

Из двух корней уравнения (4.7) один (меньший) соответствует максимуму функции $z(x)$, а другой (большой) — минимуму, т. е. шейке. Этот большой корень равен

$$t_0 = \tau = \pi - \arcsin(1/k\sqrt{2}) \quad (4.8)$$

Таким образом, условие (4.6) принимает вид

$$\int_0^{\tau} \frac{1 - 2k^2 \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt = 0 \quad (4.9)$$

Из этого уравнения при помощи таблиц эллиптических интегралов [2] находим значение k^2 , а затем из (4.4) определяем величину A для режима, соответствующего отрыву пленки

$$k^2 = 0,73, \quad A = 1,84 \quad (4.10)$$

Вычисление угловой скорости для режима отрыва легко провести для случая, когда угол смачивания в точности равен $1/2 \pi$. В этом случае шейка лежит на сфере, так что $\theta_* = 1/2 \pi$, и пленка целиком покидает сферу.

Вычисляя объем пленки, фигура которой определяется формулой (4.5), и приравняв вычисленный объем заданному объему V , находим

$$4\pi R^3 0,272 \Delta^2 = V \quad (4.11)$$

Из (4.2), (4.10), (4.11) получаем величину безразмерной угловой скорости отрыва

$$\omega = (1/2 \pi R^3 / V)^{1/2} \quad (4.12)$$

Вычисления, проведенные для $\alpha < 1/2 \pi$ (но $1/2 \pi - \alpha \ll 1$), показывают, что с уменьшением α угловая скорость отрыва уменьшается

$$\omega = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)^2 \right] \left(\frac{\pi R^3}{2V} \right)^{1/2} \quad (4.13)$$

При $\alpha < 1/2 \pi$ часть пленки остается на сфере после отрыва основной массы жидкости.

В заключение заметим, что случайные возмущения или отклонения формы поверхности смачиваемого тела от сферической могут привести к тому, что разрыв пленки при малых угловых скоростях произойдет лишь на одном из полюсов. Эволюция фигуры пленки в этом случае приведет к несимметричному относительно экватора жидкому поясу и требует дополнительного исследования.

Поступила 14 1 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. А п п е л ь П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.— М., ГОНТИ, 1936.
2. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1964.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

А. П. Б ы р к и н

(Москва)

При изучении течений вязкой жидкости особый интерес представляют случаи, когда удается получить точные решения уравнений Навье—Стокса.

Для вязкого теплопроводного газа известно небольшое количество таких решений. К ним относится полученное в работе [1] решение, отвечающее случаю течения вязкого газа в коническом сопле при специальном законе теплообмена на стенке.

Вместе с тем автором указанной работы сделан вывод об отсутствии таких автомодельных течений в канале с плоскими стенками.

В данной работе показано, что при определенных условиях и в этом случае уравнения Навье—Стокса сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой может быть получено либо в замкнутом виде (при некоторых законах вязкости), либо численно.

1. Одним из точных решений уравнений гидромеханики является решение Гамеля о течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя плоскими наклоненными под углом одна к другой стенками.

Предполагая существование его аналога в случае вязкого теплопроводного газа, будем искать решение уравнений Навье—Стокса в полярных координатах r, φ в следующем виде:

$$v = v(\varphi), \quad w = 0, \quad h = h(\varphi)$$

где v, w — радиальная и окружная составляющие скорости, h — энтальпия.

При этом уравнения импульса, энергии, неразрывности и состояния в безразмерном виде запишутся следующим образом (рассматривается случай совершенного газа):

$$\begin{aligned} (r^\circ)^2 R \frac{\partial p^\circ}{\partial r^\circ} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\mu^\circ \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{4}{3} \mu^\circ v^\circ \\ r^\circ R \frac{\partial p^\circ}{\partial \varphi} &= \mu^\circ \frac{\partial v^\circ}{\partial \varphi} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mu^\circ v^\circ) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\mu^\circ}{\sigma} \frac{\partial h^\circ}{\partial \varphi} + (\kappa - 1) M_1^2 \mu^\circ v^\circ \frac{\partial v^\circ}{\partial \varphi} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (r^\circ \rho^\circ v^\circ) &= 0, \quad \kappa M_1^2 p^\circ = \rho^\circ h^\circ \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь безразмерные величины $r^\circ, v^\circ, p^\circ, \rho^\circ, h^\circ, \mu^\circ$ связаны с размерными следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} r^\circ &= \frac{r}{r_1}, \quad v^\circ = \frac{v}{v_1}, \quad p^\circ = \frac{p}{\rho_1 v_1^2}, \quad \rho^\circ = \frac{\rho}{\rho_1} \\ h^\circ &= \frac{h}{h_1}, \quad \mu^\circ = \frac{\mu}{\mu_1}, \quad R = \frac{\rho_1 v_1 r_1}{\mu_1} \end{aligned}$$

где p — давление, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости, κ — показатель адиабаты, σ — число Прандтля, M — число Маха, $v_1, \rho_1, h_1, \mu_1, M_1$ — значения соответствующих величин на расстоянии r_1 от начала координат при каком-либо фиксированном значении φ (например, $\varphi = 0$), R — постоянное число Рейнольдса.

Будем рассматривать степенную зависимость коэффициента вязкости от температуры $\mu \sim h^n$, хотя, как будет видно из дальнейшего, автомодельные решения существуют при произвольной зависимости $\mu(h)$.

Легко показать, что система уравнений (1.1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (индекс $^\circ$ у безразмерных величин будем далее опускать).

Так, из уравнения неразрывности следует: $r\rho v = \Phi(\varphi)$; отсюда с учетом уравнения состояния приходим к результату, что давление

$$p = \frac{1}{\kappa M_1^2} p_1 p_2 \quad \left(p_1 = p_1(r) = \frac{1}{r}, \quad p_2 = p_2(\varphi) = \Phi \frac{h}{v} \right) \quad (1.2)$$

Подставляя далее выражение (1.2) в первые два уравнения (1.1) и интегрируя один раз уравнение энергии по φ , окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left(\mu \frac{dv}{d\varphi} \right) &= \frac{4}{3} \mu v - \frac{R}{\kappa M_1^2} p_2, \quad \frac{R}{\kappa M_1^2} \frac{dp_2}{d\varphi} = \mu \frac{dv}{d\varphi} + \frac{4}{3} \frac{d}{d\varphi} (\mu v), \\ \frac{\mu}{\sigma} \frac{dh}{d\varphi} + \mu \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \frac{d}{d\varphi} (v^2) &= C \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отметим, что постоянная интегрирования C характеризует величину теплового потока через стенки канала.

Тепловые потоки на обеих стенках равны по величине и противоположны по знаку, так что в общем случае течение в канале может быть несимметричным, но при этом не происходит изменения теплосодержания вдоль линий тока.

Предполагая, что значение $\varphi = 0$ отвечает условию $dv/d\varphi = 0$, полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно величин v, h, p_2 будем рассматривать как систему с начальными условиями $v = 1, dv/d\varphi = 0, h = 1, p_2 = 1$ при $\varphi = 0$. Соответствующие же углы наклона стенок канала к плоскости $\varphi = 0$ в положительном и отрицательном направлениях определятся в результате интегрирования уравнений (1.3) (при заданных R, M_1 и C) из условия равенства нулю скорости на обеих стенках.

Система (1.3) с выписанными начальными условиями при произвольной зависимости коэффициента вязкости от температуры может решаться каким-либо численным методом на ЭВМ.

2. Ограничимся в дальнейшем рассмотрении только симметричных течений (без теплопередачи через стенки канала), когда $C = 0$.

Интегрируя последнее уравнение системы (1.3), независимо от закона вязкости, получаем

$$h = 1 + \sigma \frac{\kappa - 1}{2} M^2 (1 - v^2) \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что коэффициент восстановления энтальпии (температуры) на стенке равен σ (здесь M — число Маха на оси канала).

Величины $R/\kappa M^2 = \alpha, \sigma(\kappa - 1)M^2/2 = \beta$ и n — показатель степени в формуле для коэффициента вязкости будут параметрами рассматриваемой системы.

Обозначим далее $Rp_2/\kappa M^2 = P_2$, тогда $(P_2)_{\varphi=0} = \alpha$.

При значениях показателя n , равных 0.5 и 1, задача может быть до конца решена аналитически, как и при $n = 0$.

Так, из второго уравнения (1.3) после интегрирования получаем следующую зависимость P_2 от v :

$$\begin{aligned} (n = 0.5) \quad P_2(v) &= \alpha - \left[\frac{11}{6} + \frac{1 + \beta}{2\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \right] + \\ &+ \left[\frac{11}{6} v \sqrt{1 + \beta(1 - v^2)} + \frac{1 + \beta}{2\sqrt{\beta}} \arcsin v \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \right] \\ (n = 1) \quad P_2(v) &= \alpha - (7/3 + 2/3 \beta) + 7/3 (1 + \beta) v - 5/3 \beta v^3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

При значении $\beta = 0$, которое соответствует $M = 0$, а также значениям $\kappa = 1$ или $\sigma = 0$ при произвольном числе M , оба выражения дают одинаковый результат

$$P_2(v) = \alpha - 7/3 (1 - v)$$

Как следует из (2.2), в общем случае зависимость P_2 от v может быть не монотонной, причем наименьшее значение P_2 будет принимать при $v = 0$.

Формулы (2.2), в частности, позволяют выяснить, какие наименьшие значения может принимать величина α для заданного β .

Очевидно, минимальному значению α будет соответствовать условие равенства нулю давления на стенке $P_2(0) = 0$, причем раскрытие канала будет в этом случае максимальным. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} (n = 0.5) \quad \alpha &\geq \alpha_* = \frac{11}{6} + \frac{1 + \beta}{2\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \\ (n = 1) \quad \alpha &\geq \alpha_* = 7/3 + 2/3 \beta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда видно, что при $n = 0.5$ и 1 минимальные значения α_* по-разному зависят от β (соответственно при больших β , как $\sqrt{\beta}$ и β).

Теперь остается проинтегрировать первое уравнение (1.3), которое с учетом (2.1), (2.2) запишем следующим образом:

$$v'' - W(v)(v')^2 = Q(v) \quad (2.4)$$

где штрих, как и ранее, означает дифференцирование по φ и введены обозначения

$$W(v) = 2\beta n \frac{v}{1 + \beta(1 - v^2)}, \quad Q(v) = \frac{4}{3} v - \frac{P_2(v)}{[1 + \beta(1 - v^2)]^n}$$

Сделав в (2.4) замену переменных $v' = t(v)$ (см., например, [2]), получим

$$z' + \Pi(v) z = Q(v) \quad (z = 1/2 t^2, \Pi(v) = -2W(v)) \quad (2.5)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по v .

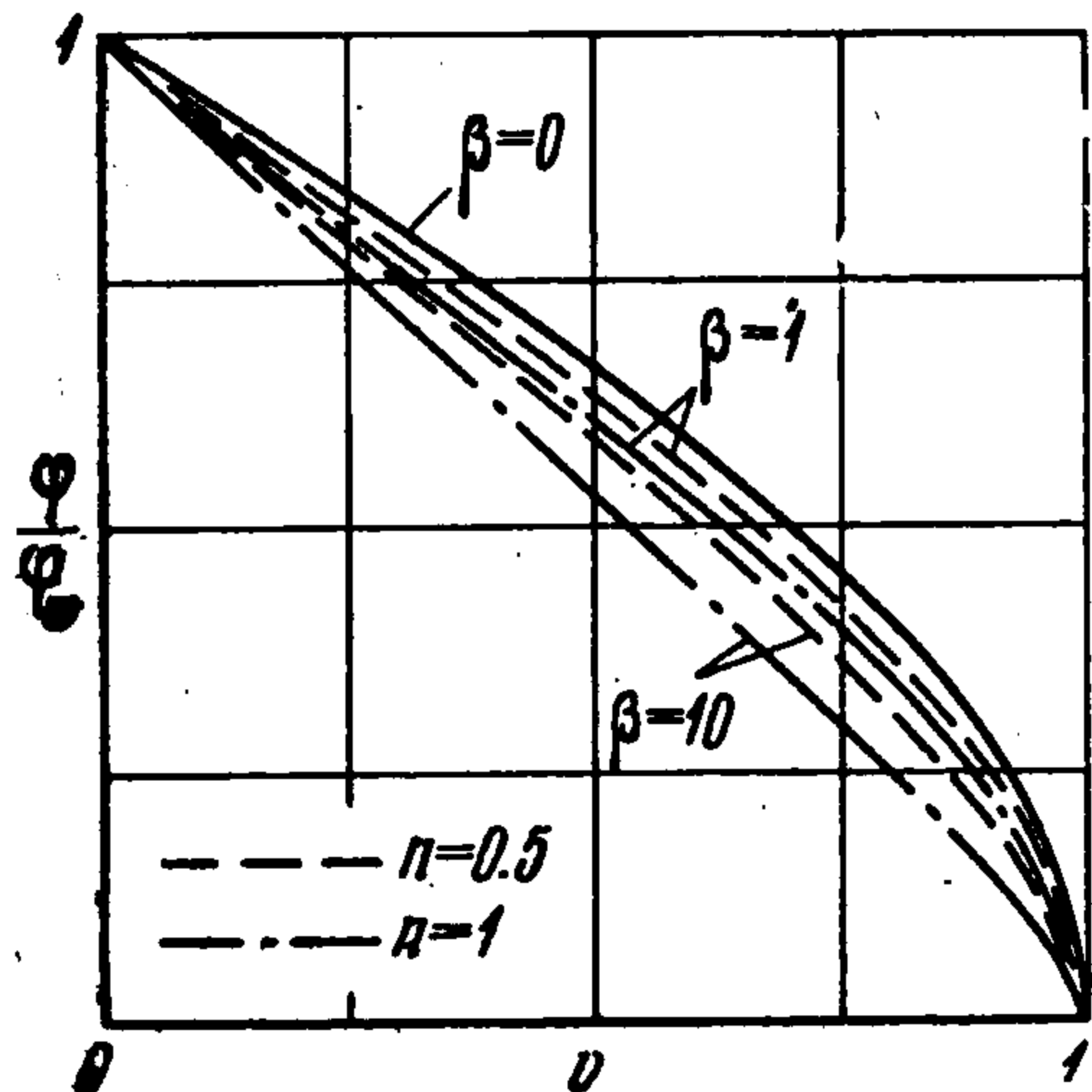
Общим решением уравнения (2.5) будет

$$z = e^{-V(v)} \left[\int Q(v) e^{V(v)} dv + C_1 \right] \quad (V(v) = \int \Pi(v) dv) \quad (2.6)$$

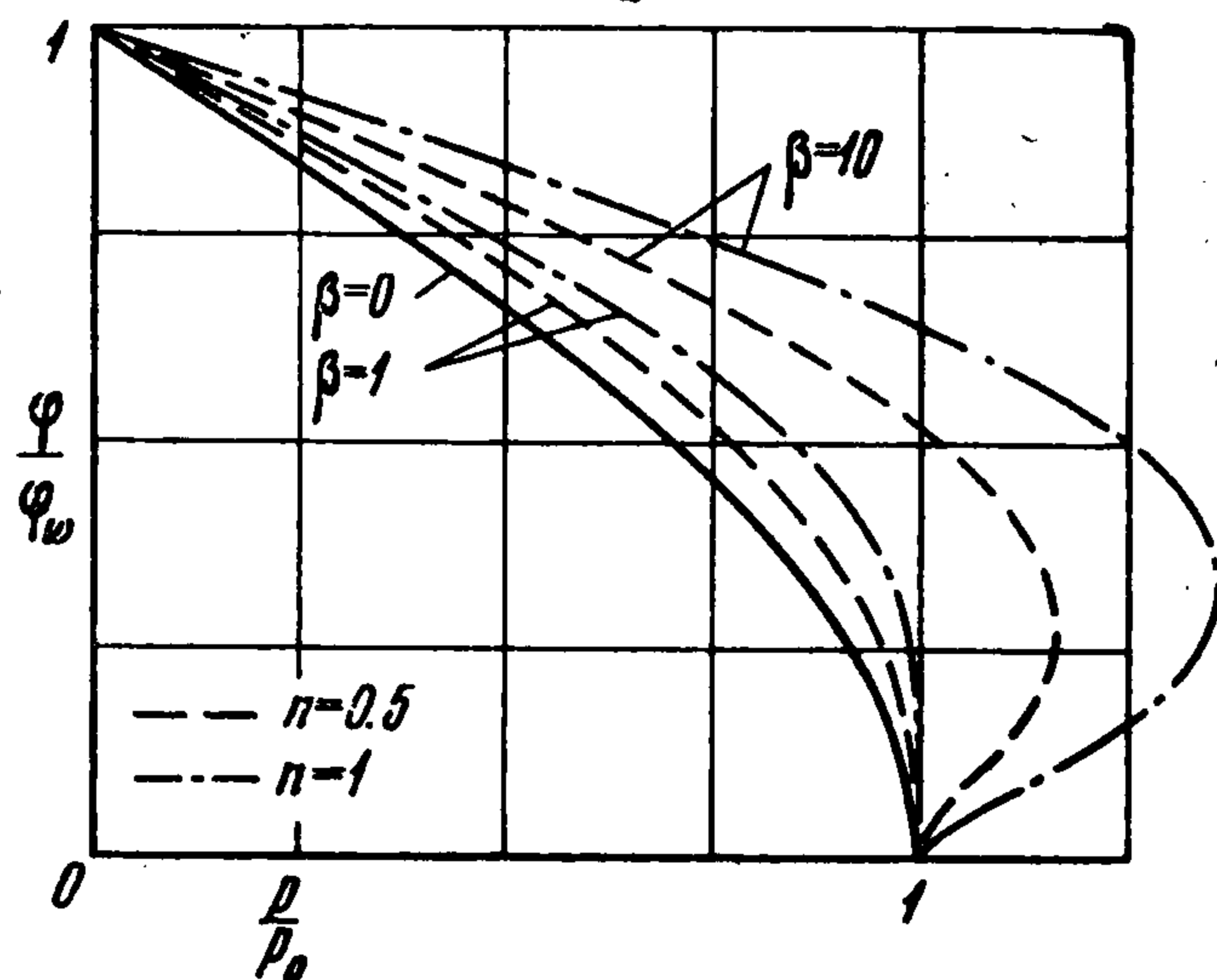
Решение уравнения (2.4) может быть записано следующим образом:

$$\varphi = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{2z}} + C_2 \quad (2.7)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 должны определиться из условий $z = 0$, $\varphi = 0$ при $v = 1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Остается вычислить интегралы для получения явной зависимости от v подкоренного выражения в (2.7) и затем получить зависимость $\varphi(v)$. Опуская подробные выкладки, приведем окончательные результаты. Так, для $n = 0.5$ получаем

$$\varphi = \arccos \frac{I_1(v)}{I_1(1)} \quad (2.8)$$

$$\left(I_1(v) = v/2 \sqrt{1 + \beta(1 - v^2)} + \frac{1 + \beta}{2\sqrt{\beta}} \arccos \sin v \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} + \Delta\alpha, \Delta\alpha = \alpha - \alpha_* \right)$$

Из соотношения (2.8) следует, что для любого β максимальный полуугол раскрытия стенок канала φ_w получается при $\Delta\alpha = 0$ ($\alpha = \alpha_*$) и равен $1/2 \pi$.

Можно получить ряд предельных выражений уравнения (2.8).

Например, при $\beta = 0$ ($M = 0$ или $\kappa = 1$, или $\sigma = 0$) имеем

$$v = (1 + \Delta\alpha) \cos\varphi - \Delta\alpha \quad (2.9)$$

Случаю $\beta \rightarrow \infty$ соответствует $M \rightarrow \infty$ или $\sigma \rightarrow \infty$. Полагая при этом дополнительно $\Delta\alpha = 0$, получаем

$$\varphi = \arccos \left[\frac{2}{\pi} (v \sqrt{1 - v^2} + \arccos \sin v) \right] \quad (2.10)$$

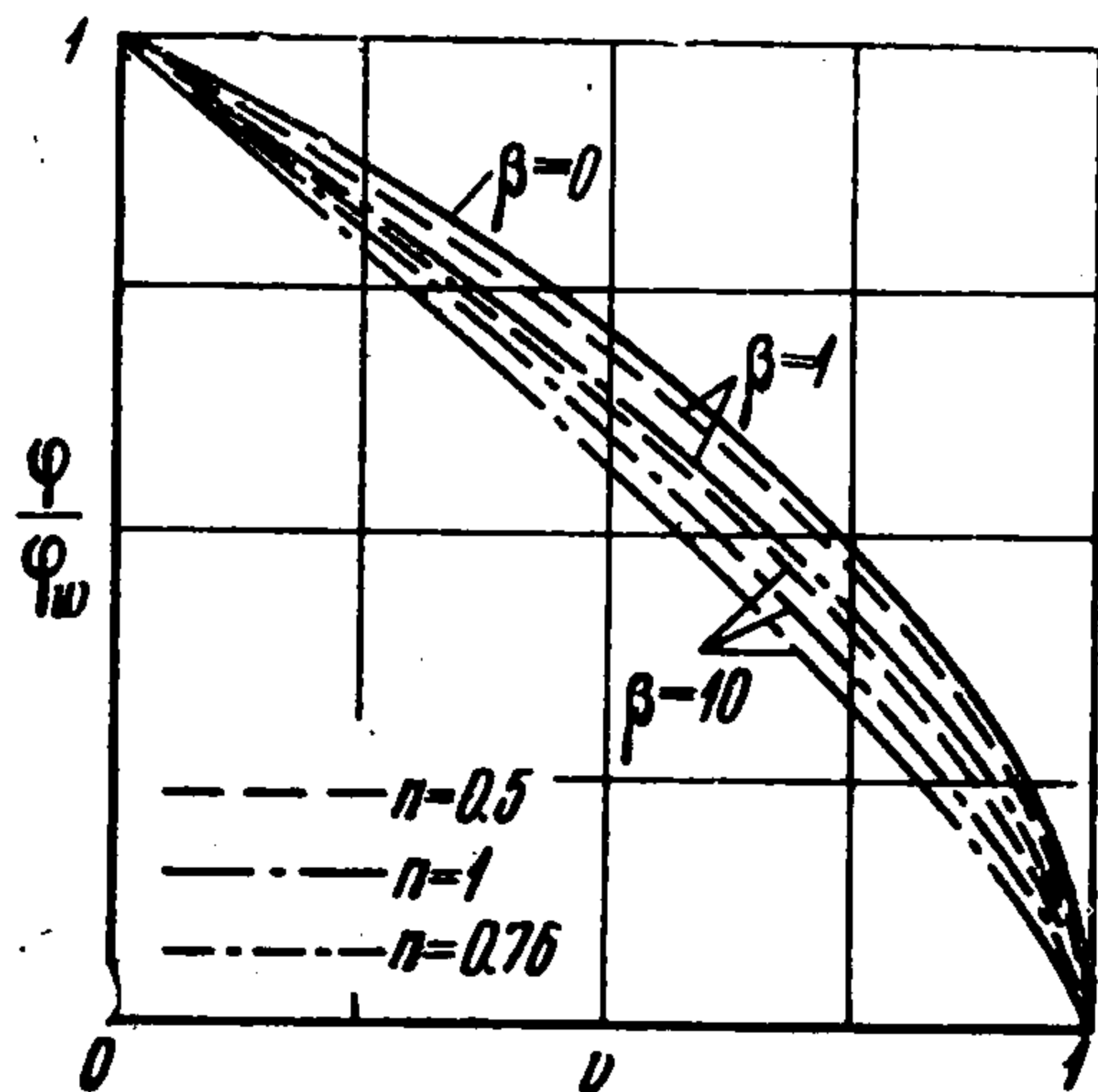
Аналогично для $n = 1$ будем иметь

$$\varphi = \arccos \frac{I_2(v)}{I_2(1)} \quad (I_2(v) = (1 + \beta) v - 1/3 \beta v^3 + \Delta\alpha) \quad (2.11)$$

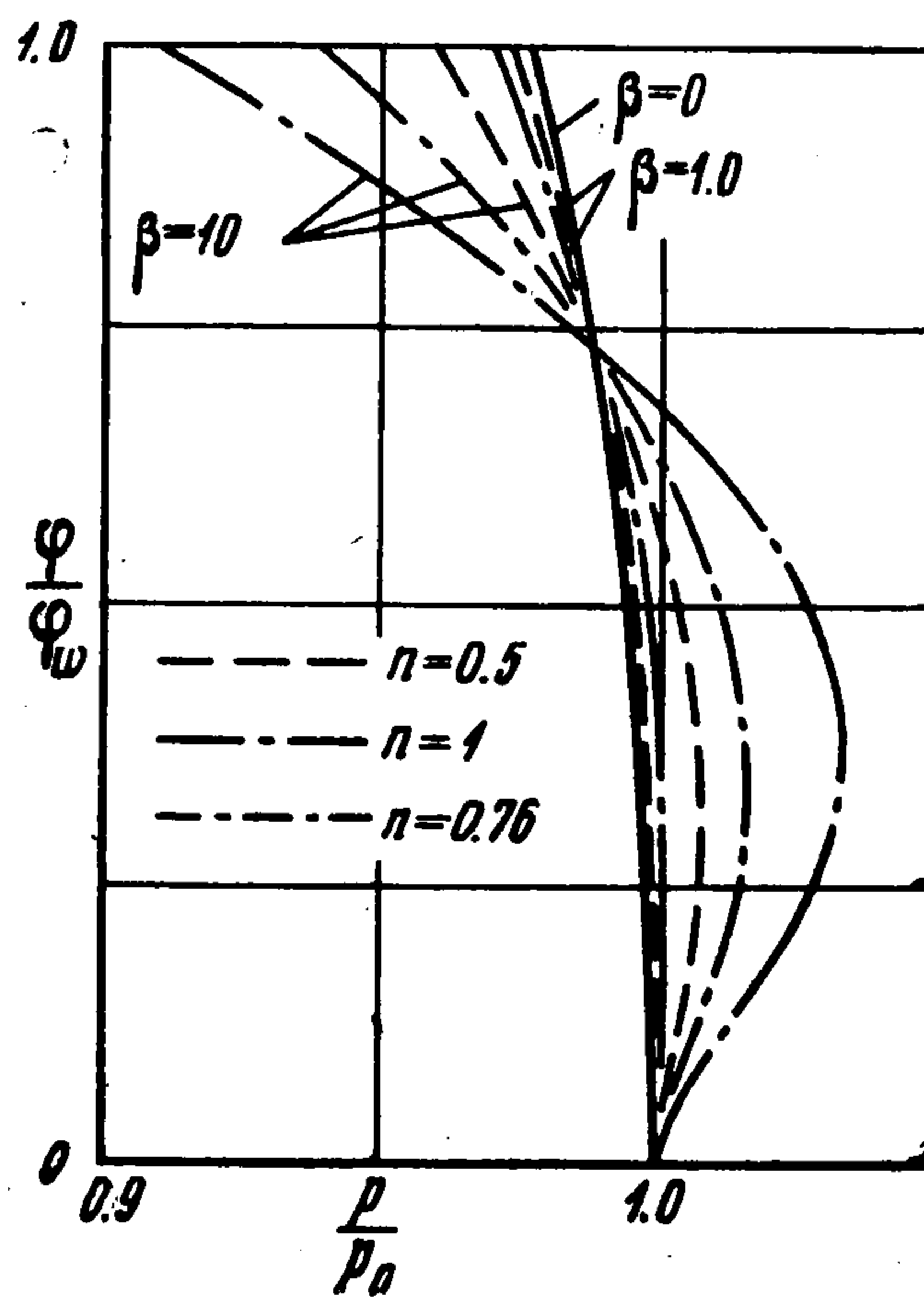
Из формулы (2.11) также следует, что для любого β максимальный полуугол раскрытия стенок получается при $\Delta\alpha = 0$ и равен $1/2 \pi$. Предельное выражение (2.11) при $\beta = 0$ и конечном $\Delta\alpha$ будет совпадать с (2.9), однако при $\beta \rightarrow \infty$ и $\Delta\alpha = 0$ оно принимает вид

$$\varphi = \arcsin \cos \left(\frac{2}{3} v - \frac{1}{2} v^3 \right) \quad (2.12)$$

Отметим особенность, следующую из формулы (2.12) и свойственную значению $n = 1$ (см., например, [3]): величина $(dv/d\varphi)_{\varphi=0}$ оказывается равной не нулю, а $-1/\sqrt{3}$. Это объясняется сочетанием вырожденных значений $n = 1$ и $\beta \rightarrow \infty$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Исследуем теперь полученные решения (2.8), (2.11) при малых углах раскрытия канала ($\varphi_w \ll 1$).

Из уравнения (2.11) с учетом малости φ_w имеем

$$1 - \frac{\varphi_w^2}{2} = \frac{\alpha - \alpha_*}{\alpha - 4/3} \quad (2.13)$$

Отсюда видно, что этот случай может иметь место при $\alpha \geq \alpha_*$.

Это значит, что для получения в таких каналах автомодельных течений с умеренными или большими числами M необходимы достаточно большие числа R .

Преобразовывая уравнение (2.13) и пренебрегая далее величиной $4/3$ по сравнению с α , получаем

$$R\varphi_w^2 = 2 \left(1 + \frac{2}{3} \beta \right) \kappa M^2 \quad (2.14)$$

При этом, используя (2.8), (2.11), представим скорость в зависимости от величины $\eta = \varphi / \varphi_w$. Это дает

$$(n = 0.5) \quad \eta^2 = 1 - \frac{J_1(v)}{J_1(1)}$$

$$\left(J_1(v) = v \sqrt{1 + \beta(1 - v^2)} + \frac{1 + \beta}{\sqrt{\beta}} \arcsin v \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \right)$$

$$(n = 1) \quad \eta^2 = 1 - \frac{J_2(v)}{J_2(1)} \quad (J_2(v) = (1 + \beta)v - \frac{1}{3}\beta v^3) \quad (2.15)$$

Таким образом, из (2.14), (2.15) следует, что при течении газа с заданными теплофизическими свойствами (κ, σ, n) при больших значениях параметра $\alpha = R / \kappa M^2$

одни и те же профили всех газодинамических величин по приведенной координате $\eta = \varphi / \varphi_w$ могут быть получены в каналах с разными углами раскрытия, но при постоянстве величины $R\varphi_w^2 = f(\kappa, \sigma, n, M)$.

Из формул (2.14), (2.15) при $M = 0$ ($\beta = 0$) получаем параболический профиль скорости и $\varphi_w = 0$ (R может быть любым), т. е. течение Пуазейля в канале постоянного сечения.

Формула (2.15) для $n = 1$ при $\beta \rightarrow \infty$, как и формула (2.12), дает для $(dv/d\eta)_{\eta=0}$ отличное от нуля значение, равное $-\sqrt{2/3}$.

При малых значениях φ_w ($\alpha \gg \alpha_*$) с учетом (2.2) далее получаем, что приведенное давление по сечению p/p_0 (p_0 — давление на оси)

$$\frac{p}{p_0} = 1 + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad (2.16)$$

т. е. с точностью до членов $(1/\alpha)$ давление в поперечном сечении канала можно считать постоянным.

Из рассмотрения течений в каналах с малыми углами раскрытия, в частности, следует, что используемые для описания течения вязкого газа в таких каналах приближенные уравнения пограничного слоя [3] будут предельной формой уравнений Навье—Стокса при $\varphi_w \rightarrow 0$.

При этом полученные в работе [3] формулы для расчета профилей скорости в поперечном сечении канала совпадают с приведенными здесь выражениями (2.15)

На фиг. 1—5 представлены некоторые результаты расчетов. Так, на фиг. 1, 2 для $\alpha = \alpha^*$ и на фиг. 3, 4 для $\alpha = 100$ при $\beta = 0, 1, 10$ приведены профили скорости и давления в поперечном сечении канала в зависимости от величины φ / φ_w . Из графиков видно влияние показателя n в законе вязкости на приведенные характеристики. Для $\alpha = 100$ и $\beta = 10$ представлены также расчетные кривые, соответствующие значению $n = 0.76$ (воздух), которые получены в результате численного интегрирования.

На фиг. 5 приведены зависимости полууглов раскрытия канала φ_w от α при фиксированных β .

Отметим, что полученное решение задачи о течении вязкого теплопроводного газа в канале можно обобщить на случай течения разреженного газа со скольжением.

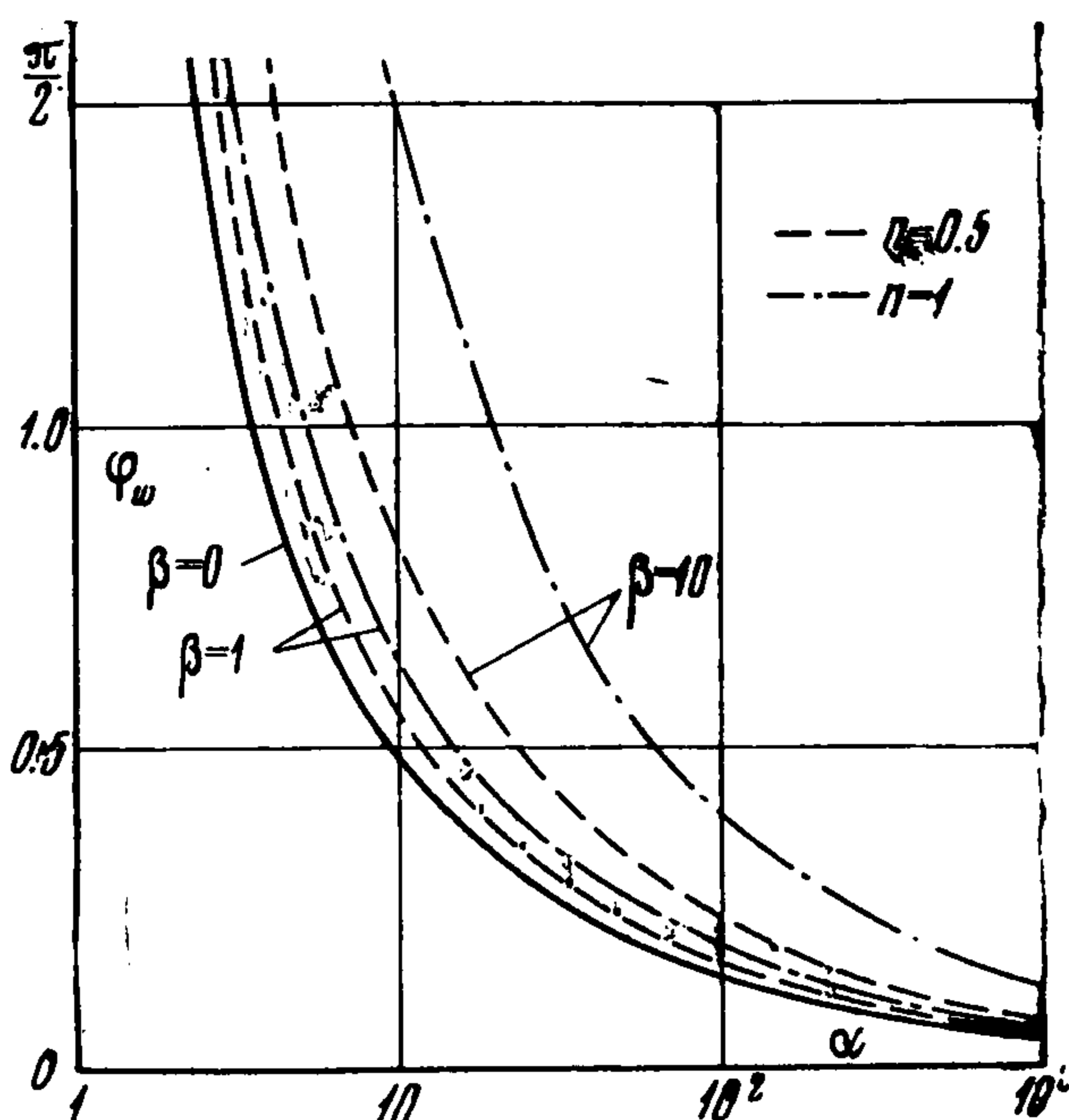
Так как в данном случае изменятся только граничные условия на стенке, структура решения останется прежней, но изменится угол раскрытия канала при одних и тех же значениях параметров α и β .

При этом $\alpha \sim 1 / \text{Kn} M$, где $\text{Kn} = l_1 / r_1$ — число Кнудсена, l_1 — длина свободного пробега молекул, определенная по параметрам потока на оси на расстоянии r_1 .

Поступила 19 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams J. C. Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump. AIAA Journal, 1967, vol. 5, № 12.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
3. Биркин А. П., Межиров И. И. О некоторых автомодельных течениях вязкого газа в канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.



Фиг. 5