. А. Истечение в вакуум на косоj стенке. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
- Ермолин Е. В., Рубина Л. И., Сидоров А. Ф. К задаче о двух поршнях. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.