

О РАВНОВЕСИИ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЕ

Л. Н. Маурин

(Иваново)

Рассматривается эволюция фигуры и условия отрыва тонкой жидкой пленки, которая смачивает твердую сферу, в зависимости от угловой скорости вращения сферы. Если в отсутствие вращения такая пленка равномерно покрывает сферу, то с ростом угловой скорости пленка под действием центробежных и капиллярных сил деформируется, сплющиваясь у полюсов, затем рвется на полюсах и съезжает к экватору и с дальнейшим увеличением вращения отрывается от сферы в виде кольца. Эволюция фигуры равновесия такой пленки резко отличается от изученной в работах ряда авторов [1] эволюции фигур равновесия однородной массы вращающейся жидкости, подверженной действию поверхностного натяжения. С формальной стороны это обусловлено наличием краевого условия — угла смачивания — на границе между пленкой и смачиваемой сферой.

1. Постановка задачи. Ниже рассматриваются равновесные аксиально симметричные фигуры тонкой жидкой пленки, которая смачивает вращающуюся твердую сферу. Эти фигуры соответствуют режимам «твердого вращения», т. е. таким режимам, когда отлична от нуля только азимутальная составляющая скорости

$$v_{\varphi} = \Omega (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (1.1)$$

Система координат выбрана так, что ось z направлена по оси вращения.

Граничные условия на свободной поверхности жидкой пленки имеют вид [1]

$$\frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + y^2) + p_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.2)$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения сферы с жидкой пленкой, ρ — плотность жидкости в пленке, σ — коэффициент поверхностного натяжения, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны свободной поверхности пленки, p_0 — постоянная, входящая в выражение для давления. В случае, когда жидкая пленка целиком покрывает твердую сферу, а внешнее давление отсутствует, p_0 имеет смысл давления на оси вращения.

Чтобы определить форму свободной поверхности пленки, достаточно (в силу аксиальной симметрии) найти уравнение ее в меридиональном сечении, например, в сечении $y = 0$. Подставляя выражения для радиусов кривизны

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} \right), \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{z'}{x \sqrt{1+z'^2}} \quad (1.3)$$

в (1.2), получим уравнение кривой $z = z(x)$, которая определяет фигуру пленки в меридиональном сечении

$$\pm \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} \right) + \frac{z'}{x \sqrt{1+z'^2}} \right] = -\frac{p_0}{\sigma} - \frac{1}{2} \rho \frac{\Omega^2}{\sigma} x^2 \quad (1.4)$$

Умножаем (1.4) на x и интегрируем

$$\pm \frac{xz'}{\sqrt{1+z'^2}} = -\frac{p_0}{\sigma} x^2 - \frac{1}{8} \rho \frac{\Omega^2}{\sigma} x^4 + c \quad (1.5)$$

Здесь c — постоянная интегрирования. Введем новые переменные и безразмерную угловую скорость

$$z = RZ, \quad x = RX, \quad \omega = (1/8 \rho \Omega^2 R^3 \sigma^{-1})^{1/2} \quad (1.6)$$

где R — радиус сферы.

Уравнение (1.5) принимает вид

$$\pm xz' / \sqrt{1+z'^2} = c + sx^2 + \omega^2 x^4 \quad (1.7)$$

или (если разрешить его относительно z')

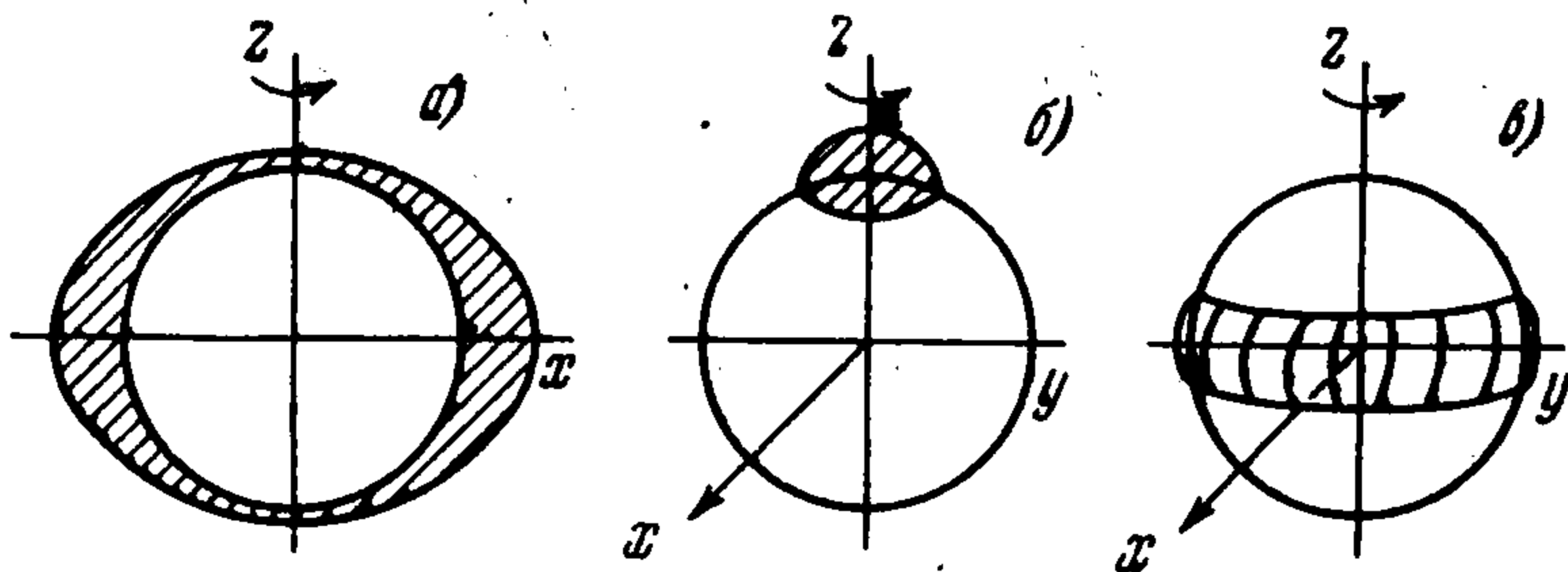
$$\mp z' = \frac{c + sx^2 + \omega^2 x^4}{\sqrt{x^2 - (c + sx^2 + \omega^2 x^4)^2}} \quad (1.8)$$

В (1.7) и (1.8) сохранены прежние обозначения координат и постоянной c ; вместо p_0 введен безразмерный параметр s .

При вычислении $z(x)$ надо брать в левой части (1.8) знак минус в первом квадранте и знак плюс — в четвертом. К уравнению (1.8) необходимо присоединить условие неизменности объема пленки и условия смачивания на границе пленка — сфера, когда такая граница возникает. Этих условий достаточно для определения всех постоянных интегрирования (включая s и c).

Заметим, что пока пленка, смачивающая сферу, остается связанной областью, ее свободная поверхность может быть нульсвязной (оболочка, фиг. 1, а), односвязной (капля, фиг. 1, б) и двухсвязной (пояс, фиг. 1, в).

2. Равновесие оболочки. Если пленка покрывает всю сферу, то свободная поверхность ее будет такой же, как в случае вращающейся однородной жидкой массы. Вращение однородной жидкой массы рассмотрено в [1]. Там показано, что при медленных вращениях она имеет фигуру эллипсоида вращения с полуосями $(1 + g)$ вдоль x и y и полуосью $(1 + g)[1 - \omega^2(1 + g)^3]$ вдоль z . В рассматриваемой задаче величина g может быть найдена через объем пленки V

$$\frac{4}{3}\pi(1 + g)^3[1 - \omega^2(1 + g)^3]R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 + V \quad (2.1)$$


Фиг. 1

Здесь и ниже предполагается, что объем пленки много меньше объема смачиваемого шара (тонкая пленка). При этом пленка остается нульсвязной (оболочкой) лишь в случае медленных вращений, т. е. при $g \ll 1$. Учитывая это, получим из (2.1)

$$g = \frac{1}{4}V / \pi R^3 + \frac{1}{3}\omega^2 \quad (2.2)$$

Толщина оболочки на полюсах равна

$$(1 + g)[1 - \omega^2(1 + g)^3] - 1 = \frac{1}{4}V / \pi R^3 - \frac{2}{3}\omega^2 \quad (2.3)$$

Таким образом, с увеличением угловой скорости вращения толщина оболочки на полюсах уменьшается и, наконец, становится равной нулю, когда

$$\omega = \omega_1 = (\frac{3}{8}V / \pi R^3)^{1/2} \quad (2.4)$$

Из-за симметрии оболочка разрывается сразу на обоих полюсах (при условии, что режим — невозмущенный), в результате чего образуется жидкий пояс с двухсвязной поверхностью.

3. Равновесие жидкого пояса. Режим с жидким поясом, который приходит на смену режиму с оболочкой, можно, с другой стороны, рассматривать совершенно независимо от оболочечного режима в силу того, что двухсвязная пленка (пояс) может существовать и в отсутствии вращения. Фигура такого жидкого пояса, который по предположению симметричен относительно экватора, определяется уравнением (1.8), к которому нужно теперь присоединить условие смачивания

$$dz / dx = \operatorname{tg}(\alpha - \theta_*) \quad (3.1)$$

Здесь α — угол смачивания (краевой угол), θ_* — полярный угол, указывающий положение границы пленка — сфера в первом квадранте. Вследствие симметрии пояса относительно экватора достаточно рассмотреть (1.8) в первом квадранте. При этом условие смачивания на второй границе пояса, расположенной в четвертом квадранте, заменяется условием обращения dz / dx в бесконечность на экваторе, т. е. при $z=0$.

Рассмотрим фигуру жидкого пояса при $\omega = 0$. Из (1.8) имеем

$$-z = \int_{1+H}^x \frac{c + sx^2}{\sqrt{x^2 - (c + sx^2)^2}} dx \quad (3.2)$$

Через H обозначена безразмерная толщина пояса при $z = 0$ (на экваторе).

Интеграл (3.2) может быть выражен через эллиптические интегралы первого и второго рода. Однако найти в явном виде зависимость c и s от угла смачивания не удастся, поэтому проведем вычисления для случая $\alpha \approx 1/2 \pi$. Пояс собирается на экваторе в тонкий жгут, и θ_* оказывается близким к $1/2 \pi$. Это позволяет упростить (3.2), если положить

$$x = 1 + u \quad (u \ll 1) \quad (3.3)$$

Разлагая подынтегральную функцию в (3.2) по u и сохраняя лишь главные члены, получим

$$-z = \int_H^u \frac{(s+c) + u(s-c)}{\sqrt{1 - [(s+c) + u(s-c)]^2}} du \quad (3.4)$$

Так как $dz/du = -\infty$ при $u = H$, то имеем

$$(s+c) + H(s-c) = 1 \quad (3.5)$$

Интегрируем (3.4) с учетом (3.5)

$$z^2 + \left(u + \frac{s+c}{s-c}\right)^2 = \frac{1}{(s-c)^2} \quad (3.6)$$

Таким образом, $z(x)$ представляет дугу окружности радиуса $1/(s-c)$, центр которой может быть расположен на поверхности смачиваемой сферы ($s+c=0$), внутри сферы ($s+c>0$) и вне ее ($s+c<0$). Из геометрических соображений ясно (если учесть малость объема пленки), что в случае $s+c=0$ угол смачивания близок к $1/2\pi$, в случае $s+c>0$ $\alpha < 1/2\pi$ и в случае $s+c<0$ $\alpha > 1/2\pi$. Из (3.1) и (1.8) следует:

$$-\sin(\alpha - \theta_*) = (s+c) + u_*(s-c) \quad (3.7)$$

Величины θ_* и u_* находятся как координаты точки пересечения окружности (3.6) с окружностью $x^2 + z^2 = 1$. Вычисляя объем жидкого пояса с той же точностью, с какой проводились все вычисления (что позволяет использовать теорему Гюльдена), находим

$$\begin{aligned} \frac{V}{4\pi R^3} = \int_{x_*}^{1+H} z(x) dx - \int_{x_*}^1 \sqrt{1-x^2} dx = (s-c)^{-2} [\sin(\alpha - \theta_*) \cos(\alpha - \theta_*) + \\ + 1/2\pi + \sin(\alpha - \theta_*)] + O(z_*^3) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ограничиваясь рассмотрением случая $\alpha \approx 1/2 \pi$, положим сначала $\theta_* = \alpha$. Тогда из (3.8) следует:

$$\frac{1}{s-c} = \left(\frac{V}{2\pi^2 R^3}\right)^{1/2} \quad (3.9)$$

Из (3.6) находим $z_* = 1/(s-c)$. Учитывая, что $z_* = \cos \theta_*$, имеем

$$\theta_* = \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{s-c} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{V}{2\pi^2 R^3}\right)^{1/2} \approx \frac{\pi}{2} \quad (3.10)$$

Наконец, из (3.5) — (3.7) следует:

$$\frac{s+c}{s-c} = \frac{1}{2(s-c)^2} = \frac{V}{4\pi^2 R^3}, \quad H = \frac{1}{s-c} = \left(\frac{V}{2\pi^2 R^3}\right)^{1/2} \quad (3.11)$$

Аналогичные вычисления, проведенные для $\alpha - \theta_* \neq 0$, дают зависимость θ_* от α в виде

$$\theta_* = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{V}{2\pi^2 R^3} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \quad (3.12)$$

Здесь предполагается, что $1/2 \pi - \alpha$ мало. Приведенный результат (3.12) показывает, что θ_* слабо зависит от α , т. е. в большом интервале краевых углов величина θ_* остается близкой к $1/2 \pi$, и жидкий слой располагается на экваторе.

4. Отрыв пленки. С увеличением ω жидкий пояс меняет фигуру, выпячиваясь на экваторе. При некотором значении угловой скорости на профиле его свободной поверхности появляется точка перегиба (фиг. 2, а). Это отвечает случаю, когда правая часть в (1.8) имеет кратный корень. При этом

$$\frac{s^2}{4\omega^4} - \frac{c}{\omega^2} = 0 \quad (4.1)$$

Ввиду того, что правая часть (1.8) обращается в нуль не больше двух раз (в первом квадранте), точка перегиба заведомо не имеет места при углах смачивания, превышающих $1/2 \pi$, так как при $\alpha > 1/2 \pi$ обязательно существует x , при котором $z' = 0$, и эта точка будет точкой максимума и, следовательно, не может быть точкой перегиба. Ниже рассматриваются углы смачивания, близкие к $1/2 \pi$, но не превышающие $1/2 \pi$. Для таких краевых углов при дальнейшем увеличении вращения точка перегиба распадается на точку максимума, удаляющуюся от сферы, и точку минимума, лежащую ближе к сфере — профиль пленки уподобляется профилю пузырька (с шейкой в точке минимума) (фиг. 2, б). С ростом ω толщина шейки уменьшается и, наконец, становится равной нулю — пленка отрывается от сферы.

Пусть $\alpha < 1/2 \pi$. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно положения минимума и максимума функции $z(x)$. Введем

$$x_2 - x_1 = \Delta, \quad x = x_1 + \Delta (\xi + 1/2), \quad A = 4\omega^2 \Delta^2 \quad (4.2)$$

Учитывая, что $\Delta \xi \ll 1$ и сохраняя в (1.8) лишь главные члены, получим

$$z = - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\Delta A (\xi^2 - 1/4) d\xi}{[1 - A^2 (\xi^2 - 1/4)^2]^{1/2}} \quad \left(\xi_0 = \left(\frac{4 + A}{4A} \right)^{1/2} \right) \quad (4.3)$$

Здесь ξ_0 — значение ξ при $z = 0$ (т. е. на экваторе). Перейдем под знаком интеграла к новой переменной

$$\xi = [(4 + A) / 4A]^{1/2} \cos t \quad (4.4)$$

Тогда (4.3) преобразуется к виду ($k^2 = 1/3 (4 + A)$)

$$z = \frac{\Delta}{\sqrt{2A}} \int_0^t \frac{1 - 2k^2 \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt = \frac{\Delta}{\sqrt{2A}} [-F(t, k) + 2E(t, k)] \quad (4.5)$$

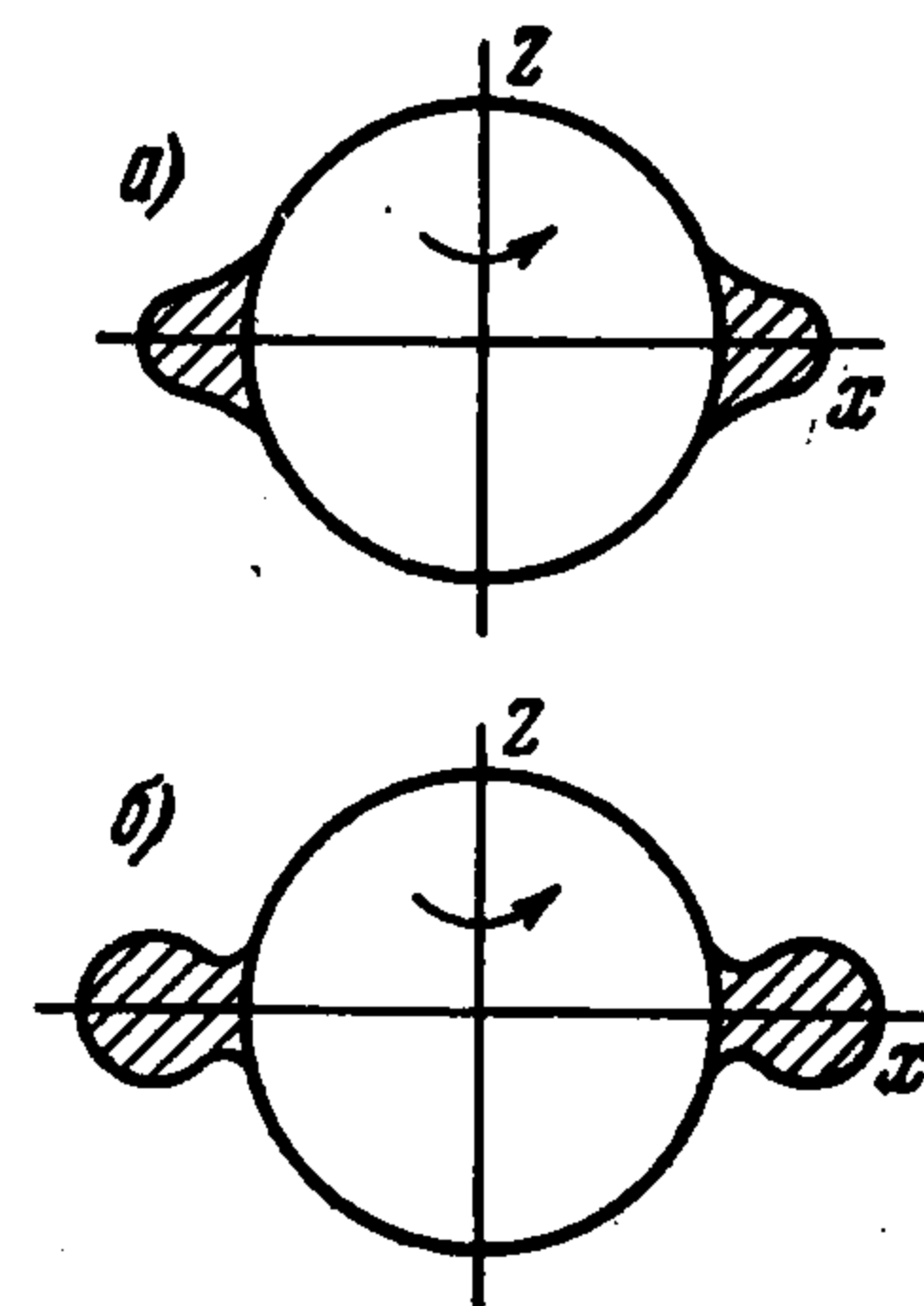
Здесь F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода.

В момент отрыва пленки толщина шейки, т. е. $z(x_1)$, становится равной нулю

$$\int_0^{t_0} \frac{1 - 2k^2 \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt = 0 \quad (4.6)$$

Так как положение шейки отвечает условию $z' = 0$, то отсюда

$$1 - 2k^2 \sin^2 t_0 = 0 \quad (4.7)$$



Фиг. 2

Из двух корней уравнения (4.7) один (меньший) соответствует максимуму функции $z(x)$, а другой (большой) — минимуму, т. е. шейке. Этот большой корень равен

$$t_0 = \tau = \pi - \arcsin(1/k\sqrt{2}) \quad (4.8)$$

Таким образом, условие (4.6) принимает вид

$$\int_0^{\tau} \frac{1 - 2k^2 \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt = 0 \quad (4.9)$$

Из этого уравнения при помощи таблиц эллиптических интегралов [2] находим значение k^2 , а затем из (4.4) определяем величину A для режима, соответствующего отрыву пленки

$$k^2 = 0,73, \quad A = 1,84 \quad (4.10)$$

Вычисление угловой скорости для режима отрыва легко провести для случая, когда угол смачивания в точности равен $1/2 \pi$. В этом случае шейка лежит на сфере, так что $\theta_* = 1/2 \pi$, и пленка целиком покидает сферу.

Вычисляя объем пленки, фигура которой определяется формулой (4.5), и приравняв вычисленный объем заданному объему V , находим

$$4\pi R^3 0,272 \Delta^2 = V \quad (4.11)$$

Из (4.2), (4.10), (4.11) получаем величину безразмерной угловой скорости отрыва

$$\omega = (1/2 \pi R^3 / V)^{1/2} \quad (4.12)$$

Вычисления, проведенные для $\alpha < 1/2 \pi$ (но $1/2 \pi - \alpha \ll 1$), показывают, что с уменьшением α угловая скорость отрыва уменьшается

$$\omega = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)^2 \right] \left(\frac{\pi R^3}{2V} \right)^{1/2} \quad (4.13)$$

При $\alpha < 1/2 \pi$ часть пленки остается на сфере после отрыва основной массы жидкости.

В заключение заметим, что случайные возмущения или отклонения формы поверхности смачиваемого тела от сферической могут привести к тому, что разрыв пленки при малых угловых скоростях произойдет лишь на одном из полюсов. Эволюция фигуры пленки в этом случае приведет к несимметричному относительно экватора жидкому поясу и требует дополнительного исследования.

Поступила 14 1 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. А п п е л ь П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.— М., ГОНТИ, 1936.
2. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1964.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

А. П. Б ы р к и н

(Москва)

При изучении течений вязкой жидкости особый интерес представляют случаи, когда удается получить точные решения уравнений Навье—Стокса.

Для вязкого теплопроводного газа известно небольшое количество таких решений. К ним относится полученное в работе [1] решение, отвечающее случаю течения вязкого газа в коническом сопле при специальном законе теплообмена на стенке.

Вместе с тем автором указанной работы сделан вывод об отсутствии таких автомодельных течений в канале с плоскими стенками.