Полученное противоречие доказывает неправильность предположения о существовании точки T на указанном выше отрезке ударной волны. Образ области G в окрестности этого отрезка лежит вне петли ударной поляры. Применяя правило обхода границы G, получим, что ударная волна на этом отрезке обращена выпуклостью в сторону набегающего потока.

Рассмотрим теперь обтекание заостренного выпуклого профиля с присоединенной ударной волной, когда течение за ней в некоторой окрестности острия будет дозвуковым. Такой режим может осуществляться, как следует из анализа ударной поляры, при некотором соотношении между числом M_∞ и углом наклона профиля (в острие) к вектору скорости набегающего потока.

Теорема 3. Пусть при сверхзвуковом обтекании заостренного выпуклого профиля с присоединенной ударной волной имеют место следующие свойства.

1. Ударная волна гладкая на всем протяжении от точки присоединения.
2. Граница области G дозвуковых скоростей, расположенной в некоторой окрестности острия, не содержит вторичных скачков уплотнения.

Если $M_\infty < \mu(k, M_*)$, то отрезок ударной волны, на котором $M < M_*$ (если граница G содержит такой отрезок), в каждой точке обращен выпуклостью в сторону набегающего потока.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Поступила 10 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Гостехиздат, 1950.
2. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Г. М. Шефтер

(Москва)

Выводятся приближенные уравнения коротких волн, распространяющихся в неоднородной движущейся среде, обладающей вязкостью и теплопроводностью. В них учтены одновременно главные нелинейные и диссипативные члены, а также сохранена возможность описания двумерной структуры течения в зоне волны. Для задачи о распространении звуковых импульсов рассмотрены два предельных случая. Когда влияние диссипативных факторов пренебрежимо мало, т. е. среда может считаться идеальной, построено точное частное решение, из которого следуют законы затухания слабых ударных волн в неоднородном движущемся газе, лишенном вязкости и теплопроводности. Эти законы были изучены ранее [1-3], но впервые они получены в результате прямого решения уравнений первого приближения для течения газа в волне. Асимптотическая форма звуковых импульсов и законы их затухания при очень больших значениях времени определяются в основном диссипативными факторами, а несущественными на этой стадии становятся нелинейные члены.

1. Рассмотрим задачу о распространении звуковых волн в неоднородной движущейся среде, обладающей вязкостью и теплопроводностью. Пусть t обозначает время; x, y, z — декартовы координаты; $\mathbf{v}$ — вектор массовой скорости с проекциями v_x, v_y, v_z; g_x, g_y, g_z — компоненты вектора ускорения силы тяжести; ρ — плотность; p — давление; a — адиабатическую скорость звука; λ_1, λ_2 — коэффициенты вязкости и второй вязкости; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; γ — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_v; α — коэффициент теплового

расширения. Тогда замкнутую систему уравнений, описывающих течение произвольной двухпараметрической среды, можно представить в виде [4-6]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_j}{\partial x_j}=0 \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho g_i+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\lambda_1\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\lambda_2-\frac{2}{3}\lambda_1\right)\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right] \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}-a^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_k\left(\frac{\partial p}{\partial x_k}-a^2\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\right)=\frac{a^2\alpha}{c_p}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varkappa}{\rho\alpha}\left(\frac{\gamma}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x_k}-\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\right)\right]+$$

$$+\frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2+\left(\lambda_2-\frac{2}{3}\lambda_1\right)\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)^2 \tag{1.3}$$

Здесь индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3 и, как обычно, производится суммирование по повторяющимся индексам. Температура T и удельная энтропия s могут быть затем найдены из уравнений [5,6]

$$\rho a^2\alpha\, Tds=c_p(dp-a^2d\rho),\qquad \rho a^2\alpha dT=\gamma dp-a^2d\rho \tag{1.4}$$

Пусть в невозмущенной среде с параметрами v_{0i}, p_0, ρ_0,... (v_{0i}, p_0, ρ_0,... — известные функции координат) распространяется волна, в которой избыточные значения всех величин v_i', p', ρ',... малы по сравнению с их невозмущенными значениями. Поэтому, как и в работе [7], можно считать, что невозмущенное течение среды подчиняется уравнениям движения идеального газа, следующим из (1.1) — (1.3) при значениях $\lambda_1 = \lambda_2 = \varkappa = 0$

$$\frac{\partial\rho_0 v_{0j}}{\partial x_j}=0,\qquad \rho_0 v_{0k}\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k}=-\frac{\partial p_0}{\partial x_i}+\rho_0 g_i,\qquad v_{0k}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x_k}-a_0^2\frac{\partial\rho_0}{\partial x_k}\right)=0 \tag{1.5}$$

В акустическом приближении скорость звуковой волны относительно частиц газа равна невозмущенной скорости звука, поэтому рассматриваемую волну можно отождествить с C_+-характеристикой $\varphi(t, x_k)=0$ уравнений движения идеального газа, которая в том же приближении определяется уравнением [8]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v_{0j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+a_0\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right]^{1/2}=0 \tag{1.6}$$

Характеристические кривые уравнения (1.6), которые в принятом приближении будут бихарактеристиками уравнений Эйлера, могут рассматриваться как траектории элементов поверхности фронта волны, или лучи [8]. Они определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt}=v_{0i}+a_0n_i,\qquad \frac{dn_i}{dt}=(n_in_j-\delta_{ij})\left(\frac{\partial a_0}{\partial x_j}+n_k\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_j}\right) \tag{1.7}$$

Здесь n_i — составляющие единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ к характеристической поверхности, δ_{ij} — символы Кронекера. В силу того, что величины v_{0i}, a_0 и их производные известны, решения уравнений (1.6) и (1.7) могут быть получены заранее и представлены в виде

$$\varphi(t, x_k)=0,\qquad x_i^\circ=x_i^\circ(t, x_{0k}),\qquad n_i^\circ=n_i^\circ(t, x_{0k}) \tag{1.8}$$

где x_{0k} — координаты некоторой начальной точки, определяющей отдельный луч. Индексом $^\circ$ здесь и в дальнейшем отмечаются величины, взятые в той точке луча (x_k°), где он пересекается с характеристической поверхностью, и зависящие только от времени. Координаты (x_k°) даются формулами (1.8).

Введем движущуюся прямоугольную декартову систему координат x_i' (x_1, x_2, x_3), связанную с волной. Положение нового начала координат определяется формулами для x_k° из (1.8). Основные изменения в волне происходят в направлении нормали к поверхности ее фронта, поэтому ось x_1 направим вдоль вектора нормали $\mathbf{n}$ к характеристике. Компоненты n_i° заданы последними формулами (1.8). Две другие оси новой системы x_2, x_3 располагаются в касательной к характеристике плоскости. Для дальнейшего несущественно, как выбрать направления этих осей, но можно показать, что переход к новым координатам упрощается, если компоненты двух взаимно-перпендикулярных единичных векторов $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ в касательной плоскости удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{de_{2i}^\circ}{dt} = n_i^\circ\left(\frac{\partial a_0^\circ}{\partial x_j} + n_k^\circ\frac{\partial v_{0k}^\circ}{\partial x_j}\right)e_{2j}^\circ, \qquad \frac{de_{3i}^\circ}{dt} = n_i^\circ\left(\frac{\partial a_0^\circ}{\partial x_j} + n_k^\circ\frac{\partial v_{0k}^\circ}{\partial x_j}\right)e_{3j}^\circ$$

решения которых

$$e_{2i}^\circ = e_{2i}^\circ(t,\ x_{0k}), \qquad e_{3i}^\circ = e_{3i}^\circ(t,\ x_{0k}) \tag{1.9}$$

также могут считаться заранее известными.

Заметим, что уравнения для dn_i°/dt, de_{2i}°/dt, de_{3i}°/dt зависимы и для замыкания каждой системы надо добавлять условие единичности соответствующего координатного вектора.

Зная выражения (1.8), (1.9), можно установить формулы перехода от неподвижной к подвижной системе координат и обратно

$$\begin{aligned} t &= t', \quad x_i = x_i^\circ(t) + e_{ji}^\circ(t)\,x_j' \\ t' &= t, \quad x_i' = e_{ij}^\circ(t)\,[x_j - x_j^\circ(t)] \end{aligned} \qquad (e_{1i}^\circ \equiv n_i^\circ) \tag{1.10}$$

Допустим, что характеристическая поверхность $\varphi(t,\ x_k) = 0$ при своем движении в физическом пространстве проходит через каждую его точку лишь один раз. Тогда в любой точке в момент прохождения через нее характеристики формулами (1.8), (1.9) определены три вектора $\mathbf{e}_1^\circ$, $\mathbf{e}_2^\circ$, $\mathbf{e}_3^\circ$. Закрепим эту тройку векторов за указанной точкой, т. е. будем считать, что в каждой точке пространства (x_k) заданы три взаимно-перпендикулярных единичных вектора $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 \equiv \boldsymbol{\tau}_2$, $\mathbf{e}_3 \equiv \boldsymbol{\tau}_3$ с компонентами $e_{ij}(x_k)$, зависящими только от координат этой точки. Проекции вектора $\mathbf{v}'$ в той же точке на выделенные направления обозначим соответственно через v_n', $v_{\tau2}'$, $v_{\tau3}'$. Компоненты вектора $\mathbf{v}'$ в подвижной системе координат связаны с этими величинами формулами

$$v_i' = n_i v_n' + \tau_{2i}\, v_{\tau2}' + \tau_{3i}\, v_{\tau3}' \tag{1.11}$$

где $n_i, \tau_{2i}, \tau_{3i}$ — компоненты векторов $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\tau}_3$ в новой системе координат.

Предположим, что изучаемое течение газа представляет собой не только слабую, но и короткую волну, т. е. размеры области, в которой сосредоточены возмущения, и, прежде всего, характерная длина волны Λ (вдоль направления $\mathbf{n}$), малы по сравнению с радиусом кривизны ее фронта и характерным размером неоднородности среды. Обозначим меньшую из этих двух величин через L. Пусть Δ представляет характерный размер волны в плоскости, касательной к поверхности ее фронта. В этой плоскости избыточные значения всех величин обычно меняются медленнее и нет преимущественных направлений. Кроме того, через ε и ω обозначим характерные относительные значения соответственно продольной и поперечных составляющих вектора возмущенной скорости v_n' и $v_{\tau2}'$, $v_{\tau3}'$. Примем также, что возмущения плотности, давления и скорости звука имеют такой же относительный порядок малости ε, как и величина v_n'.

Перейдем в новой системе координат к безразмерным переменным

$$\begin{gathered} x_1 = L\Lambda x_1^\times, \quad x_2 = L\Delta x_2^\times, \quad x_3 = L\Delta x_3^\times, \quad t' = (L / a_{00})\,\theta t^\times \\ v_{0i} = a_{00} v_{0i}^\times, \quad a_0 = a_{00} a_0^\times, \quad p_0 = \rho_{00} a_{00}^2 p_0^\times, \quad \rho_{00} = \rho_{00}\rho_0^\times \\ v_n' = a_{00}\varepsilon v_n'^\times, \quad v_{\tau2}' = a_{00}\omega v_{\tau2}'^\times, \quad v_{\tau3}' = a_{00}\omega v_{\tau3}'^\times \\ a' = a_{00}\,\varepsilon a'^\times, \quad p' = \rho_{00} a_{00}^2 \varepsilon p'^\times, \quad \rho' = \rho_{00}\varepsilon\rho'^\times \end{gathered} \tag{1.12}$$

Здесь a_{00} и ρ_{00} — постоянные (вдоль луча) значения скорости звука и плотности в начальной точке луча (x_{0k}), все безразмерные величины, отмеченные вверху косым крестом, имеют порядок единицы, а Λ, ε, ω малы по сравнению с ней.

Прежде чем перейти к преобразованию исходных уравнений, сделаем еще несколько замечаний.

В коротких волнах составляющая скорости и производные от возмущений всех параметров потока в направлении нормали к поверхности фронта волны превышают по величине составляющие скорости и соответствующие производные в перпендикулярных к нормали направлениях. Таким образом, можно принять [9,5]

$$\omega \ll \varepsilon, \qquad \Lambda \ll \Delta \tag{1.13}$$

Предполагая сразу же, что $\Lambda \ll \theta$, исключим тем самым случай обычной линеаризации уравнений Навье—Стокса.

Введем еще безразмерные комбинации (числа Рейнольдса, Пекле и Прандтля)

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{\rho_{00} a_{00} L}{{}^4/_3 \lambda_1 + \lambda_2}, \qquad N_{\mathrm{Pe}} = \frac{\rho_{00} a_{00} c_p L}{\varkappa}, \qquad N_{\mathrm{Pr}} = \frac{N_{\mathrm{Pe}}}{N_{\mathrm{Re}}} \tag{1.14}$$

Коэффициенты вязкости и теплопроводности обычно одинаковы по порядку величины и достаточно малы, чтобы выполнялись условия [4,5]

$$1/N_{\mathrm{Re}} \ll \Lambda, \qquad N_{\mathrm{Pr}} \sim 1 \tag{1.15}$$

Величины λ_1, λ_2, $\varkappa$, а также c_p, α, γ являются известными функциями состояния среды и вне волны могут считаться заданными. Их возмущениями в теории первого приближения можно пренебречь, так как учет этих возмущений в силу условий (1.15) лишь немного осложняет выкладки, но не изменяет конечных приближенных уравнений [5].

Согласно формулам (1.12) все безразмерные значения параметров невозмущенного движения среды и их производных сравнимы по порядку величины с единицей. Возмущения же по сравнению с соответствующими невозмущенными значениями малы и в принятых обозначениях имеют максимальный относительный порядок ε. Одновременно малы и размеры возмущенной области, так что градиенты в зоне возмущений (максимальный порядок — ε / Λ) могут быть сравнимы с градиентами начальных распределений. Но тогда кривизны профилей возмущений (максимальный порядок — ε / Λ^2) должны быть еще более значительными по сравнению с кривизнами распределений невозмущенных значений параметров. Данные соображения приводят еще к одному неравенству

$$1 \ll \varepsilon / \Lambda^2 \tag{1.16}$$

И, наконец, отметим, что хотя в волне, т. е. на небольших (сравнительно с L) расстояниях от нового начала координат, матрица, составленная из компонент n_i, τ_{2i}, τ_{3i}, близка к диагональной, в окончательные приближенные уравнения войдут производные и от близких к нулю компонент, которые, вообще говоря, могут иметь порядок единицы. Кроме того, необходимо различать величины, отмеченные вверху градусом, и без него, так как первые определяют лишь новую систему координат, в которой описывается изменение последних. И хотя в зоне возмущенного течения различие между ними невелико, в окончательные уравнения войдет член, обязанный именно этому различию. В работе [7], посвященной слабым ударным волнам, вызванным движением самолета в неоднородной диссипирующей атмосфере, это обстоятельство, по-видимому, не учтено, что сказалось на выведенном приближенном уравнении. Аналогичное замечание содержится также и в статье [10].

Подставим переменные (1.12) с учетом (1.11) в уравнения для возмущений, получающиеся из уравнений (1.1) — (1.3) после исключения из последних членов, соответствующих невозмущенному течению (1.5), и перехода к подвижной системе координат по формулам (1.10). Воспользуемся соотношениями (1.11), (1.13) — (1.16) и сохраним в полученных соотношениях только старшие члены. Пропуская довольно громоздкие промежуточные выкладки, приведем сразу приближенные уравнения коротких волн (косой крест у безразмерных переменных в дальнейшем опускаем)

$$\rho' = (\rho_0^\circ / a_0^\circ)\, v_n', \qquad p' = \rho_0^\circ a_0^\circ v_n'$$

$$\frac{\omega}{\Lambda}\frac{\partial v_{\tau 2}'}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon}{\Delta}\frac{\partial v_n'}{\partial x_2}, \quad \frac{\omega}{\Lambda}\frac{\partial v_{\tau 3}'}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon}{\Delta}\frac{\partial v_n'}{\partial x_3} \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial v_n'}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\Lambda} m_0^\circ v_n' \frac{\partial v_n'}{\partial x_1} + x_1 \frac{d \ln u_{0n}^\circ}{dt}\frac{\partial v_n'}{\partial x_1} + \frac{\omega}{\varepsilon\Delta}\frac{a_0^\circ}{2}\left(\frac{\partial v_{\tau 2}'}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{\tau 3}'}{\partial x_3}\right) +$$

$$+ \frac{d \ln M^\circ}{dt} v_n' = \frac{1}{\Lambda^2 N_{\mathrm{Re}}}\frac{1}{2\rho_0^\circ}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{N_{\mathrm{Pr}}}\right)\frac{\partial^2 v_n'}{\partial x_1^2}$$

Здесь использованы обозначения

$$M^\circ = \exp\left\{\frac{1}{2}\int\left[\frac{d\ln(\rho_0^\circ a_0^\circ)}{dt} + a_0^\circ \frac{\partial n_j^\circ}{\partial x_j} + (2m_0^\circ - 1)\frac{\partial v_{0j}^\circ}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0n}^\circ}{\partial x_1}\right]dt\right\} = u_{0n}\left(\frac{\rho_0^\circ f^\circ}{a_0^\circ}\right)^{1/2}$$

$$v_{0n} = v_{0j} n_j, \qquad u_{0n} = a_0 + v_{0n}, \quad m = {}^1/_2\, \rho^{-3} a^{-2}\, [\partial^2 p / \partial (1/\rho)^2]_s$$

Выражение для M°, где интеграл взят вдоль луча, проинтегрировано в работе [11]. Величина u_{0n} представляет собой проекцию вектора так называемой лучевой скорости $\mathbf{u}_0 = a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0$, с которой поверхность фронта волны перемещается в пространстве, на нормаль к этой поверхности, f — площадь элемента поверхности фронта волны, заключенного внутри элементарной лучевой трубки (трубки с малой площадью поперечного сечения, образующими которой служат лучи). Напомним, что все величины, отмеченные градусом, зависят только от времени. В дальнейшем этот индекс также будем опускать.

Первые две формулы (1.17) получены из уравнения неразрывности и проекции уравнения Навье—Стокса на ось x_1. Они означают, что в принятом приближении сжатие газа происходит адиабатически и выполняется соотношение Римана, характеризующее плоский бегущий звуковой импульс [4]. Следующие два уравнения (1.17), полученные из проекций уравнения Навье—Стокса на оси x_2, x_3 при естественном для течений с неоднономерной структурой условии $\omega/\Lambda = \varepsilon / \Delta$, указывают на отсутствие вихрей в зоне возмущенного течения. Таким образом, при упрощении уравнений неразрывности (1.1) и Навье—Стокса (1.2) получились выражения, характеризующие также движение идеальных сред. Влияние диссипативных факторов учтено в последнем уравнении (1.17), являющемся следствием уравнения переноса тела (1.3) с учетом уравнений (1.1), (1.2), а также первых двух соотношений (1.17).

В самом общем случае $\theta \sim 1$, $\varepsilon \sim \Lambda$, $\omega \sim \Lambda^{3/2}$, $\Delta \sim \Lambda^{1/2}$, $1 / N_{\mathrm{Re}} \sim \Lambda^2$, уравнения коротких волн принимают вид

$$\frac{\partial v_{\tau 2}'}{\partial x_1} = \frac{\partial v_n'}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial v_{\tau 3}'}{\partial x_1} = \frac{\partial v_n'}{\partial x_3} \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial v_n'}{\partial t} + m_0 v_n' \frac{\partial v_n'}{\partial x_1} + x_1 \frac{d\ln u_{0n}}{dt}\frac{\partial v_n'}{\partial x_1} + \frac{a_0}{2}\left(\frac{\partial v_{\tau 2}'}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{\tau 3}'}{\partial x_3}\right) + \frac{\ln M}{\partial t} v_n' =$$

$$= \frac{1}{2\rho_0}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{N_{\mathrm{Pr}}}\right)\frac{\partial^2 v_n'}{\partial x_1^2}$$

Уравнения, наиболее близкие к приведенным, выведены в работе [7]. Там только сразу движение в волне считалось квазиодномерным, и, кроме того, имеются некоторые отличия, характер которых был указан выше.

2. Переходим к рассмотрению коротких волн с квазиодномерной структурой, чему соответствует условие $\omega \ll \varepsilon\Delta$. Из последнего уравнения (1.17) при этом получаем

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\Lambda} m_0 v' \frac{\partial v'}{\partial x_1} + x_1 \frac{d\ln u_{0n}}{dt}\frac{\partial v'}{\partial x_1} + \frac{d\ln M}{dt} v' = \frac{1}{\Lambda^2 N_{\mathrm{Re}}}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{N_{\mathrm{Pr}}}\right)\frac{\partial^2 v'}{\partial x_1^2} \tag{2.1}$$

Здесь одновременно сохранены главные нелинейные и диссипативные члены, а v_n' заменено на v'.

Предположим сначала, что диссипативными факторами в последнем уравнении можно пренебречь, т. е. $1 / N_{\mathrm{Re}} \ll \Lambda^2$. В этом случае из (2.1) следует уравнение, описывающее течение газа в слабой волне, распространяющейся в неоднородной движущейся идеальной среде

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + m_0 v' \frac{\partial v'}{\partial x_1} + x_1 \frac{d \ln u_{0n}}{dt} \frac{\partial v'}{\partial x_1} + \frac{d \ln M}{dt} v' = 0 \quad (\theta \sim 1,\ \varepsilon \sim \Lambda) \tag{2.2}$$

Если в левой части этого равенства опустить второй и третий члены, содержащие производную $\partial v' / \partial x_1$, то получится уравнение геометрической акустики для фронтов, которое легко интегрируется, что приводит к хорошо известному закону изменения амплитуды звуковой волны [4,11,12]

$$v' = \frac{f(x_1)}{u_{0n}} \left(\frac{a_0}{\rho_0 f}\right)^{1/2} \tag{2.3}$$

где функция $f(x_1)$ дает неизменяющийся в этом приближении профиль волны и может быть выбрана произвольно. Однако даже в акустическом приближении, если хотим следить не только за фронтом, но и за профилем волны, следует сохранить линейный член $x_1 (d \ln u_{0n}/dt)(\partial v' / \partial x_1)$, появляющийся из-за изменения вдоль волны ее скорости распространения в неоднородной движущейся атмосфере и соответствующего «линейного» искажения ее профиля.

Легко видеть, что асимптотических законов затухания возмущений при $t \to \infty$ акустическое решение не дает даже для идеальной среды. Для этого надо просто подставить формулу (2.3) в уравнение (2.2) и устремить время t к бесконечности.

Асимптотические законы затухания звуковых импульсов в неоднородной движущейся среде могут быть получены при помощи уравнения (2.2). При $t \to \infty$ профили слабых ударных волн стремятся стать линейными [4], и течение газа за такими волнами представляется решением уравнения (2.2)

$$v' = \frac{x_1}{M u_{0n}} \left(c_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{m_0}{M u_{0n}} dt\right)^{-1} \tag{2.4}$$

Здесь c_1 — произвольная постоянная, интеграл берется вдоль луча, t_0 соответствует начальной точке луча.

Найдем теперь закон изменения вдоль луча интенсивности ударной волны v_*', которая, как и длина волны λ_*, зависит только от времени и связана с ней соотношением, следующим из (2.4).

Скорость N распространения слабой ударной волны с точностью до членов первого порядка малости в неподвижной системе координат определяется выражением [3,4]

$$N = u_{0n} + \frac{\lambda_*}{u_{0n}} \frac{du_{0n}}{dt} + \frac{1}{2} m_0 v_*'$$

Учитывая формулы перехода к подвижной системе координат (1.10), а также (1.8), (1.9), отсюда имеем

$$\frac{d\lambda_*}{dt} = \frac{\lambda_*}{u_{0n}} \frac{du_{0n}}{dt} + \frac{1}{2} m_0 v_*' \tag{2.5}$$

Дифференцируя соотношение (2.4) между величинами v_*' и λ_* вдоль траектории фронта ударной волны и используя условие (2.5), приходим к уравнению для величины v_*'

$$\frac{1}{v_*'} \frac{dv_*'}{dt} + \frac{1}{2} \frac{m_0}{M u_{0n}} \left(c_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{m_0}{M u_{0n}} dt\right)^{-1} + \frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = 0 \tag{2.6}$$

В результате интегрирования последнего уравнения получаем

$$v_*' = \frac{c_2}{u_{0n}} \left(\frac{a_0}{\rho_0 f}\right)^{1/2} \left[c_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{m_0}{u_{0n}^2} \left(\frac{a_0}{\rho_0 f}\right)^{1/2} dt\right]^{-1/2}, \qquad \lambda_* = c_2 u_{0n} \left[c_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{m_0}{u_{0n}^2} \left(\frac{a_0}{\rho_0 f}\right)^{1/2} dt\right]^{1/2} \tag{2.7}$$

где c_2 — произвольная постоянная.

Если при $t = t_0$ известны значения амплитуды v_0' и длины λ_0 ударной волны, то, подставляя эти значения в выражения (2.7) и соответственно полагая $t = t_0$, определяем постоянные c_1 и c_2.

Формулы (2.7) выражают известные [1-3,11] законы затухания слабых ударных волн в неоднородной движущейся среде, но в отличие от предыдущих работ сейчас они получены в результате точного решения выведенных выше приближенных уравнений. Как и прежде, они остаются справедливыми, пока выполняется неравенство $\lambda_* \ll L$.

Во втором предельном случае [4,6], при очень больших значениях времени ($\theta \sim 1$, $\varepsilon \ll \Lambda$, $1 / N_{\mathrm{Re}} \sim \Lambda^2$) основную роль играют диссипативные факторы. Нелинейным членом в уравнении (2.1) можно пренебречь, и оно соответственно примет вид

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + x_1 \frac{d \ln u_{0n}}{dt} \frac{\partial v'}{\partial x_1} + \frac{d \ln M}{dt} v' = \frac{1}{2\rho_0}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{N_{\mathrm{Pr}}}\right) \frac{\partial^2 v'}{\partial x_1^2}$$

Замена переменных

$$w = Mv' = \sqrt{\rho_0 f / a_0} u_{0n} v', \qquad \tau = {}^1/_2 \int_{t_0}^{t} \rho_0^{-1} [1 + (\gamma - 1) / N_{\mathrm{Pr}}]\, dt$$

позволяет переписать его в более простой форме

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + x_1 \frac{d \ln u_{0n}}{d\tau} \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \tag{2.8}$$

Таким образом, на последней стадии затухание звуковых импульсов описывается уравнением параболического типа (2.8) и поэтому будет более интенсивным, чем в идеальной среде. Интересно отметить, что в уравнении (2.8) фигурирует величина $w = \sqrt{\rho_0 f / a_0} u_{0n} v'$, которая, как следует из формулы (2.3), в приближении геометрической акустики остается постоянной.

Автор благодарит О. С. Рыжова за ценное обсуждение.

Поступила 26 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
2. Полянский О. Ю. О затухании ударных волн в движущейся среде с переменными плотностью и температурой. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1954.
5. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
6. Рыжов О. С. О влиянии вязкости и теплопроводности на распространение звуковых импульсов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
7. Guiraud J.-P. Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation. J. mécanique, 1965, vol. 4, No 2.
8. Courant R. Partial differential equations. NewYork — London, 1962. (Рус. пер.: Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.)
9. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
10. Жилин Ю. Л. Теория затухания стационарных и нестационарных ударных волн в неоднородных средах. Тр. ЦАГИ, 1967, вып. 1094.
11. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. Об энергии звуковых волн, распространяющихся в движущихся средах. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
12. Keller J. B. Geometrical acoustics. I. The theory of, weak shock waves. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 8.