О ВЫПУКЛОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ДОЗВУКОВОМ ОТРЕЗКЕ В ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ

Э. Г. Шифрин

(Москва)

Рассматриваются топологические свойства потока в дозвуковой области, расположенной позади фронта ударной волны. Доказано, что при истечении сверхзвуковой струи в пространство с повышенным давлением в режиме нерегулярного отражения косого скачка уплотнения от оси симметрии фронт маховской ударной волны должен быть вогнут в сторону набегающего потока. Наоборот, если ударная волна в сверхзвуковом течении образуется впереди помещенного в него затупленного тела, то тот ее участок, который затормаживает газ до дозвуковых скоростей, оказывается выпуклым. Оба эти свойства известны из результатов экспериментов и многочисленных расчетов, но их строгого доказательства до сих пор получить не удалось.

Рассмотрим плоское течение за гладкой ударной волной в равномерном сверхзвуковом потоке.

Уравнения плоского адиабатического течения можно представить в локальной системе координат, связанной с линиями тока, в виде

$$(1-M^2)\frac{\partial p}{\partial s_1} = kpM^2\frac{\partial \beta}{\partial s_2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial s_2} = -kpM^2\frac{\partial \beta}{\partial s_1} \tag{1}$$

Здесь p — давление, β — угол наклона вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки, M — число Маха, k — показатель адиабаты (предполагается, что $k > 1$), $\partial(\ldots)/\partial s_1$, $\partial(\ldots)/\partial s_2$ — производные по направлениям вектора скорости и нормали к нему, полученной поворотом вектора скорости на угол $^1/_2\,\pi$ против часовой стрелки.

Рассмотрим отображение в плоскость $p\beta$ области за ударной волной, расположенной в физической плоскости xy (оси β и y направлены вертикально вверх, оси p и x — горизонтально вправо). Воспользовавшись уравнениями (1), получим для якобиана $\partial(p, \beta)/\partial(x, y)$ выражение

$$J = \frac{\partial(p, \beta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(p, \beta)}{\partial(s_1, s_2)} = \frac{1}{kpM^2}\left[(1-M^2)\left(\frac{\partial p}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s_2}\right)^2\right] \tag{2}$$

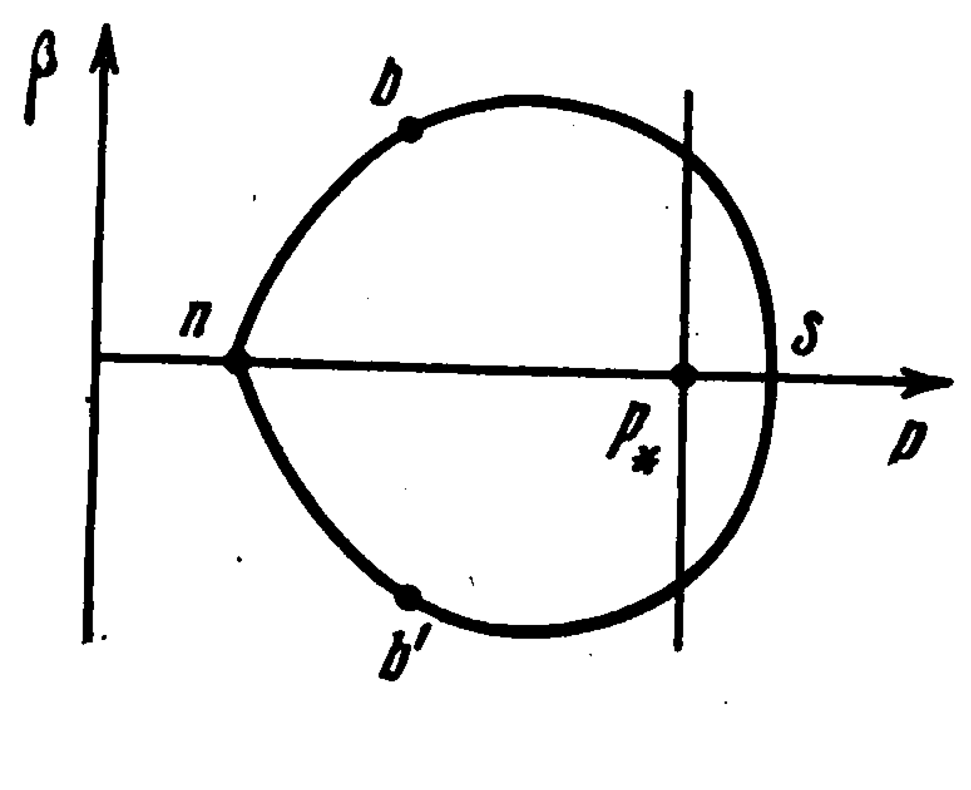
В связи с тем, что $J \geqslant 0$ при $M \leqslant 1$, отображение области дозвуковых скоростей в плоскость $p\beta$ не имеет складок, так как при переходе через край складки («линию ветвления») знак якобиана изменяется. (В несколько иной форме это свойство было получено А. А Никольским и Л. И. Седовым [1].) Далее, точка, в которой $J = 0$, будет при $M < 1$ изолированной, так как решение задачи Коши с начальными данными на линии $J = 0$ привело бы к тривиальному случаю равномерного потока. (Заметим, что локально однолистное отображение (без складок) может быть неоднолистным «в целом». Примером может служить проекция на плоскость винтовой поверхности с вырезанной осью).

Так как якобиан J представляет собой отношение площадей ориентированных элементарных контуров в плоскостях $p\beta$ и xy, из его неотрицательности при $M \leqslant 1$ вытекает следующее правило.

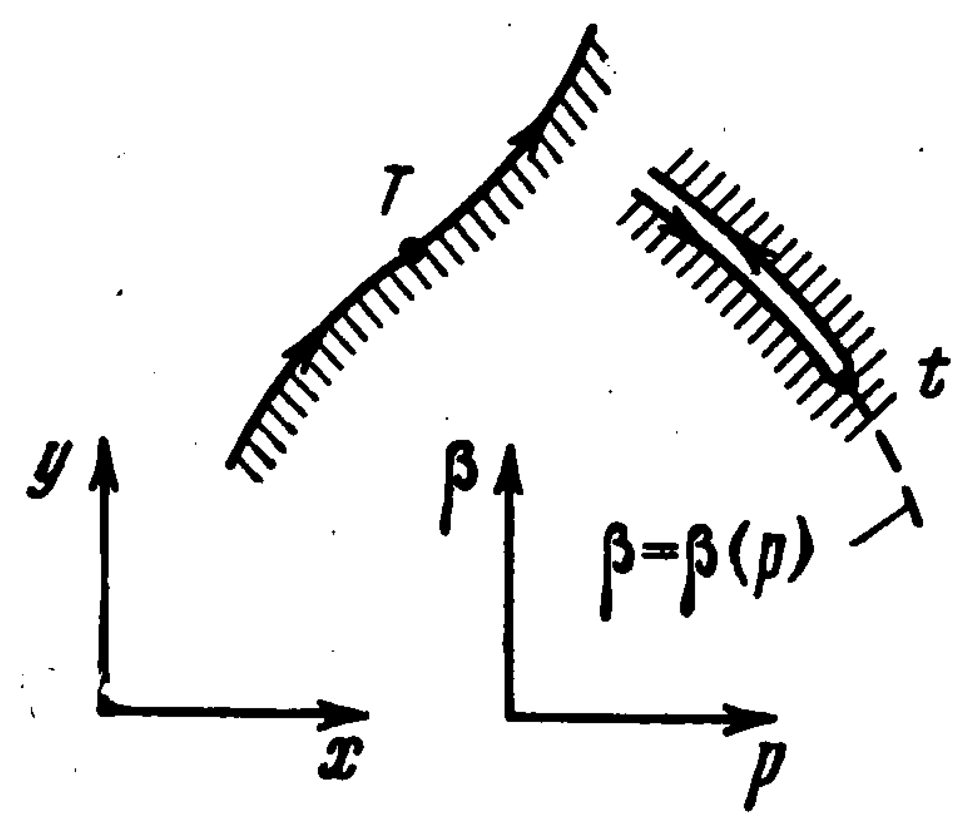
Обходу границы области G дозвуковых скоростей, при котором область остается слева, в плоскости $p\beta$ соответствует обход образа границы G, при котором образ G также остается слева.

Образ ударной волны в плоскости $p\beta$ располагается на замкнутой кривой $\beta = \beta(p)$ где функция $\beta(p)$ определена соотношениями на скачке уплотнения. Отметим на этой кривой (ударной поляре) «дозвуковой» отрезок bsb' (фиг. 1); при передвижении по ударной поляре от точки s к точке n скорость увеличивается, а давление убывает (s изображает точку S ортогональности ударной волны вектору скорости, n — точку, в которой ударная волна вырождается в характеристику).

Свойство 1. Обозначим через T точку изменения направления выпуклости ударной волны по отношению к внешней нормали. Если на ударной волне существует точка T, то из соотношений на скачке уплотнения следует, что перемещению вдоль ударной волны мимо точки T соответствует перемещение по ударной поляре с точкой возврата в t, образе T (фиг. 2). Если в T скорость дозвуковая, то в связи с тем, что $J \geqslant 0$ при $M \leqslant 1$, образ ударной волны в некоторой окрестности T будет разрезом в образе области за ударной волной (фиг. 2).



Фиг. 1



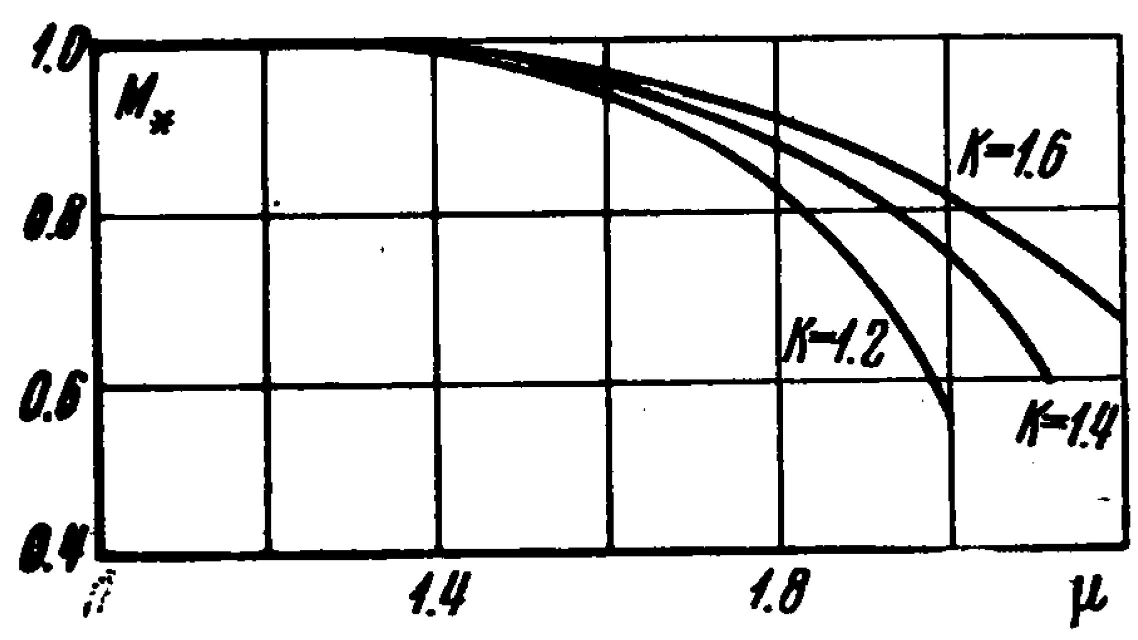
Фиг. 2

Свойство 2. Анализ формулы для давления за скачком уплотнения позволяет установить, что при $1 < M_\infty < \nu(k)$ ударная поляра пересекает прямую (фиг. 1)

$$p = p_* = p_\infty \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

Точки пересечения принадлежат дозвуковому отрезку ударной поляры. (Здесь M_∞, p_∞ — число Маха и полное давление в набегающем потоке, $\nu(k)$ — некоторая постоянная; обозначим, кроме того, число Маха в точках пересечения ударной поляры с прямой $p = p_*$ через M_*, минимальное значение числа Маха на ударной поляре — через M_s.) Это означает, что при $1 < M_\infty \leqslant \mu(k, M_*)$ (где $\mu(k, M_*)$ — некоторая постоянная, $\mu(k, M_*) < \nu(k)$, (фиг. 3)) отрезок ударной поляры, на котором $M_s \leqslant M \leqslant M_*$, расположен правее прямой $p = p_*$, т. е. на этом отрезке

$$p \geqslant p_\infty \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = p_*$$



Фиг. 3

Свойство 3. В связи с тем, что на звуковой линии

$$p = p_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} < p_\infty \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = p_*$$

(p_0 — полное давление в области за ударной волной), образ звуковой линии в плоскости $p\beta$ расположен левее прямой $p = p_*$.

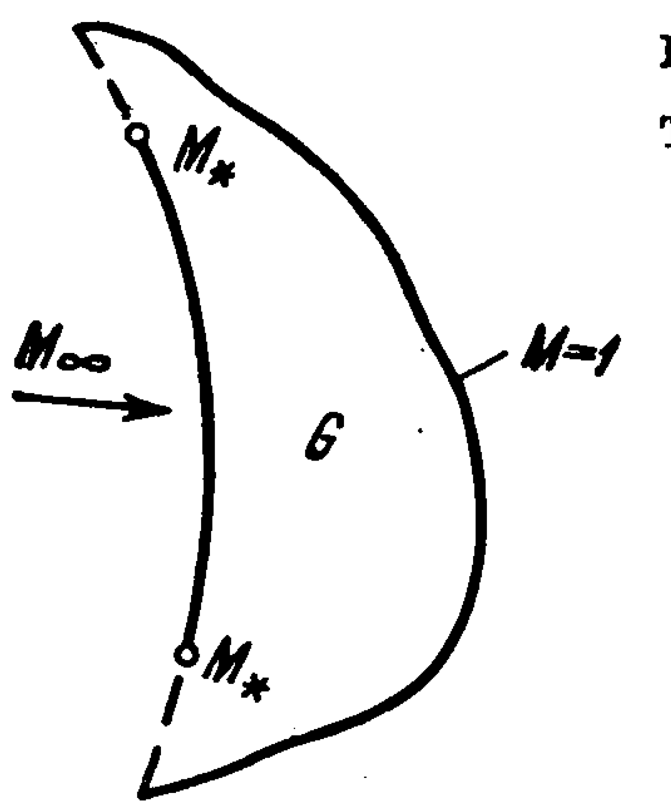
Обозначим через G область дозвуковых скоростей, примыкающую к ударной волне. В общем случае она может быть ограничена отрезками ударной волны, тангенциальных разрывов (при гладкой ударной волне их нет), отрезками контуров профилей, звуковыми линиями и «вторичными» скачками уплотнения в местных сверхзвуковых зонах.

Ограничимся случаями, когда граница G не содержит вторичных скачков уплотнения.

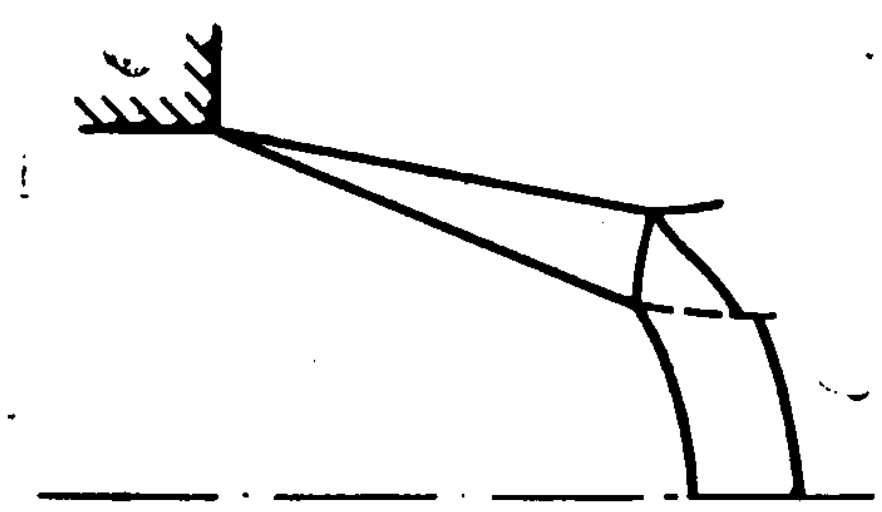
Рассмотрим два типа области G в зависимости от того, содержит ее граница отрезок контура профиля или нет.

Теорема 1. Пусть граница области G дозвуковых скоростей состоит только из отрезков гладкой ударной волны и звуковых линий. При $M_\infty < \mu\,(k,\ M_*)$ отрезок ударной волны (принадлежащий границе G), на котором $M < M_*$, в каждой точке обращен выпуклостью в сторону области за ударной волной (фиг. 4).

Предположим обратное: пусть на указанном отрезке ударной волны имеется точка T. Тогда существует подобласть F области G, образ которой в плоскости $p\beta$ расположен вне петли ударной поляры правее прямой $p = p_t$. Действительно, это обстоятельство следует из свойства 1, если образ ударной волны в окрестности точки T лежит на ударной поляре левее точки t. Если же образ ударной волны расположен на ударной поляре правее точки t, образ F принадлежит окрестности точки s, самой правой точки ударной поляры, так как без ограничения общности можно считать,



Фиг. 4



Фиг. 5

что на ударной поляре между точками t и s нет других точек t. Так как давление в потоке ограничено, образ области F должен быть ограничен справа.

В связи с тем, что граница G состоит только из отрезков ударной волны и звуковых линий и ввиду отсутствия при $M \leqslant 1$ линий ветвления [1], граница образа F, в точках которой $p > p_t$, может быть только образом отрезка звуковой линии. Однако в соответствии со свойствами 2, 3 при $M_\infty < \mu\,(k,\ M_*)$ это невозможно.

Таким образом, получено, что ударная волна на некотором дозвуковом отрезке (при $M < M_*$) не содержит точек T и что образ окрестности этого отрезка расположен внутри петли ударной поляры. Применяя правило обхода границы области G и соотношения на скачке уплотнения, получим, что ударная волна на этом отрезке обращена выпуклостью в сторону области за ударной волной

Такое течение с «вогнутой» ударной волной имеет место при истечении сверхзвуковой струи в пространство с повышенным давлением, на режиме «нерегулярного» отражения косого скачка уплотнения от оси симметрии струи [2] (фиг. 5).

Перейдем теперь к области G, граница которой содержит отрезок контура профиля. Рассмотрим обтекание гладкого выпуклого профиля с отошедшей ударной волной. Критической называется точка, в которой приходящая на профиль линия тока разветвляется на две; в критической точке скорость равна нулю.

Теорема 2. Пусть при сверхзвуковом обтекании гладкого выпуклого профиля, единственного во всем потоке, имеют место следующие свойства.

1. Ударная волна гладкая на всем протяжении.

2. Граница области G дозвуковых скоростей не содержит вторичных скачков уплотнения.

3. Критическая точка на профиле — единственная.

Если $M_\infty < \mu\,(k,\ M_*)$, то отрезок ударной волны (принадлежащий границе G), на котором $M < M_*$, в каждой точке обращен выпуклостью в сторону набегающего потока.

[1] При отображении со складками граница образа области может содержать линию ветвления.

Рассмотрим отображение в плоскость $p\beta$. Так как профиль гладкий, образ критической точки O представляет собой отрезок O_1O_2 прямой $p = \text{const}$ длиной π (фиг. 6). Контур профиля изображается кривыми, продолжающими этот отрезок с разных концов. В связи с выпуклостью профиля при перемещении по кривой, примыкающей к верхнему концу отрезка O_1, угол β возрастает; при перемещении по кривой, примыкающей к нижнему концу отрезка O_2 угол β убывает (фиг. 6).

Отрезок O_1O_2 лежит вне петли ударной поляры, правее ее (фиг. 6). Действительно в точке O

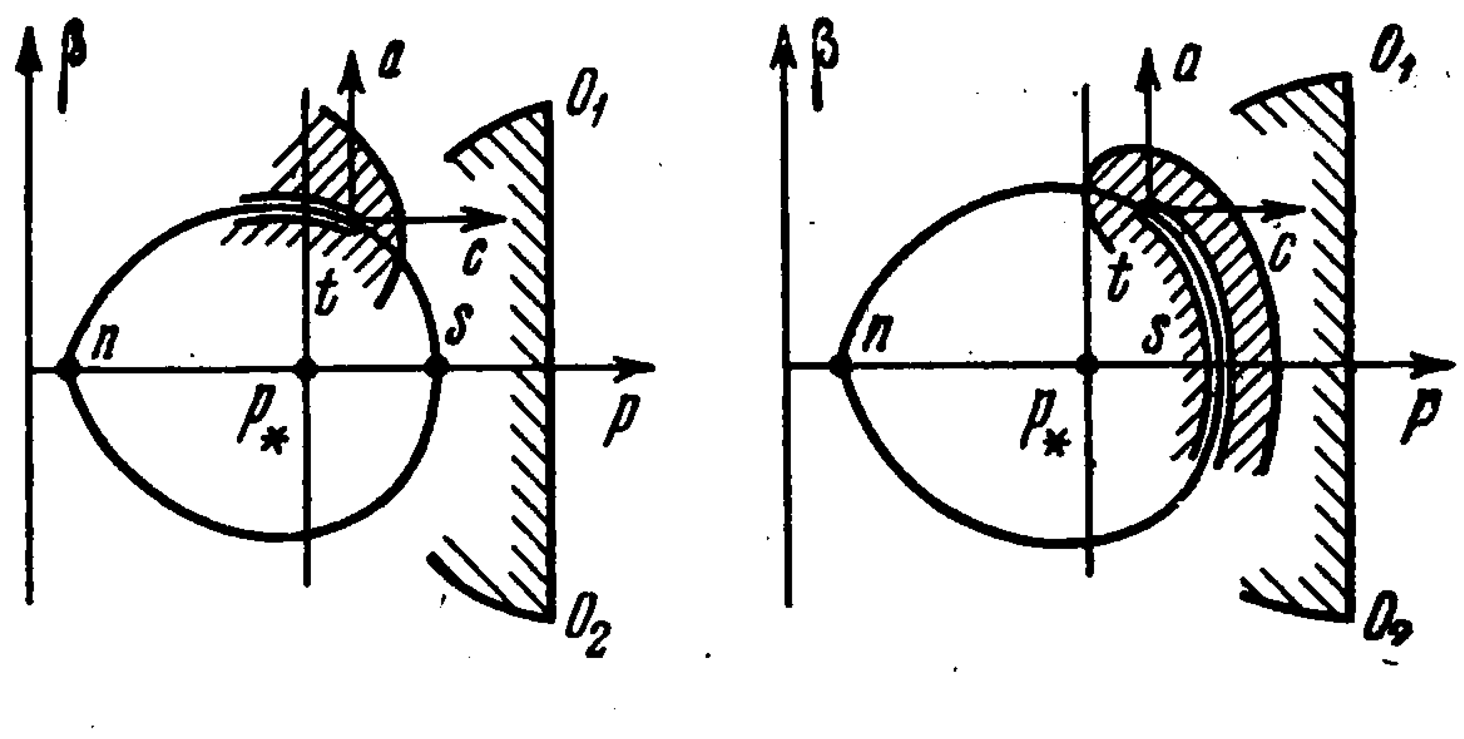
$$p = p_0 \geqslant p_{0s}$$

Равенство здесь выполняется только в случае, когда в критическую точку попадает линия тока, проходящая через точку S ортогональности ударной волны вектору скорости. В точке s

$$p = p_{0s}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_s^2\right)^{k/(k-1)} < p_{0s}$$

следовательно, давление в точке s меньше давления в точке O. Здесь p_{0s}, λ_s — полное давление и коэффициент скорости в точке S; $\lambda_s > 0$.

Образом ударной волны в плоскости $p\beta$ будет вся петля ударной поляры. Число точек T на ударной поляре равно нулю или четно. Действительно, так как ударная волна в окрестности бесконечно удаленных точек вырождается в характеристики разных семейств (в верхней полуплоскости — в характеристику первого семейства, в нижней полуплоскости — в характеристику второго семейства), изображениями этих окрестностей в плоскости $p\beta$ будут отрезки ударной поляры, ограниченные точкой n снизу и сверху соответственно; образ ударной волны ввиду ее гладкости будет непрерывной кривой. Если на ударной волне существуют точки T, то ударная поляра разбивается точками t (изображениями T) на отрезки, покрываемые при перемещении вдоль ударной волны нечетное, но различное число раз.



Фиг. 6

Предположим теперь, что на указанном в теореме 2 отрезке ударной волны имеется точка T. Без ограничения общности будем считать, что образ t этой точки лежит в верхней полуплоскости $p\beta$, т. е. $\beta_t \geqslant 0$. Точка t ограничивает отрезок, который покрывается (при перемещении вдоль ударной волны) не менее трех раз. Используя правило обхода границы дозвуковой области, можно убедиться, что в окрестности точки t вне петли ударной поляры существует не менее двух листов образа дозвуковой области G. Эти листы показаны на фиг. 6 в зависимости от того, в какой стороне от точки t на ударной поляре (справа или слева) лежит образ ударной волны в окрестности точки T. Ввиду отсутствия при $M \leqslant 1$ линий ветвления эти листы не могут быть скреплены один с другим.

В связи с тем, что оба листа содержат правый верхний квадрант atc окрестности точки t (он расположен вне петли ударной поляры) границы листов пересекают этот квадрант. Поэтому на каждом листе существует отрезок границы дозвуковой области G, не принадлежащий ударной поляре, расположенный правее точки t (т. е. на этом отрезке $p > p_t$) и характеризуемый тем, что при перемещении вдоль него в направлении возрастания угла β образ области G (в некоторой окрестности отрезка) лежит слева. Используя правило обхода границы дозвуковой области, можно убедиться, что образ контура профиля не удовлетворяет этому условию из-за его выпуклости, а образ звуковой линии — ввиду свойств 2,3. Следовательно, указанным отрезком границы может быть только образ O_1O_2 критической точки O. Отрезок O_1O_2 может, однако ограничивать только один лист образа G, так как при $M \leqslant 1$ линий ветвления не существует.

Полученное противоречие доказывает неправильность предположения о существовании точки T на указанном выше отрезке ударной волны. Образ области G в окрестности этого отрезка лежит вне петли ударной поляры. Применяя правило обхода границы G, получим, что ударная волна на этом отрезке обращена выпуклостью в сторону набегающего потока.

Рассмотрим теперь обтекание заостренного выпуклого профиля с присоединенной ударной волной, когда течение за ней в некоторой окрестности острия будет дозвуковым. Такой режим может осуществляться, как следует из анализа ударной поляры, при некотором соотношении между числом M_∞ и углом наклона профиля (в острие) к вектору скорости набегающего потока.

Теорема 3. Пусть при сверхзвуковом обтекании заостренного выпуклого профиля с присоединенной ударной волной имеют место следующие свойства.

1. Ударная волна гладкая на всем протяжении от точки присоединения.
2. Граница области G дозвуковых скоростей, расположенной в некоторой окрестности острия, не содержит вторичных скачков уплотнения.

Если $M_\infty < \mu(k, M_*)$, то отрезок ударной волны, на котором $M < M_*$ (если граница G содержит такой отрезок), в каждой точке обращен выпуклостью в сторону набегающего потока.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Поступила 10 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Гостехиздат, 1950.
2. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Г. М. Шефтер

(Москва)

Выводятся приближенные уравнения коротких волн, распространяющихся в неоднородной движущейся среде, обладающей вязкостью и теплопроводностью. В них учтены одновременно главные нелинейные и диссипативные члены, а также сохранена возможность описания двумерной структуры течения в зоне волны. Для задачи о распространении звуковых импульсов рассмотрены два предельных случая. Когда влияние диссипативных факторов пренебрежимо мало, т. е. среда может считаться идеальной, построено точное частное решение, из которого следуют законы затухания слабых ударных волн в неоднородном движущемся газе, лишенном вязкости и теплопроводности. Эти законы были изучены ранее [1–3], но впервые они получены в результате прямого решения уравнений первого приближения для течения газа в волне. Асимптотическая форма звуковых импульсов и законы их затухания при очень больших значениях времени определяются в основном диссипативными факторами, а несущественными на этой стадии становятся нелинейные члены.

1. Рассмотрим задачу о распространении звуковых волн в неоднородной движущейся среде, обладающей вязкостью и теплопроводностью. Пусть t обозначает время; x, y, z — декартовы координаты; $\mathbf{v}$ — вектор массовой скорости с проекциями v_x, v_y, v_z; g_x, g_y, g_z— компоненты вектора ускорения силы тяжести; ρ — плотность; p — давление; a — адиабатическую скорость звука; λ_1, λ_2 — коэффициенты вязкости и второй вязкости; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; γ — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_v; α — коэффициент теплового